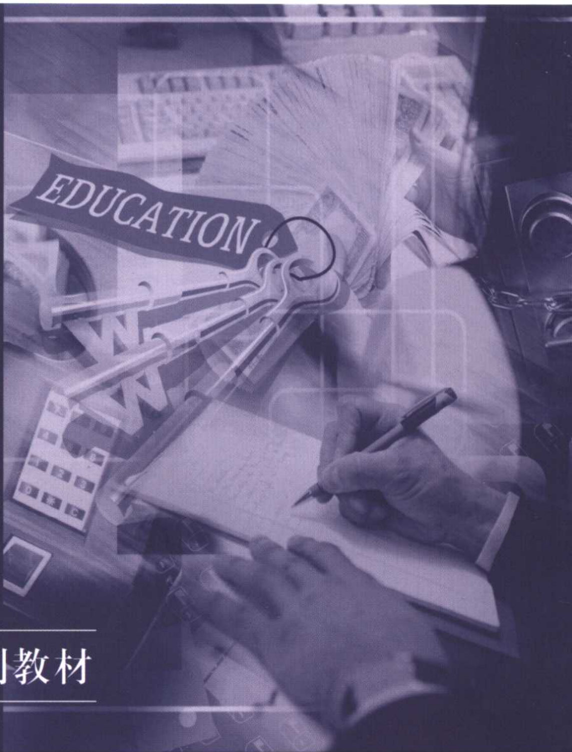

高等院校继续教育系列教材

线性代数

XIANXING DAISHU

黄振耀 李国勤 编著

上海财经大学出版社

高等院校继续教育系列教材

线性代数

黄振耀
李国勤 编著

上海财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/黄振耀,李国勤编著. —上海:上海财经大学出版社,2006.6

(高等院校继续教育系列教材)

ISBN 7-81098-642-2/O·014

Ⅰ.线… Ⅱ.①黄…②李… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 039299 号

XIAN XING DAI SHU

线 性 代 数

黄振耀
李国勤 编著

责任编辑 王 芳 封面设计 优典工作室

上海财经大学出版社出版发行

(上海市武东路 321 号乙 邮编 200434)

网 址:http://www.sufep.com

电子邮箱:webmaster @ sufep.com

全国新华书店经销

上海译文印刷厂印刷

宝山葑村书刊装订厂装订

2006 年 6 月第 1 版 2006 年 6 月第 1 次印刷

890mm×1240mm 1/32 9.75 印张 280 千字

印数:0 001—4 000 定价:18.00 元

总　序

继续教育是我国高等教育的重要组成部分，是传统学校教育向终身教育发展的一种新型教育制度。大力发展继续教育是提高劳动者素质、振兴经济和推进教育现代化的重要环节。国家实行继续教育制度，鼓励发展多种形式的继续教育，建立与完善终身教育体系，培养大批贴近社会、服务社会的各类应用型人才，对于加强社会主义精神文明，促进社会进步和经济建设，都将起到重要作用。

按照教育部关于继续教育人才的培养目标，构建适用的教材体系，是继续教育在新形势下继续发展不可缺少的一环。经过编辑委员会、作者和出版社的共同努力，《高等院校继续教育系列教材》将陆续出版，我向他们表示诚挚的祝贺和感谢。

综观这套系列教材，具有以下特点：

1. 体现了高等院校继续教育的新思想和新观念，注重提高学生的思想道德素质、文化素质、业务素质和社会责任感。在我国高等教育发展与人力资源开发中，继续教育作为继续教育的一种重要形式和特殊层次，将发挥日趋重要的作用。

2. 体现了学术性与应用性的统一。教学内容既有基础知识、基本理论，又有基本技能；既加强基本原理与应用知识的传授，又帮助学生在掌握一定知识理论的基础上，获得相应的技能。

3. 体现了系统性与针对性的统一。在学历教育中，应重视学科知识的系统性。同时，在兼顾学科知识内在逻辑性的基础上，选择最基

本、最有针对性和适用性的部分，进行合理的组织编排，使学生能在比较短的时间内，学到急需有用的知识。

4. 体现了理论和实践的统一。成人学习的目的是解决实践中存在的问题，改变自己现有的处境或状态，他们不仅需要知识，而且需要能立即付诸实施的能力。所以，本系列教材充分体现实践能力训练的要求，针对成人在职学习与就业需求的特点，加强职业就业与创业指导。

本系列教材涵盖会计、金融、财政、工商管理、法学等多个学科，由上海财经大学相关学科的教授、副教授与继续教育学院的骨干教师承担编写任务，注意吸收本校近年来的教学改革成果，普遍更新了教学内容，既以学历教育为主，又兼顾非学历职业培训。因此，本系列教材不仅能提供校内外各相关专业本、专科学历教育使用，也适合社会各界进行专业培训和自学参考。

当然，继续教育是一项系统工程，要真正抓好教学工作，还必须在运用教材过程中辅之以其他配套措施。我们为本系列教材确定的目标以及教材所要达到的各项要求，很可能超过了我们的学识和教学经验所容许的范围，因此，本系列教材可能存在考虑不周到以及安排和表达不妥当的地方，甚至某些失误恐亦难以避免，我们欢迎读者批评指正。

储敏伟

2006 年 6 月

前　言

线性代数是高等院校经济管理类专业的基础课之一。它是在经济管理、经济数量分析、质量控制和运筹学中有着广泛应用的基础课程。

本书是为了适应继续教育中经济管理类专业学生的实际学习需要而编写的经济数学系列教材之一。根据继续教育的特点，本书在编写中力求内容完整，做到重点突出、联系实际、由浅入深、通俗易懂，充分体现该课程的系统性、科学性和实用性的要求。

本书可以作为高等院校经济管理类线性代数课程的教材或教学参考书，也可以作为高等教育自学考试中“高等数学”(二)课程的自学参考书。

本书在编写过程中，得到了学院领导和兄弟部门的大力支持和关心，在此谨表谢意。书中若有不足之处，恳请读者批评指正。

编　者

2006 年 6 月

目　录

第一章

行列式

行列式是学习线性代数的重要基础知识。初等数学中曾用二阶、三阶行列式来解二元、三元线性方程组,在本书研究 n 元线性方程组的解,以及研究矩阵性质时也要用到行列式,为此首先引入行列式的概念。

第一节　行列式的概念

一、行列式的概念

［**定义 1.1**］　一阶行列式由一个数组成,记为 $|a_{11}|=a_{11}$.

［**定义 1.2**］　二阶行列式是由 2^2 个元素排成 2 行 2 列,用

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示,且规定:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}$$

其中,元素 a_{ij} 称为行列式的第 i 行第 j 列的元素($i,j=1,2$);$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij}($i,j=1,2$)的**代数余子式**;而 M_{ij} 是行列式中划去第 i 行且划去第 j 列元素后所剩下的元素组成的行列式,称为元素 a_{ij} 的**余子式**($i,j=1,2$)。

显然在定义中，$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=M_{11}$，而 $M_{11}=|a_{22}|=a_{22}$；$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-M_{12}=-|a_{21}|=-a_{21}$，则二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

这与中学里所学的对角交叉相乘所得结果一致。

［**例 1.1**］ 求二阶行列式

$$\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

的值。

解

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}&=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}\\ &=5\times(-1)^{1+1}\times2+(-6)\times(-1)^{1+2}\times3\\ &=10+18=28\end{aligned}$$

［**定义 1.3**］ 三阶行列式是由 3^2 个元素排成的 3 行 3 列，用

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示，且规定

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

其中：

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

称 M_{11} 为 a_{11} 的**余子式**，它是在三阶行列式中划去 a_{11} 所在的行及列后

按原次序所成的二阶行列式，称 A_{11} 为 a_{11} 的**代数余子式**；同理称 M_{12} 为 a_{12} 的**余子式**，A_{12} 为 a_{12} 的**代数余子式**；一般地，M_{ij} 就是三阶行列式中划去 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列剩下的元素按原次序构成的二阶行列式，称为元素 a_{ij} 的**余子式**，$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**$(i,j=1,2,3)$。

［**例 1.2**］　计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 5 & 6\\ 2 & 0 & 7\\ 8 & -3 & 4\end{vmatrix}$$

的值。

解　按照［定义 1.3］，因为

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0 & 7\\ -3 & 4\end{vmatrix}=21$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 7\\ 8 & 4\end{vmatrix}=48$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 0\\ 8 & -3\end{vmatrix}=-6$$

所以

$$\begin{aligned}D&=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}\\ &=1\times21+5\times48+6\times(-6)\\ &=225\end{aligned}$$

［**定义 1.4**］　假设已定义了 $n-1$ 阶行列式，n 阶行列式是由 n^2 个元素排成 n 行和 n 列组成，记为

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

且规定其值为：

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$$

其中，M_{1j}表示元素$a_{1j}(j=1,2,\cdots,n)$的**余子式**，它是D中划去a_{1j}所在的第1行和第j列后剩下的元素按原来的次序构成的$n-1$阶行列式。$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}(j=1,2,\cdots,n)$称为$a_{1j}$的**代数余子式**。

一般地，对于n阶行列式D来讲，M_{ij}称为元素a_{ij}的**余子式**，$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$称为元素a_{ij}的**代数余子式**$(i,j,=1,2,\cdots,n)$。其中，M_{ij}是D中划去元素a_{ij}所在的行和列元素后，按原次序排列构成的$n-1$阶行列式。

［**例 1.3**］ 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ -1 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{aligned} D &= 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} \\ &\quad +1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 0 & 7 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} \\ &\quad +(-3)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} \\ &\quad +(-1)(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 8-33-57-3=-85 \end{aligned}$$

注 从以上定义及例子可以看到，n阶行列式由n^2个元素构成，每个行列式都表示一个数值，且它等于第一行的元素分别乘以它的代数余子式再求和。

二、用行列式表示二元及三元线性方程组的解

二元线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$

若 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$,可用消元法解得

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2=\dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases}$$

用二阶行列式可表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

其中:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$$

［**例 1.4**］ 解二元线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2=-4 \\ x_1-2x_2=5 \end{cases}$$

解　可用二阶行列式得

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{-7}{-7}=1$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix}2 & -4\\1 & 5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 3\\1 & -2\end{vmatrix}}=\frac{14}{-7}=-2$$

三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}$$

当 $D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0$ 时，可用消元法得

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{D_1}{D}\\x_2=\dfrac{D_2}{D}\\x_3=\dfrac{D_3}{D}\end{cases}$$

其中：

$$\begin{aligned}D_1&=b_1a_{22}a_{33}+b_2a_{13}a_{32}+b_3a_{12}a_{23}\\&\quad-b_1a_{23}a_{32}-b_2a_{12}a_{33}-b_3a_{13}a_{22}\\D_2&=b_1a_{23}a_{31}+b_2a_{11}a_{33}+b_3a_{13}a_{21}\\&\quad-b_1a_{21}a_{33}-b_2a_{13}a_{31}-b_3a_{11}a_{23}\\D_3&=b_1a_{21}a_{32}+b_2a_{12}a_{31}+b_3a_{11}a_{22}\\&\quad-b_1a_{22}a_{31}-b_2a_{11}a_{32}-b_3a_{12}a_{21}\end{aligned}$$

用三阶行列式可表示为：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}$$

其中：

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\qquad D_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & a_{13}\\b_2 & a_{22} & a_{23}\\b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

且 $D\neq 0$.

［**例 1.5**］ 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-2 \\ 2x_1-x_2-3x_3=7 \\ x_1+3x_2-x_3=-4 \end{cases}$$

解

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=16$$

$$D_1=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 7 & -1 & -3 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix}=16$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & -3 \\ 1 & -4 & -1 \end{vmatrix}=-32$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 7 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix}=-16$$

故

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1, \qquad x_2=\frac{D_2}{D}=-2, \qquad x_3=\frac{D_3}{D}=-1$$

第二节 行列式的性质

在第一节中，n 阶行列式的定义是按第一行展开，即