高等学校教材

弹性和塑性力学中的有限单元法

（修订本）

浙江大学　丁皓江　何福保　谢贻权　徐　兴　编

GAO DENG XUE XIAO JIAO CAI

机械工业出版社

高 等 学 校 教 材

弹性和塑性力学中的有限单元法

（修 订 本）

浙江大学 丁皓江 何福保 谢贻权 徐 兴 编

机 械 工 业 出 版 社

修订本保持原书的风格和优点，对各章作了必要的调整、精选、补充和改写，有的章节添加了作者近期研究的新成果。全书共十一章，分别论述弹性力学问题，杆、板、壳问题，振动和稳定以及动力学响应问题，几何非线性和材料非线性等问题的有限单元法。本书既适用于机械类力学专业的本科生，也可供一般工科专业的本科生使用。对于工程技术人员也是一本良好的参考书。

弹性和塑性力学中的有限单元法

（修订本）

浙江大学 丁皓江 何福保 谢贻权 徐兴 编

*

责任编辑：孙祥根 版式设计：冉晓华

封面设计：刘代 责任校对：熊天荣

责任印制：王国光

*

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南里一号）

（北京市书刊出版业营业许可证出字第 117 号）

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16·印张 13 3/4·字数 337 千字

1981年 7 月北京第一版

1989 年 11 月北京第二版·1989 年 11 月北京第七次印刷

印数 24,001—26,200·定价：2.80 元

*

ISBN 7-111-01783-8/O·43（课）

前　言

按照1978年4月在天津召开的高等学校一机部对口专业会议，以及同年10月在杭州召开的固体力学专业教材会议上所审订的大纲编写的本书第一版，自1981年出版至今已印刷6次，在这7年多期间中，有限单元法有所发展，也收到了对本书的一些建议，同时结合教学实践和研究中发现的问题，对第一版作修订工作已有必要。根据高等学校工科机电类教材1986～1990年的编审出版规划，以及根据清华大学、西安交通大学和浙江大学三校的固体力学专业有关同志于1986年4月在杭州举行的一次会议的精神，我们从1986年5月便开始进行修订工作。历时两年多完成的修订本，仍保持着原书的风格和优点，又对各章作了必要的调整、精选、补充和改写，有的章节添加了作者近期研究成果。例如，全书多数章节采用以能量原理为基础来叙述有限单元法；在第二章中补充了"子结构"一节；将原第三、第四两章删并成第三章，另补充了"非轴对称载荷问题"一节；在第四章中补充了平面4～8结点单元和空间8～20结点单元的内容，还增加了"具有内自由度的单元"一节；第五章的坐标变换部分已改写得更便于应用；第六章和第七章的第三节分别更换成"通用单元"和"旋转壳单元"；将原第九、第十两章的内容作了变动、调整和补充，现改为第八章论述特征值问题，包括了结构振动和稳定两部分内容，而将结构的动力响应单独成章，在第九章中叙述；第十章补充了"非线性问题简述"一节；等等。

本书既适用于机械类力学专业的本科生使用，也可供一般工科专业的本科生使用，还可作为工程技术人员的参考书。

书中第一、二、三章由浙江大学谢贻权教授编写，第四、六、七章由浙江大学丁皓江教授编写，第五、十、十一章由上海工业大学何福保教授编写，第八、九章由浙江大学徐兴教授编写，此次修订工作由丁皓江教授负责组织和统稿。主审人西安交通大学嵇醒教授，对各章节的修改都作了分析和评价，进行了详细地审阅，在此表示感谢。

修订本仍难免有不妥甚至错误之处，望专家和读者继续给予批评指正。

目 录

第一章 绪 论

有限单元法是利用电子计算机的一种数值分析方法。它在工程技术领域中的应用十分广泛。几乎所有的弹塑性结构静力学和动力学问题都可用它求得满意的数值结果。虽然这一方法起源于结构分析，但是由于它所依据的理论的普遍性，已经被推广应用于其他领域中的许多场问题。

§1-1 引 言

在工程技术领域中，有许多力学问题或场问题，虽然人们已经得到了它们的基本方程和边界条件，但是能用解析方法去求解的只是少数方程性质比较简单、边界规则的问题，而绝大多数工程技术问题很少有解析解。这类问题的解决通常有两种途径：一种是引入简化假设，使达到能用解析法求解的地步，求得问题在简化状态下的近似解，这种方法并不总是可行的，通常将导致不正确甚至错误的解答。另一种途径是保留问题的复杂性，利用数值计算方法求得问题的近似数值解。随着电子计算机的飞速发展和广泛使用，已逐步趋向于采用这种方法来解复杂的工程实际问题，而有限单元法便是这方面的一个比较新颖并且十分有效的数值方法。

有限单元法在50年代起源于航空工程中飞机结构的矩阵分析。结构矩阵分析认为一个结构可以看作是由有限个力学小单元互相连结而组成的集合体；表征单元力学特性的刚度矩阵可以比喻作建筑物中的砖瓦，装配在一起就能提供整个结构的力学特性。

这种处理问题的思路，在1960年被推广用来求解弹性力学的平面应力问题，并且开始采用"有限单元法"这个术语。应用有限单元法求解任意的连续体时，应把连续的求解区域分割成有限个单元，并在每个单元上指定有限个结点，一般可以认为相邻单元在结点上连结构成一组单元的集合体，用以模拟或逼近求解区域进行分析。同时选定场函数的结点值，例如取结点位移作为基本未知量；并对于每个单元根据分块近似的思想，假设一个简单的函数（称为插值函数），近似地表示其位移的分布规律；再利用弹塑性理论中的变分原理或其他方法，建立单元结点的力和位移之间的力学特性关系，得到一组以结点位移为未知量的代数方程组，从而求解结点的位移分量。一经解出，就可以利用插值函数确定单元集合体上的场函数。显然，如果单元满足问题的收敛性要求，那末随着缩小单元的尺寸，增加求解区域内单元的数目，解的近似程度将不断改进，近似解最终将收敛于精确解。

有限单元法具有许多优点，其中主要有：

（1）概念浅显，容易掌握，可以在不同的水平上建立起对该法的理解：可以通过非常直观的物理解释来理解，也可以建立基于严格的数学分析的理论。

（2）该法有很强的适用性，应用范围极为广泛。它不仅能成功地处理如应力分析中的非均质材料、各向异性材料、非线性应力-应变关系以及复杂边界条件等难题，而且随着其理论基础和方法的逐步改进和　　　还成功地用来求解，如热传导、流体力学以及电磁场等

领域的问题。几乎适用于求解所有的连续介质和场问题。

（3）该法采用矩阵形式表达，便于编制计算机程序，可以充分利用高速电子计算机所提供的方便。因而，有限单元法已被公认为工程分析的有效工具，受到普遍的重视。

采用有限单元法求解应力分析问题，并不是一定要取结点位移作为基本未知量，也可以取结点内力作为未知量，因而，随着所取未知量的不同，有所谓位移法、力法、杂交法和混合法之分。本书采用最为普遍的位移法，介绍弹性和塑性力学中有限单元法的基本理论和方法。

§1-2 简　　例

在讨论连续体问题之前，我们先来考察一个简单的例子。例如图1-1为一个由两根杆件构成的桁架。杆件的截面积都为A，弹性模量为E，长度分别为l_1和l_2，桁架在铰链处分别受到外力F_{x1}、F_{y1}、F_{x2}、F_{y2}、F_{x3}、F_{y3}。设取每根杆件作为一个单元，各杆端部的铰链作为结点。现在来建立单元1的结点力和结点位移的关系式。图1-1b中F^1_{x1}、F^1_{y1}、F^1_{x2}、F^1_{y2}分别为结点1、2施于单元1的结点力沿坐标轴x和y方向的分量；u^1_1、v^1_1、u^1_2、v^1_2分别为结点1、2的位移沿坐标轴x和y方向的分量。这里上标表示单元的号码，下标表示结点的号码。

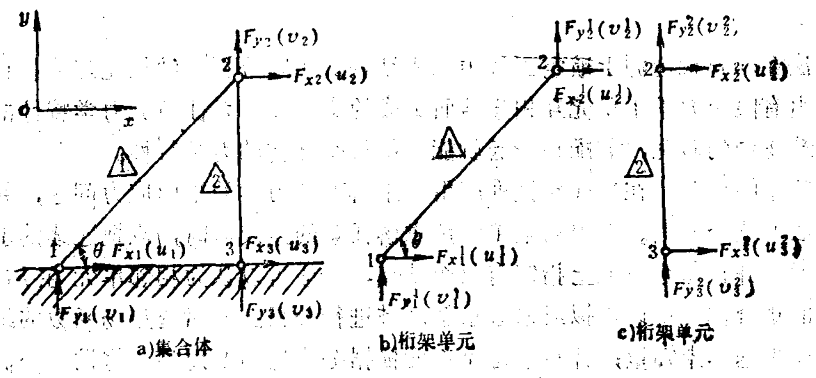

图1-1　铰接桁架

因为杆件在结点处是铰接的，不存在力矩。每个结点的力和位移各有两个分量，即每个结点具有两个自由度，全单元共有四个自由度，因此需要用以下四个方程表描述它的力—位移关系。

$$
\left.
\begin{aligned}
F^1_{x1} &= k_{11}u^1_1 + k_{12}v^1_1 + k_{13}u^1_2 + k_{14}v^1_2 \\
F^1_{y1} &= k_{21}u^1_1 + k_{22}v^1_1 + k_{23}u^1_2 + k_{24}v^1_2 \\
F^1_{x2} &= k_{31}u^1_1 + k_{32}v^1_1 + k_{33}u^1_2 + k_{34}v^1_2 \\
F^1_{y2} &= k_{41}u^1_1 + k_{42}v^1_1 + k_{43}u^1_2 + k_{44}v^1_2
\end{aligned}
\right\} \qquad (1\text{-}1)
$$

……

采用矩阵记号写成

$$\begin{Bmatrix} F_{x1}^1 \\ F_{y1}^1 \\ F_{x2}^1 \\ F_{y2}^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ v_1^1 \\ u_2^1 \\ v_2^1 \end{Bmatrix} \tag{1-2}$$

或简记作

$$\{F\}^1 = [k]^1\{\delta\}^1 \tag{1-3}$$

式中 $\{\delta\}^1 = [u_1^1 \quad v_1^1 \quad u_2^1 \quad v_2^1]^T$称为单元1的结点位移列阵；$\{F\}^1 = [F_{x1}^1 \quad F_{y1}^1 \quad F_{x2}^1 \quad F_{y2}^1]^T$称为单元1的结点力列阵；$[k^1]$称为单元1的刚度矩阵，它的元素$k_{11}$、$k_{12}$、$k_{13}$、…$k_{44}$称为刚度系数。

刚度系数的物理意义可以说明如下。若在式（1-1）中令

$$u_1^1 = 1$$

$$v_1^1 = u_2^1 = v_2^1 = 0$$

则得 $F_{x1}^1 = k_{11} \quad F_{y1}^1 = k_{21} \quad F_{x2}^1 = k_{31} \quad F_{y2}^1 = k_{41}$

如图1-2所示，它们表明：当结点1沿x方向产生一单位位移，而单元1的所有其余结点位移都等于零时，各结点施于单元1上的力，将组成一个平衡力系，表示单元1抵抗位移u_1^1的刚度，这些力的值很容易根据材料力学求得：当位移$u_1^1 = 1$，其余结点位移都等于零时，单元的长度将缩短$\Delta l_1 = \cos\theta$，于是需要轴向压力为$\left(\frac{EA}{l_1}\right)\Delta l_1 = EA\cos\theta/l_1$；这就是结点1作用于单元1上的力，它在$x$和$y$方向的分量分别是

$$k_{11} = \frac{EA}{l_1}\cos^2\theta$$

$$k_{21} = \frac{EA}{l_1}\cos\theta\sin\theta$$

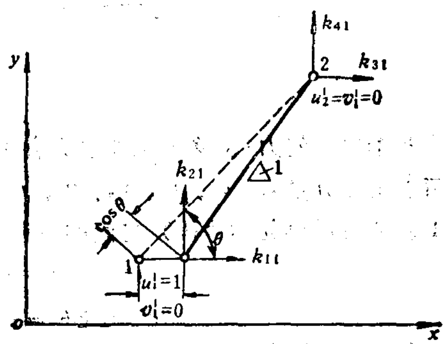

图1-2 $u_1^1 = 1$，$v_1^1 = u_2^1 = v_2^1 = 0$ 状态下的单元1

对于结点2作用于单元1上的力，它的大小与之相等而方向相反，即

$$k_{31} = -\frac{EA}{l_1}\cos^2\theta \qquad k_{41} = -\frac{EA}{l_1}\cos\theta\sin\theta$$

继续对位移v_1^1、u_2^1、v_2^1作类似的分析，便可得到$[k]^1$中其他各列的元素。将所有的结果汇集一起，得到

$$\begin{Bmatrix} F_{x1}^1 \\ F_{y1}^1 \\ F_{x2}^1 \\ F_{y2}^1 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l_1} \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta & -\cos^2\theta & -\cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta & -\sin^2\theta \\ -\cos^2\theta & -\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ -\cos\theta\sin\theta & -\sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ v_1^1 \\ u_2^1 \\ v_2^1 \end{Bmatrix}$$

可见式（1-3）中，单元1的刚度矩阵是

$$[k]^1=\frac{EA}{l_1}\begin{bmatrix}\cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta & -\cos^2\theta & -\cos\theta\sin\theta\\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta & -\sin^2\theta\\ -\cos^2\theta & -\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta\\ -\cos\theta\sin\theta & -\sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta\end{bmatrix} \tag{1-4}$$

同理，可以求得作用于单元 2 的结点力和位移之间的关系式如下

$$\begin{Bmatrix}F_{x2}^2\\ F_{y2}^2\\ F_{x3}^2\\ F_{y3}^2\end{Bmatrix}=\frac{EA}{l_2}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_2^2\\ v_2^2\\ u_3^2\\ v_3^2\end{Bmatrix}$$

于是单元 2 的刚度矩阵是

$$[k]^2=\frac{EA}{l_2}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{1-5}$$

将两个单元的力-位移关系加以集合可得到结构的力-位移关 系。为此，引进图1-1中结构的结点位移分量u_1、v_1、u_2、v_2、u_3、v_3和单元 结 点 位移分 量u_1^i、v_1^i、u_2^i、v_2^i（其 中 上标 $i=1$ 或 2 表示单元的号码）之间的协调关系如下

$$u_1=u_1^1 \qquad v_1=v_1^1$$

$$u_2=u_2^1=u_2^2 \quad v_2=v_2^1=v_2^2 \quad u_3=u_3^2 \quad v_3=v_3^2$$

又根据各结点的平衡条件，要求作用在各结点上的载荷，应等于围绕该结点的各单元受到的结点力之和，即

$$F_{x1}=F_{x1}^1=\frac{EA}{l_1}(\cos^2\theta u_1+\cos\theta\sin\theta v_1-\cos^2\theta u_2-\cos\theta\sin\theta v_2)$$

$$F_{y1}=F_{y1}^1=\frac{EA}{l_1}(\cos\theta\sin\theta u_1+\sin^2\theta v_1-\cos\theta\sin\theta u_2-\sin^2\theta v_2)$$

$$F_{x2}=F_{x2}^1+F_{x2}^2=\frac{EA}{l_1}(-\cos^2\theta u_1-\cos\theta\sin\theta v_1+\cos^2\theta u_2+\cos\theta\sin\theta v_2)$$

$$F_{y2}=F_{y2}^1+F_{y2}^2=\frac{EA}{l_1}(-\cos\theta\sin\theta u_1-\sin^2\theta v_1+\cos\theta\sin\theta u_2+\sin^2\theta v_2)+\frac{EA}{l_2}(v_2-v_3)$$

$$F_{x3}=F_{x3}^2=0$$

$$F_{y3}=F_{x3}^2=\frac{EA}{l_2}(-v_2+v_3)$$

这些方程就是结构的力-位移关系式，写成矩阵形式，有

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{Bmatrix} = EA \begin{bmatrix} \cos^2\theta/l_1 & \cos\theta\sin\theta/l_1 & -\cos^2\theta/l_1 & -\cos\theta\sin\theta/l_1 & 0 & 0 \\ \cos\theta\sin\theta/l_1 & \sin^2\theta/l_1 & -\cos\theta\sin\theta/l_1 & -\sin^2\theta/l_1 & 0 & 0 \\ -\cos^2\theta/l_1 & -\cos\theta\sin\theta/l_1 & \cos^2\theta/l_1 & \cos\theta\sin\theta/l_1 & 0 & 0 \\ -\cos\theta\sin\theta/l_1 & -\sin^2\theta/l_1 & \cos\theta\sin\theta/l_1 & \sin^2\theta/l_1+1/l_2 & 0 & -1/l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/l_2 & 0 & 1/l_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \tag{1-6}$$

或简写成

$$\{F\} = [K]\{\delta\} \tag{1-7}$$

这就是有限单元法所要建立的基本方程组。式中$\{F\}$为作用在结点上的载荷所组成的列阵，称为载荷列阵；$\{\delta\}$是由基本未知量结点位移所组成的列阵；矩阵$[K]$称为结构的整体刚度矩阵，由式(1-6)可知

$$[K] = EA \begin{bmatrix} \cos^2\theta/l_1 & \cos\theta\sin\theta/l_1 & -\cos^2\theta/l_1 & -\cos\theta\sin\theta/l_1 & 0 & 0 \\ \cos\theta\sin\theta/l_1 & \sin^2\theta/l_1 & -\cos\theta\sin\theta/l_1 & -\sin^2\theta/l_1 & 0 & 0 \\ -\cos^2\theta/l_1 & -\cos\theta\sin\theta/l_1 & \cos^2\theta/l_1 & \cos\theta\sin\theta/l_1 & 0 & 0 \\ -\cos\theta\sin\theta/l_1 & -\sin^2\theta/l_1 & \cos\theta\sin\theta/l_1 & \sin^2\theta+1/l_2 & 0 & -1/l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/l_2 & 0 & -1/l_2 \end{bmatrix} \tag{1-8}$$

整体刚度矩阵的建立是用有限单元法解题的核心内容。整体刚度矩阵由单元的刚度矩阵叠加组成。观察式(1-8)可以看出，其中左上方虚线划出的正是单元1的刚度矩阵，右下方虚线划出的正是单元2的刚度矩阵，而两个长方形重叠部分中的元素，是同位置上两个单元刚度矩阵的元素之和。因而，要建立整体刚度矩阵，先要分析单元的特性，求出单元的刚度矩阵。

结构的整体刚度矩阵具有许多特性。首先，根据马克斯威尔互换定理可以证明，它是一个对称矩阵。又对角线上的主元素k_{ii}总是正的，否则作用力的方向，将与它引起的对应位移的方向相反。再根据行列式的性质可知，矩阵$[K]$的对应行列式的值等于零，所以它是奇异的。此时，方程组(1-6)还不能立即用来解结点位移，其原因是结构的几何约束尚未设置，可以有刚体位移。只有加上几何边界条件，排除刚体位移，刚度矩阵作相应的修改后，才能解出全部位移分量。

上述简例说明了刚度矩阵的物理意义和性质，以及从单元刚度矩阵集合成整体刚度矩阵的概念。这些性质带有普遍性，可以推广到连续体问题中去，将在第二章中进一步加以讨论。

§1-3 有限单元法分析过程的概述

通过上节的简单例子，我们介绍了有限单元法的一个粗略概貌。现在再把该法的分析过程叙述于下，以便利学习和理解以后各章的内容。

有限单元法的分析过程，概括起来可以分为以下六个步骤：

1. 结构的离散化 结构的离散化是有限单元法分析的第一步，它是有限单元法的基本概念。所谓离散化简单地说，就是将要分析的结构物分割成有限个单元体，并在单元体的指定点设置结点，使相邻单元的有关参数具有一定的连续性，并构成一个单元的集合体，以它代替原来的结构。如果分析的对象是上节所举的桁架，那末这种划分十分明显，可以取每根杆件作为一个单元，因为桁架本来就是由杆件组成的。但如果分析的对象是连续体，那末为了有效地逼近实际的连续体，就需要考虑选择单元的形状和分割方案以及确定单元和结点的数目等问题。有关这方面的具体讨论，将在§2-8中讨论。

2. 选择位移模式 在完成结构的离散之后，就可以对典型单元进行特性分析。此时，为了能用结点位移表示单元体的位移、应变和应力，在分析连续体问题时，必须对单元中位移的分布作出一定的假定，也就是假定位移是坐标的某种简单的函数，这种函数称为位移模式或插值函数。

选择适当的位移函数是有限单元法分析中的关键。通常选择多项式作为位移模式。其原因是因为多项式的数学运算（微分和积分）比较方便，并且由于所有光滑函数的局部，都可以用多项式逼近。至于多项式的项数和阶次的选择，则要考虑到单元的自由度和解的收敛性要求。一般来说，多项式的项数应等于单元的自由度数，它的阶次应包含常数项和线性项等。详见§2-7。这里所谓单元的自由度是指单元结点独立位移的个数。

根据所选定的位移模式，就可以导出用结点位移表示单元内任一点位移的关系式，其矩阵形式是

$$\{f\}=[N]\{\delta\}^e \tag{1-9}$$

式中 $\{f\}$——单元内任一点的位移列阵；

$\{\delta\}^e$——单元的结点位移列阵；

$[N]$——形函数矩阵，它的元素是位置坐标的函数。

在此，我们顺便指出：有限单元法比起经典的近似法具有明显的优越性。例如，在经典的里兹法中，要求选取一个函数来近似地描述整个求解区域中的位移，并须满足边界条件；而在有限单元法中则采用分块近似，只需对一个单元选择一个近似位移函数。此时，不必考虑位移边界条件，只须考虑单元之间位移的连续性就可以了。这样做当然比起在整个区域中选取一个连续函数要简单得多，特别是对于复杂的几何形状或者材料性质、作用载荷有突变的结构，采用分段函数，就显得更是合理和适宜了。

3. 分析单元的力学特性 位移模式选定以后，就可以进行单元的力学特性的分析，包括下面三部分内容：

（1）利用几何方程，由位移表达式（1-9）导出用结点位移表示单元应变的关系式

$$\{\varepsilon\}=[B]\{\delta\}^e \tag{1-10}$$

式中 $\{\varepsilon\}$——单元内任一点的应变列阵；

$[B]$——单元应变矩阵。

（2）利用本构方程，由应变的表达式（1-10）导出用结点位移表示单元应力的关系式

$$\{\sigma\}=[D][B]\{\delta\}^e \tag{1-11}$$

式中 $\{\sigma\}$——单元内任一点的应力列阵；

$[D]$——与单元材料有关的弹性矩阵。

（3）利用变分原理，建立作用于单元上的结点力和结点位移之间的关系式，即单元的平衡方程

$$\{F\}^e=[k]^e\{\delta\}^e \tag{1-12}$$

式中，$[k]^e$称为单元刚度矩阵，在以后将导得

$$[k]^e=\iiint[B]^T[D][B]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{1-13}$$

上式的积分应遍及整个单元的体积。

利用变分原理还同时导得等效结点力$\{F\}^e$。

在以上三项中，导出单元刚度矩阵是单元特性分析的核心内容。

4．集合所有单元的平衡方程，建立整个结构的平衡方程 这个集合过程包括有两方面的内容：一是将各个单元的刚度矩阵，集合成整个物体的整体刚度矩阵；二是将作用于各单元的等效结点力列阵，集合成总的载荷列阵。最常用的集合刚度矩阵的方法是直接刚度法。一般来说，集合所依据的理由是要求所有相邻的单元在公共结点处的位移相等。于是得到以整体刚度矩阵$[K]$、载荷列阵$[F]$以及整个物体的结点位移列阵$\{\delta\}$表示的整个结构的平衡方程

$$[K]\{\delta\}=\{F\} \tag{1-14}$$

这些方程还应考虑几何边界条件作适当的修改之后，才能够解出所有的未知结点位移。

5．求解未知结点位移和计算单元应力 由集合起来的平衡方程组（1-14）解出未知位移。在线性平衡问题中，可以根据方程组的具体特点选择合适的计算方法。

最后，就可利用公式（1-11）和已求出的结点位移计算各单元的应力，并加以整理得出所要求的结果。

第二章　平　面　问　题

本章介绍弹性力学平面问题的有限单元法。通过最简单的三角形常应变单元，阐明有限单元法用于弹性体应力分析的基本原理和方法。包括弹性体的离散化、单元特性的分析、刚度矩阵的建立、等效结点力的计算、解答的收敛性，以及实施步骤和注意事项等。同时对形函数和面积坐标的性质也作了简要的叙述。

本章还介绍了一个常用的八个自由度的矩形单元。

§2-1　三角形常应变单元

一、离散化

用有限单元法分析弹性力学平面问题，第一步就是把原来连续的弹性体离散化。假设我们采用最简单、最常用的三角形单元，把弹性体分割为有限个互不重叠的三角形，并指定三角形的顶点为结点，构成一个单元集合体，代替原来的弹性体（图2-1）。此时，弹性体的曲线边界为若干段直线所替代，随着单元的增多，这种拟合将趋为精确。然后，对所有单元和结点从1开始按序加以编号。

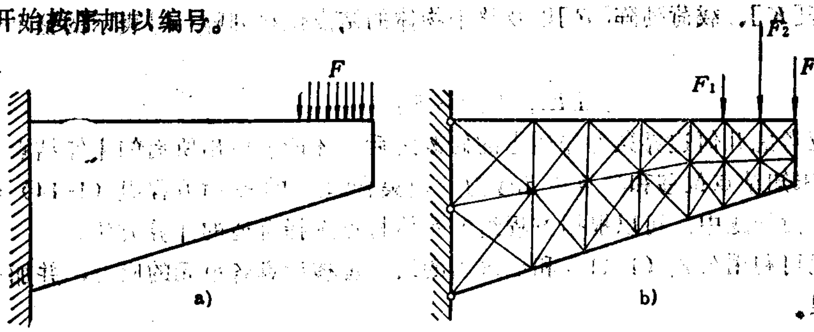

图2-1　弹性体和有限单元模型

同时，把所有作用在单元上的载荷，包括集中载荷、表面载荷和体积载荷都移置到结点上，化成为静力等效结点载荷。这样就得到了有限单元法的计算模型，随后便可进行单元的特性分析。

二、位移

首先，建立以单元结点位移表示单元内任一点位移的关系式。图2-2中表示一个典型三角形单元，其结点 i 、j 、m 按逆时针方向排列。每个结点位移在单元平面内有两个分量，整个单元将有六个结点位移分量，可用列阵表示为

$$\{\delta\}^e=[\delta_i^T\ \ \delta_j^T\ \ \delta_m^T]^T=[u_i\ \ v_i\ \ u_j\ \ v_j\ \ u_m\ \ v_m]^T \tag{2-1}$$

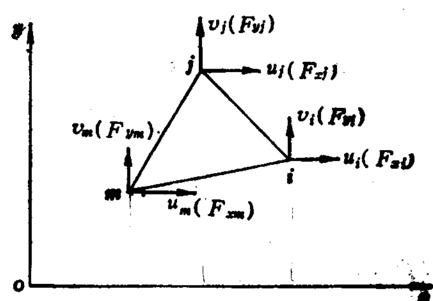

图2-2　三角形单元的结点位移和结点力

其中子矩阵

$$\{\delta_i\} = [u_i \quad v_i]^T \qquad (i, j, m)㊀ \tag{2-2}$$

式中 u_i、v_i——结点 i 的位移，沿 x 轴和 y 轴方向的分量。

由于单元体本身也是一个二维的弹性体，单元内各点的位移分量是坐标 x、y 的函数，在进行有限元分析时，为了要用结点位移作为基本未知量，使能用单元结点位移表示单元内任意点的位移、变形和应力，需要假定一个位移模式。这里，我们选择最简单的线性函数作为位移模式，即

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \qquad v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \tag{2-3}$$

式中 α_1、α_2、$\cdots\alpha_6$——待定常数称为广义坐标，可以由单元的六个结点位移来确定。

设结点 i、j、m 的坐标分别为 (x_i, y_i)、(x_j, y_j)、(x_m, y_m)，将它们代入式(2-3)，得

$$\begin{aligned} u_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \qquad & v_i &= \alpha_4 + \alpha_5 x_i + \alpha_6 y_i \\ u_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \qquad & v_j &= \alpha_4 + \alpha_5 x_j + \alpha_6 y_j \\ u_m &= \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m \qquad & v_m &= \alpha_4 + \alpha_5 x_m + \alpha_6 y_m \end{aligned}$$

联立解上列左边的三个方程，可得

$$\alpha_1 = \frac{1}{2\Delta}\begin{vmatrix} u_i & x_i & y_i \\ u_j & x_j & y_j \\ u_m & x_m & y_m \end{vmatrix} \qquad \alpha_2 = \frac{1}{2\Delta}\begin{vmatrix} 1 & u_i & y_i \\ 1 & u_j & y_j \\ 1 & u_m & y_m \end{vmatrix} \qquad \alpha_3 = \frac{1}{2\Delta}\begin{vmatrix} 1 & x_i & u_i \\ 1 & x_j & u_j \\ 1 & x_m & u_m \end{vmatrix} \tag{2-4}$$

式中

$$2\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} \tag{2-5}$$

从解析几何知，式(2-5)中的Δ等于三角形ijm的面积。为了使求得面积的值不致成为负值，结点 i、j、m 的次序必须是逆时针转向，如图2-2中所示。

将式(2-4)代入式(2-3)的第一式，稍加整理，得到

$$u = \frac{1}{2\Delta}[(a_i + b_i x + c_i y)u_i + (a_j + b_j x + c_j y)u_j + (a_m + b_m x + c_m y)u_m] \tag{2-6}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} a_i &= \begin{vmatrix} x_j & y_j \\ x_m & y_m \end{vmatrix} = x_j y_m - x_m y_j \\ b_i &= -\begin{vmatrix} 1 & y_j \\ 1 & y_m \end{vmatrix} = y_j - y_m \\ c_i &= \begin{vmatrix} 1 & x_j \\ 1 & x_m \end{vmatrix} = -(x_j - x_m) \end{aligned}\right\} (i, j, m) \tag{2-7}$$

同理得到

$$v = \frac{1}{2\Delta}[(a_i + b_i x + c_i y)v_i + (a_j + b_j x + c_j y)v_j + (a_m + b_m x + c_m y)v_m] \tag{2-8}$$

㊀ 符号 (i, j, m) 表明其他结点的位移分量 u_j、v_j、u_m、v_m 可以按下标 i、j、m 的轮换得到。以后将经常采用这种记号。

如令

$$N_i=\frac{1}{2\Delta}(a_i+b_ix+c_iy)\qquad(i,\ j,\ m)\tag{2-9}$$

位移模式(2-6)、(2-8)就可以写成

$$u=N_iu_i+N_ju_j+N_mu_m\qquad v=N_iv_i+N_jv_j+N_mv_m\tag{2-10}$$

式中　N_i、N_j、N_m——坐标的函数，它们反映单元的位移状态，因而称为形函数。

式(2-10)可用矩阵形式表达为

$$\{f\}=[N]\{\delta\}^e\tag{2-11}$$

式中的$[N]$称为形函数矩阵，可写成分块形式

$$[N]=[N_i\quad N_j\quad N_m]\tag{2-12}$$

其中子矩阵

$$[N_i]=\begin{bmatrix}N_i & 0\\ 0 & N_i\end{bmatrix}=N_iI\quad(i,\ j,\ m)\tag{2-13}$$

式中　I——二阶单位阵；

$\{f\}=[u\quad v]^T$——单元位移函数列阵；

$\{\delta\}^e$——式(2-1)定义的单元结点位移列阵。

根据位移函数式(2-6)、(2-8)，在单元的边界上位移是线性变化的，两个相邻的单元在其公共结点上具有相同的结点位移，因而在它们的公共边界上，两个单元将具有相同的位移，也就是说所选的位移函数保证了两相邻单元之间位移的连续性（证明参阅下节）。

三、单元应变

有了单元的位移模式，就可利用平面问题的几何方程

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{Bmatrix}$$

求得应变分量。将式(2-6)、(2-8)代入上式即得

$$\{\varepsilon\}=\frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix}b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0\\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m\\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m\end{bmatrix}\{\delta\}^e$$

或简写成

$$\{\varepsilon\}=[B]\{\delta\}^e\tag{2-14}$$

式中　$[B]$可写成分块形式

$$[B]=[B_i\quad B_j\quad B_m]\tag{2-15}$$

而子矩阵

$$\frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}\frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix}$$

$$[B_i]=\frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix} \quad (i,\ j,\ m) \tag{2-16}$$

公式（2-14）是用结点位移表示单元应变的矩阵方程，矩阵$[B]$就是单元应变矩阵。由于Δ和b_i、b_j、b_m、c_i、c_j、c_m等都是常量，所以矩阵$[B]$中的元素都是常量，因而单元中任一点的应变分量ε_x、ε_y、γ_{xy}也都是常量，故通常称这种单元为常应变单元。

四、单元应力

在得到应变之后，再利用本构方程

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\}$$

便可导出以结点位移表示应力的关系式。把式（2-14）代入上式，得到

$$\{\sigma\}=[D][B]\{\delta\}^e \tag{2-17}$$

令

$$[S]=[D][B] \tag{2-18}$$

则式（2-17）写成

$$\{\sigma\}=[S]\{\delta\}^e \tag{2-19}$$

这就是应力与结点位移的关系式，其中$[S]$称为应力矩阵，可写成分块形式

$$[S]=[D][B_i\quad B_j\quad B_m]=[S_i\quad S_j\quad S_m] \tag{2-20}$$

对于平面应力问题，矩阵$[D]$取附录中的式（Ⅰ-13），$[S]$的子矩阵可以写成：

$$[S_i]=[D][B_i]=\frac{E}{2(1-\mu^2)\Delta}\begin{bmatrix} b_i & \mu c_i \\ \mu b_i & c_i \\ \frac{1-\mu}{2}c_i & \frac{1-\mu}{2}b_i \end{bmatrix} \quad (i,\ j,\ m) \tag{2-21}$$

对于平面应变问题，只要将上式中的E换成$E/(1-\mu^2)$，μ换成$\mu/(1-\mu)$，便得到

$$[S_i]=[D][B_i]=\frac{E(1-\mu)}{2(1+\mu)(1-2\mu)\Delta}\begin{bmatrix} b_i & \frac{\mu}{1-\mu}c_i \\ \frac{\mu}{1-\mu}b_i & c_i \\ \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}c_i & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}b_i \end{bmatrix} \quad (i,\ j,\ m) \tag{2-22}$$

如果注意到式（2-1），则式（2-19）可写成下列形式

$$\{\sigma\}=[S_i]\{\delta_i\}+[S_j]\{\delta_j\}+[S_m]\{\delta_m\} \tag{2-23}$$

从式（2-21）、（2-22）可以看出，$[S]$中的元素也都是常量，所以每个单元中的应力分量是常量，但不同的单元将具有不同的应力和应变。这样，越过公共边界，从一个单元到另一个与它相邻的单元，应力和应变的值都将有突变，但是位移是连续的。上述常应变单元的这些性质，实际上都是由所选取的线性位移模式所造成。