XINBIAN GAOZHI GAOZHUAN GUIHUA JIAOCAI

新编高职高专规划教材

主 编 曹玉平 骆汝九

# 概率论与数理统计

GAILULUN YU SHULI TONGJI

中国科学技术大学出版社

XINBIAN GAOZHI GAOZHUAN GUIHUA JIAOCAI

新编高职高专规划教材

# 概率论与数理统计

GAILULUN YU SHULI TONGJI

主　编：曹玉平　骆汝九

副主编：姬天富　杨耀芳

中国科学技术大学出版社

**图书在版编目（CIP）数据**

概率论与数理统计/曹玉平，骆汝九主编. —合肥：中国科学技术大学出版社，2006.8

ISBN 7-312-01966-8

Ⅰ. 概… Ⅱ. ①曹… ②骆… Ⅲ. ①概率论—高等学校—教材 ②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 082355 号

**出版发行** 中国科学技术大学出版社

安徽省合肥市金寨路 96 号，邮编：230026

**网　址** http://press.ustc.edu.cn

**电　话** 发行科 0551-3602905　编辑部 0551-3602900

**印　刷** 中国科学技术大学印刷厂

**经　销** 全国新华书店

**开　本** 710 mm×960 mm　1/16

**印　张** 12.375

**字　数** 200 千

**版　次** 2006 年 8 月第 1 版　2006 年 8 月第 1 次印刷

**印　数** 1—3 000 册

**定　价** 18.00 元

# 前　言

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的数学学科，是工科及经济类专业的一门重要的基础课。

本书根据高职高专教育概率论与数理统计课程教学基本要求编写，在结构体系、内容安排、语言叙述等方面，努力体现高职高专的教学规律及特色，力求贯彻“以应用为目的，以必需够用为度”的原则，致力于通俗易懂地讲清基本概念和方法，注重训练和培养学生的基本运算能力以及运用所学知识分析、解决实际问题的能力。

本书共分两部分：第一部分为概率论，包括第一章至第五章，主要讲述概率论的基本概念和基本结论，其中心内容是随机变量及其分布；第二部分为数理统计，包括第六章至第九章，主要讲述数理统计的基本概念和常用的统计方法，其中心内容是统计推断。书中部分内容打“*”号，教师可根据学时等情况在教学中灵活安排。

由于编者水平有限，书中不足和错谬之处在所难免，敬请同行和读者批评指正。

编　者

2006 年 3 月

# 目　录

# 第一章　随机事件及其概率

随机事件(简称事件)和事件的概率是概率论的两个基本概念，而研究事件间的关系和运算、概率的性质以及计算则是概率论的一些基本问题．本章主要讨论这些问题．

## 第一节　随机事件及其运算

### 一、随机试验与随机事件

在自然界和人类社会中存在两类不同现象．一类是在一定条件下必然发生(或不发生)的现象，称为确定性现象．例如：在标准大气压下，水加热到100 摄氏度，必然会沸腾；直角三角形中，斜边边长的平方是两直角边长平方之和．另一类是在一定条件下可能发生也可能不发生的现象，称为随机现象．例如：掷一颗质地均匀的骰子所出现的点数；未来市场的股票价格；同一种药品对患同一疾病的不同患者的疗效．可见随机现象充满于我们的现实生活、经济生活、科学研究和工程技术活动之中．

随机现象虽然对于个别实验或观察来说其结果不可确定，但在相同条件下作大量重复观察或实验时，却又呈现出某种规律性．随机现象所呈现的这种规律性称为随机现象的统计规律性．概率论与数理统计就是揭示和应用随机现象统计规律性的一门科学，也正是由于这种统计规律性诱发人们叩开概率论这门学科的激情和冲动．

1．随机试验与随机事件

为了研究随机现象的统计规律性，需要对研究对象进行实验或观察，称为**试验**．试验常用 $E$ 表示．例如：

$E_1$：掷一枚质地均匀的硬币，观察它出现正面($H$)或反面($T$)的情况．

$E_2$：掷一颗均匀的骰子，观察出现的点数．

$E_3$：一射手射击，首次击中目标所需射击的次数．

$E_4$：记录一小时内某城市 110 报警次数．

$E_5$：在一批电脑中任意抽取一台，测试它无故障运行的时间.

上述试验都具有以下共同的特点：

(1) 可在相同条件下重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，但试验的所有可能结果事先是明确的；

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

我们将具有上述三个特点的试验称为**随机试验**，简称**试验**. 本书中今后所说的试验都是指随机试验.

随机试验的每一个可能的结果称为该随机试验的**随机事件**，简称**事件**. 事件一般用 $A$，$B$，$C\cdots$表示. 例如 $E_1$ 的可能结果为{出现正面}和{出现反面}，它们都是随机事件；再如 $E_5$ 中“所取电脑无故障运行不超过 3 000 小时”是一个随机事件.

随机事件分为基本事件和复合事件. **基本事件**是指随机试验的每一个可能的基本结果，如 $E_4$ 中{出现一次报警}、{出现两次报警}、…、{出现 $n$ 次报警}等都是基本事件. **复合事件**是指由若干基本事件组成的事件，如 $E_2$ 中{出现奇数点}、{出现偶数点}均是复合事件. 值得注意的是：把事件区分为基本事件与复合事件是相对具体试验的考察目的而言的，不能绝对化. 如两人掷一颗骰子，以出现奇数点和偶数点来决定输赢时，{出现奇数点}及{出现偶数点}则都是基本事件.

特别地，每次试验都必然发生的事件，称为**必然事件**，记为 $\Omega$. 每次试验中都不发生的事件，称为**不可能事件**，记为 $\varnothing$. 如 $E_2$ 中{点数不大于 6}是必然事件，{点数大于 6}是不可能事件. 必须强调的是：必然事件与不可能事件所反映的现象是确定性现象，并不具有随机性，这种确定性现象是作为随机现象的特例进行研究的.

2. 样本空间

一个随机试验 $E$ 产生的所有基本事件构成的集合称为**样本空间**，记为$\Omega$. 称其中的元素(基本事件)为一个**样本点**，记为 $\omega$，即$\Omega=\{\omega\}$.

前述试验 $E_k(k=1,2,3,4,5)$的样本空间$\Omega_k$分别为

$\Omega_1=\{H,\ T\}$；

$\Omega_2=\{1,2,3,4,5,6\}$；

$\Omega_3=\{1,2,3,\ \cdots\}$；

$\Omega_4=\{0,1,2,3,\ \cdots\}$；

$\Omega_5=\{x|x\geq 0$，$x$为无故障运行的时间，单位：小时$\}$.

由于任何一个事件或是基本事件，或是复合事件，因此试验$E$的任何一个事件$A$都是样本空间中的一个子集. 由此可见，利用样本空间的子集可以描述随机试验中所对应的一切随机事件.

## 二、事件的关系与运算

事件间的关系和运算可以仿照集合间的关系和运算. 下面给出这些关系和运算在概率论中的提法，并据"事件发生"的含义，给出它们在概率论中的含义.

设试验$E$的样本空间为$\Omega$，事件$A, B, A_k\ (k=1, 2, 3, \cdots)$都是$\Omega$的子集.

1. 包含关系

如果事件$A$发生必然导致事件$B$发生，则称**事件$B$包含事件$A$**，记为$A\subset B$或$B\supset A$.

例如在$E_2$中，若记

$A=\{2, 4, 6\}$，即"出现偶数点"，

$B=\{2, 3, 4, 5, 6\}$，即"出现的点数不小于2".

显然$A\subset B$，即事件$B$包含事件$A$. 因为若事件"出现偶数点"发生，则事件"出现的点数不小于2"必然发生.

对于任意事件$A$，都有$\varnothing\subset A\subset\Omega$成立.

如果$A\subset B$且$B\subset A$，则称**事件$A$与事件$B$相等**，记为$A=B$. 它表示$A$与$B$在本质上是同一个事件.

2. 事件的和(并)

事件$A$和事件$B$至少有一个发生所构成的事件称为**事件$A$与事件$B$的和(并)事件**，记为$A\cup B$，即事件$A\cup B=\{x|x\in A或x\in B\}$.

例如在$E_2$中，若记

$A=\{2, 4, 6\}$，即"出现偶数点"，

$B=\{3, 4, 5, 6\}$，即"出现的点数不小于3"，

则$A\cup B=\{2, 3, 4, 5, 6\}$，即"出现的点数不小于2".

类似地，"$n$个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$中至少有一个发生"是一个事件，称为$A_1, A_2, \cdots, A_n$的和(并)事件，记为$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，简记为$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$. "可列个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$中至少有一个发生"是一个事件，称为可列个事件

$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的和(并)事件，记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$，简记为 $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ .

3. 事件的积(交)

事件 $A$ 和事件 $B$ 同时发生所构成的事件称为**事件 $A$ 与事件 $B$ 的积(交)事件**，记为 $A\cap B$ 或 $AB$，即事件 $A\cap B=\{x|x\in A且x\in B\}$.

例如在 $E_2$ 中，若记

$A=\{2,4,6\}$，即“出现偶数点”，

$B=\{3,4,5,6\}$，即“出现的点数不小于 3”，

则 $A\cap B=\{4,6\}$，即“出现 4 点或 6 点”.

类似地，“$n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生”是一个事件，称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积(交)事件，记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 或 $A_1A_2\cdots A_n$，简记为 $\bigcap_{i=1}^{n}A_i$ . “可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生”是一个事件，称为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的积(交)事件，记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots$ 或 $A_1A_2\cdots A_n\cdots$，简记为 $\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$ .

4. 互不相容事件

如果事件 $A$ 与事件 $B$ 不能同时发生，即 $A\cap B=\varnothing$，则称 $A$ 和 $B$ 是**互不相容事件**或**互斥事件**. 若事件 $A$ 和 $B$ 互不相容，则它们的和记为 $A+B$ .

例如在 $E_2$ 中，若记

$A=\{1,3,5\}$，即“出现奇数点”，

$B=\{4,6\}$，即“出现大于 3 的偶数点”，

则 $A\cap B=\varnothing$ . 即 $A$ 和 $B$ 不能同时发生，故 $A$、$B$ 是互不相容事件.

类似地，对于 $n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，如果其中任意两个事件 $A_i$ 与 $A_j$ 互不相容，即 $A_i\cap A_j=\varnothing$ $(i\neq j;\ i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为互不相容事件. 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容，则事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和记为 $A_1+A_2+\cdots+A_n$ 或 $\sum_{i=1}^{n}A_i$.

5. 对立事件

如果事件 $A$ 和 $B$ 互不相容，且它们的和为必然事件，即 $A\cap B=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$，则称事件 $A$ 与事件 $B$ 为**对立事件**或互为**逆事件**，记为 $B=\overline{A}$，$A=\overline{B}$ .

例如在 $E_2$ 中, 若记

$A=\{1, 3, 5\}$, 即“出现奇数点”,

$B=\{2, 4, 6\}$, 即“出现偶数点”,

则 $B=\overline{A}$, $A=\overline{B}$.

不难验证: $\overline{\overline{A}}=A$; $A\cap\overline{A}=\varnothing$; $A\cup\overline{A}=\Omega$.

6. 差事件

事件 $A$ 发生而事件 $B$ 不发生所构成的事件称为**事件 $A$ 与事件 $B$ 的差**, 记为 $A-B$.

例如在 $E_2$ 中, 若记

$A=\{1, 3, 5\}$, 即“出现奇数点”,

$B=\{1, 2, 3, 4\}$, 即“出现的点数不超过 4”,

则 $A-B=\{5\}$, 即“出现 5 点”.

若用平面上的一个矩形表示样本空间 $\Omega$, 矩形内的点表示样本点, 圆 $A$ 与圆 $B$ 分别表示事件 $A$ 与事件 $B$, 则事件 $A$ 与事件 $B$ 的各种关系及运算可用文氏(Venn)图来直观地表示, 如图 1-1 所示.

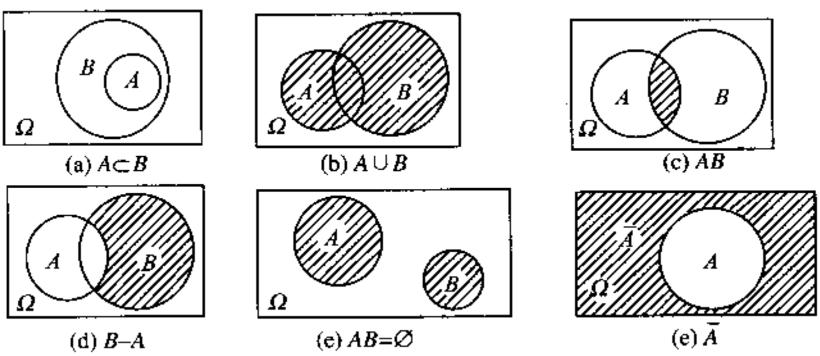


图 1-1

为了加深对上述概念的理解, 现把集合论的有关结论与事件的关系和运算的对应情况列表如下:

**表 1-1**

| 符　号 | 集合论 | 概率论 |
|---|---|---|
| $\Omega$ | 全集 | 样本空间; 必然事件 |
| $\varnothing$ | 空集 | 不可能事件 |
| $\omega\in\Omega$ | $\Omega$ 中的点(或称元素) | 样本点 |

续表 1-1

| 符　号 | 集合论 | 概率论 |
|---|---|---|
| $\{\omega\}$ | 单点集 | 基本事件 |
| $A\subset\Omega$ | $\Omega$ 的子集 $A$ | 事件 $A$ |
| $A\subset B$ | 集合 $A$ 包含在集合 $B$ 中 | 事件 $A$ 包含于事件 $B$ |
| $A=B$ | 集合 $A$ 与 $B$ 相等(或等价) | 事件 $A$ 与事件 $B$ 相等 |
| $A\bigcup B$ | 集合 $A$ 与集合 $B$ 的并集 | 事件 $A$ 与 $B$ 至少有一个发生，即事件 $A$ 与 $B$ 的和(并) |
| $A\bigcap B$ | 集合 $A$ 与集合 $B$ 的交集 | 事件 $A$ 与事件 $B$ 同时发生，即事件 $A$ 与 $B$ 的积(交) |
| $\overline{A}$ | 集合 $A$ 的余集 | 事件 $A$ 的逆事件(对立事件) |
| $A-B$ | 集合 $A$ 与集合 $B$ 的差 | 事件 $A$ 发生而 $B$ 不发生，即事件 $A$ 与事件 $B$ 的差 |
| $A\bigcap B=\varnothing$ | 集合 $A$ 与 $B$ 没有公共元素 | 事件 $A$ 与事件 $B$ 互不相容(互斥) |

类似于集合的运算法则可以得到事件的运算法则：

(1) 交换律：$A\bigcup B=B\bigcup A$；$A\bigcap B=B\bigcap A$.

(2) 结合律：$(A\bigcup B)\bigcup C=A\bigcup(B\bigcup C)$；

$(A\bigcap B)\bigcap C=A\bigcap(B\bigcap C)$.

(3) 分配律：$(A\bigcup B)\bigcap C=(A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C)$；

$(A\bigcap B)\bigcup C=(A\bigcup C)\bigcap(B\bigcup C)$.

(4) 德摩根(De Morgan)对偶律：$\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcap\overline{B}$；$\overline{A\bigcap B}=\overline{A}\bigcup\overline{B}$；对于可列个事件，有 $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}$，$\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}$.

**例 1**　设 $A$，$B$，$C$ 为三个事件，试用 $A$，$B$，$C$ 表示下列事件：

(1) $A$ 发生且 $B$ 与 $C$ 至少有一个发生；

(2) $A$，$B$，$C$ 中恰有一个发生；

(3) $A$ 与 $B$ 都发生而 $C$ 不发生；

(4) $A$，$B$，$C$ 中至少有一个发生；

(5) $A$，$B$，$C$ 都不发生；

(6) $A$，$B$，$C$ 不都发生.

**解**　(1) $A(B\bigcup C)$；

(2) $A\overline{B}\overline{C}\bigcup\overline{A}B\overline{C}\bigcup\overline{A}\overline{B}C$；

(3) $AB\overline{C}$；

(4) $A\bigcup B\bigcup C$；

(5) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $\overline{A\cup B\cup C}$；

(6) $\overline{ABC}$ 或 $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$.

**例 2** 从一批产品中每次抽取一件产品进行检验(取后不放回)，事件 $A_i$ 表示第 $i$ 次取到合格品($i=1,2,3$)．试用 $A_1, A_2, A_3$ 表示下列事件：

(1) 三次都取到合格品；

(2) 至少有一次取到合格品；

(3) 三次中最多有一次取到合格品；

(4) 三次中恰有两次取到合格品.

**解** (1) 三次都取到合格品：$A_1A_2A_3$；

(2) 至少有一次取到合格品：$A_1\cup A_2\cup A_3$；

(3) 三次中最多有一次取到合格品：$\overline{A}_1\overline{A}_2\cup\overline{A}_1\overline{A}_3\cup\overline{A}_2\overline{A}_3$；

(4) 三次中恰有两次取到合格品：$A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3$.

**例 3** 试求事件“张春成绩好而王浩成绩不好”的逆事件.

**解** 设 $A=\{$张春成绩好$\}$，$B=\{$王浩成绩好$\}$，则

$$A\overline{B}=\{\text{张春成绩好而王浩成绩不好}\},$$

因此

$$\overline{A\overline{B}}=\overline{A}\cup\overline{\overline{B}}=\overline{A}\cup B,$$

即事件“张春成绩好而王浩成绩不好”的逆事件为“张春成绩不好或王浩成绩好”.

## 第二节 事件的概率

一次随机试验中，随机事件 $A$ 可能发生也可能不发生．我们希望知道该事件在这次随机试验中发生的可能性，并给出其发生可能性大小的定量描述．这种定量描述就是随机事件的概率.

### 一、概率的统计定义

**定义 1.1** 如果事件 $A$ 在相同条件下重复进行的 $n$ 次试验中出现了 $n_A$ 次，则称

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n} \tag{1.1}$$

**为事件 $A$ 在 $n$ 次重复试验中出现的频率.**

频率具有下列基本性质：

(1) $0 \le f_n(A) \le 1$； (1.2)

(2) $f_n(\Omega)=1$， $f_n(\varnothing)=0$； (1.3)

(3) $f_n(A \cup B)=f_n(A)+f_n(B)-f_n(AB)$； (1.4)

特别地，若 $A$，$B$ 互不相容，则

$$f_n(A \cup B)=f_n(A)+f_n(B)； \tag{1.5}$$

若 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 为两两互不相容的事件，则

$$f_n(\bigcup_{i=1}^{m} A_i)=\sum_{i=1}^{m} f_n(A_i). \tag{1.6}$$

历史上著名统计学家蒲丰(Buffon)和皮尔逊(Pearson)等曾分别进行大量抛掷一枚硬币的试验，其结果如下表：

**表 1-2**

| 实验者 | 掷硬币次数($n$) | 出现正面次数($n_A$) | 出现正面的频率 $f_n(A)$ |
|---|---|---|---|
| 蒲丰 | 4 040 | 2 048 | 0.506 9 |
| 皮尔逊 | 12 000 | 6 019 | 0.501 6 |
| 皮尔逊 | 24 000 | 12 012 | 0.500 5 |
| 维尼 | 30 000 | 14 994 | 0.499 8 |

可见抛掷硬币的试验，出现正面的频率总在 0.5 附近摆动，随着试验次数的不断增加，它逐渐稳定于常数 0.5，该常数 0.5 就反映了正面出现的可能性大小.

**定义 1.2** 设事件 $A$ 在 $n$ 次重复试验中出现的次数为 $n_A$，当试验次数 $n$ 增大时，事件 $A$ 发生的频率 $f_n(A)=\dfrac{n_A}{n}$ 稳定于某个常数 $p$，则称 $p$ 为**事件 $A$ 发生的概率**，记为 $P(A)=p$.

显然，频率的稳定性是概率的经验基础，而频率的稳定值是随机事件的概率. 频率是个试验值，它具有偶然性，可能取多个不同值，它近似地反映了事件发生的可能性大小. 而概率是个理论值，取值惟一，因此只有概率才能精确地反映事件发生的可能性的大小.

由定义 1.2 和频率的有关性质，易知概率具有如下性质：

(1) 对于任一事件 $A$，有 $0 \le P(A) \le 1$；

(2) $P(\Omega)=1$， $P(\varnothing)=0$.

二、等可能概型

**定义 1.3** 设随机试验 $E$，其样本空间 $\Omega$ 满足下列条件：

(1) 样品空间 $\Omega$ 中的样品点总数有限，即试验只产生有限个基本事件，不妨设 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$；

(2) 每个基本事件的发生是等可能的，即

$$P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)=\frac{1}{n}.$$

则称这样的试验 $E$ 为**等可能概型**，也称**古典概型**.

**定义 1.4** 设 $E$ 是只含有 $n$ 个基本事件的古典概型，$A$ 是由 $m$ 个基本事件组成的随机事件，则 $A$ 的概率定义为

$$P(A)=\frac{A\text{中所包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}=\frac{m}{n}. \tag{1.7}$$

根据定义 1.4，计算古典概型事件 $A$ 的概率，必须知道样本空间包含的基本事件总数和事件 $A$ 包含的基本事件数.

**例 1** 从一副扑克牌中随机抽取一张牌，求抽到 $Q$ 的概率.

**解** “从一副扑克牌中随机抽取一张牌”这一随机试验属于等可能概型，其样本空间 $\Omega$ 包含 54 个基本事件.

设“抽到的牌是一张 $Q$”为事件 $A$，则 $A$ 中有 4 个基本事件，所以

$$P(A)=\frac{4}{54}=\frac{2}{27}.$$

**例 2** 掷两颗均匀的骰子，求事件 $A$“点数之和等于 8”的概率.

**解** “掷两颗均匀的骰子”这一试验属于等可能概型，共有 $6^2=36$ 个基本事件. 事件 $A$ 所包含的基本事件是(2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4)，所以

$$P(A)=\frac{5}{36}.$$

有时由于基本事件的总数较大，我们一般采用计算排列数、组合数的方法，分析求解古典概型的概率问题.

**例 3** 有 10 件产品，其中有 2 件次品，无放回地任取 4 件，求：

(1) 这四件产品全是正品的概率；

(2) 这四件产品恰有一件次品的概率；

(3) 这四件产品至少有一件次品的概率.

**解** 设 $A$ 表示“四件产品全是正品”，$B$ 表示“四件产品恰有一件次品”，