21世纪大学数学精品教材

丛书主编 蔡光兴 戴明强

复变函数与积分变换

刘子瑞 梅家斌 主编

科学出版社
www.sciencep.com

·21世纪大学数学精品教材·

复变函数与积分变换

刘子瑞　梅家斌　主编

科 学 出 版 社
北　京

内 容 简 介

《21世纪大学数学精品教材》为大学本科（本科1普通类和本科2一类）数学系列教材，体现了对数学精品的归纳及本套教材的精品特征，具有鲜明的特点，按照统一的指导思想组编而成.

本书严格遵循高等院校教学指导委员会关于复变函数与积分变换课程的教学基本要求，知识体系相对完整，结构严谨，内容精炼，循序渐进，推理简明，通俗易懂，例题丰富。全书分为二篇：第一篇为复变函数；第二篇为积分变换．每章后均列出了重要概念的英文词汇，配备了习题，并提供了参考答案或提示。

本书可作为高等院校非数学专业本专科学生的复变函数与积分变换课程教材，也可供相关教研人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

复变函数与积分变换/刘子瑞，梅家斌主编．一北京：科学出版社，2007
（21世纪大学数学精品教材）
ISBN 978-7-03-018446-7

Ⅰ.复… Ⅱ.①刘…②梅… Ⅲ.①复变函数－高等学校－教材②积分变换－高等学校－教材 Ⅳ.O174.5 O177.6

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第005631号

责任编辑：冯贵层／责任校对：梅 莹
责任印制：高 嵘／封面设计：宝 典

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
湖北新华印务有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2007年2月第一版 开本：B5（720×1000）
2007年2月第一次印刷 印张：18 1/2
印数：1—5 000 字数：347 000

定价：26.80元

《21世纪大学数学精品教材》丛书序

《21世纪大学数学精品教材》为大学本科（本科1普通类和本科2一类）数学系列教材，体现了对数学精品的归纳及本套教材的精品特征.

一、组编机构

丛书设组编委员会，编委由12所高校数学院系的负责人构成（按姓氏笔画）：

王公宝　方承胜　江志宏　李逢高　何　穗　张志军　时　宝　杨鹏飞
周　勇　欧贵兵　罗从文　高明成　殷志祥　黄朝炎　蔡光兴　戴明强

丛书主编：

蔡光兴　戴明强

二、编写特点

1. 适用性

教材的适用性是教材的生命力所在，每本教材的篇幅结合绝大部分高等院校数学院系对课程学时数的要求.部分教材配有教学光盘，便于教学.

2. 先进性

把握教改、课改动态和学科发展前沿，反映学科、课程的先进理念、知识和方法.

3. 创新性

市场需求和市场变化决定教材创新需要，数学教学在知识创新、思维创新等方面负有责任，一定程度的创新使教材更具冲击力和影响力.

创新与继承相结合，是继承基础上的创新.

创新转变为参编者、授课者的思想和行为，达到文化融合.

4. 应用性

丛书的读者对象为应用型和研究应用型大学本科（本科1普通类和本科2一类）学生，应用性是数学学科和数学教学发展的新特点，或展现在教材内容结构上，或体现于某些章节，或贯穿于其中.

5. 教学实践性和系统性

教材具有可操作性，教师好教，学生好学，同时保持知识完整.二者发生矛盾时，前者优先，不过分追求体系完整.

三、指导思想

《21世纪大学数学精品教材》大致可划分为两大类：基础知识类；方法与应用类.

1. 基础知识类

(1) 遵循高等院校教学指导委员会关于课程的教学基本要求，知识体系相对完整，结构严谨，内容精炼，循序渐进，推理简明，通俗易懂.

(2) 融入现代数学思想(如数学建模)，分别将 Mathematica、Matlab、SAS、SPS 等软件的计算方法，恰当地融入课程教学内容中，培养学生运用数学软件的能力.

(3) 强化学生的实验训练和动手能力，可将实验训练作为模块，列入附录，供教学选用或学生自学自练，使用者取舍也方便.

(4) 教材章后均列出重要概念的英文词汇，布置若干道英文习题，要求学生用英文求解，以适应教育面向世界的需要，也为双语教学打下基础.

(5) 为使学生巩固知识和提高应用能力，章末列出习题，形式多样. 书后配测试题，书末提供解题思路或参考答案.

2. 方法与应用类

(1) 融入现代数学思想和方法(如数学建模思想)，体现现代数学创新思维，着力培养学生运用现代数学工具(软件)的能力，使教材真正成为基于现代数学软件的、将数学软件融合到教材与教学内容的现代精品教材.

(2) 加强教学知识与内容的应用性，注重数学思想和方法的操作与应用及其实用性. 通过实例、训练、实验等各种方式，提高学生对数学知识、数学方法的应用能力及解决问题的能力.

(3) 强化学生的实验训练，通过完整的程序与实例介绍，教会学生分析问题、动手编程、分析结果，提高学生的实验操作水平、实际动手能力和创新能力.

(4) 教材章后均列出重要概念的英文词汇，布置若干道英文习题，要求学生用英文求解，以适应教育面向世界的需要，也为双语教学打下基础.

(5) 为使学生巩固知识和提高应用能力，章末列出习题，形式多样. 书后配测试题，书末提供解题思路或参考答案.

《21世纪大学数学精品教材》组编委员会

2006年9月

前　　言

复变函数与积分变换课程是工科大学生的一门重要基础理论课．为帮助学生学好此课程，数学教育工作者编著了许多教材以及各种辅导书．特别是随着近年来高等教育改革力度的加大，大学数学教学课时的削减以及大学生考研热的掀起，各类教材脱颖而出，争奇斗妍．为了能提供一本既能集中各类教材的优点，又能与当今教学学时数及教学基本要求比较吻合、篇幅适中的教材，特编写本书．

本书共分二篇：第一篇复变函数涵盖了复变函数的基本概念，解析函数，复变函数的积分、级数、留数、保角映射等基本内容；第二篇积分变换介绍傅里叶积分变换和拉普拉斯积分变换．本书有以下有别于其他教材的鲜明特点：

（1）习题类型丰富．各章习题均含填空题、选择题、计算题以及证明题．

（2）各章配有重要概念英语词汇和英文习题．

（3）书后附录给出了各部分内容的数学实验．

（4）附三套自测题，方便读者检查自己的学习情况．

本书可作为高等院校工科各专业的复变函数与积分变换课程教材，也可供教研工作者参考．

本书由刘子瑞、梅家斌主编，马德明、方瑛任副主编．参加本书编写工作的有：海军工程大学刘子瑞、徐忠昌、周本虎，武汉科技学院梅家斌，湖北工业大学方瑛，空军雷达学院马德明．

限于编者水平，教材中不妥之处难免，恳请读者不吝指正．

编　者

2006年10月

目　　录

第一篇　复变函数

第二篇 积分变换

第一篇　复变函数

自变量为实数的函数称为实变函数，自变量为复数的函数称为复变函数. 从映射的观点看，实变函数是实数到实数的映射，复变函数是复数到复数的映射. 由于实数是复数的特殊情况，因此，复变函数理论中的许多结论与实变函数中是类似的. 在学习复变函数中，我们应自觉地与高等数学中关于实变函数的概念和性质进行比较，找出其共同点，但更重要的是应找出其不同点，这样便于我们从更高的角度来认识问题，研究问题. 这也是学好复变函数这门课的一种行之有效的方法.

第1章 复数与复变函数

本章首先在中学原有的复数知识基础上对复数概念和基本运算作简要复习，并由此引出复变函数的定义，然后再介绍区域、复变函数的极限与连续性等概念，为进一步深入地学习解析函数理论和方法打下必要的基础.

§1.1 复数及其代数运算

1.1.1 复数的概念

我们知道复数的概念来源于解代数方程. 例如方程 $x^2=-1$ 在实数范围内无解，因此，我们引进一个**虚单位** i，并令 $i^2=-1$，即 i 是方程 $x^2=-1$ 的解. 在此基础上进一步引进复数的概念.

对于任意两实数 x,y，称 $z=x+iy$（或 $z=x+yi$）为复数，x、y 分别称为 z 的**实部和虚部**，记作 $x=\mathrm{Re}(z)$，$y=\mathrm{Im}(z)$.

当 $x=0,y\neq 0$ 时，$z=iy$ 称为**纯虚数**；当 $y=0$ 时，$z=x+0i$ 看作实数 x，因此，实数 x 可看作复数 $z=x+iy$ 的特例.

两复数 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$ **相等**，当且仅当实部 $x_1=x_2$，虚部 $y_1=y_2$；$z=x+iy=0$ 必须且只需它的实、虚部同时为 0.

值得注意的是：和实数不同，一般两个复数不能比较大小.

1.1.2 复数的代数运算

两个复数 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$ 的加、减、乘法定义如下：

$$(x_1+iy_1)\pm(x_2+iy_2)=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2), \tag{1-1}$$

$$(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1). \tag{1-2}$$

以上两式分别称为复数 z_1 与 z_2 的**和、差与积**.

称满足

$$z_2\cdot z=z_1\quad(z_2\neq 0)$$

的复数 $z=x+iy$ 为 z_1 和 z_2 的**商**，记作 $\frac{z_1}{z_2}$，由乘法定义立即得

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2} \tag{1-3}$$

容易证明，复数运算满足交换律、结合律与分配律.

称实部相同而虚部绝对值相等、符号相反的两个复数为**互为共轭的复数**. 如，

与 $z=x+\mathrm{i}y$ 共轭的复数记为 $\bar{z}$，$\bar{z}=x-\mathrm{i}y$．共轭复数有如下性质：

(1) $\overline{z_1 \pm z_2}=\bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$，$\overline{z_1 \cdot z_2}=\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$，$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$　$(z_2 \neq 0)$；

(2) $\bar{\bar{z}}=z$；

(3) $z\bar{z}=(\mathrm{Re}(z))^2+(\mathrm{Im}(z))^2=x^2+y^2$；

(4) $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}(z)=2x$，$z-\bar{z}=2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z)=2\mathrm{i}y$．

注　在计算 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 时，常利用共轭复数的性质(3) 把分子与分母同乘以 $\bar{z}_2$ 即得(1-3) 式．

例 1.1　求 $\dfrac{1}{\mathrm{i}}-\dfrac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ 的实部、虚部、共轭复数．

解　将上述复数求商或利用共轭性质化成 $x+\mathrm{i}y$ 的形式，即可求出．下面用后一方法来求．

$$z=\frac{1}{\mathrm{i}}-\frac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}}-\frac{2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=-\mathrm{i}-\frac{2(\mathrm{i}+\mathrm{i}^2)}{2}=-2\mathrm{i}+1,$$

故

$$\mathrm{Re}(z)=1,\quad \mathrm{Im}(z)=-2,\quad \bar{z}=1+2\mathrm{i}.$$

例 1.2　设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，证明：

$$z_1\cdot\bar{z}_2+z_2\cdot\bar{z}_1=2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2).$$

证
$$z_1\cdot\bar{z}_2+z_2\cdot\bar{z}_1=z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2}=2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2).$$

注　此题也可将 z_1，z_2 代入求得，显然利用共轭性质更简单．

§1.2　复数的几何表示

1.2.1　复平面

一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 和一个有序实数对 (x,y) 一一对应，从而在直角坐标系下和平面上的点建立一一对应．因此复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可用该平面上坐标为 (x,y) 的点来表示．此时称 x 轴为**实轴**，y 轴为**虚轴**，两轴所在平面称为**复平面**或 **z 平面**．因此，复数与复平面上的点成一一对应，并且把"点 z"作为"数 z"的同义词，从而使我们能借助于几何语言或方法研究复变函数的问题，也为复变函数应用于实际奠定了基础．

在复平面上，设复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 对应点 $P(x,y)$，这样一个复数 z 便和平面向径 $\overrightarrow{OP}$ 一一对应(如图 1-1)．向量的长度称为复数 z 的**模**或**绝对值**，记

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{1-4}$$

显然，下列各式成立：

$$|x|\leqslant|z|,\ |y|\leqslant|z|,$$
$$|z|\leqslant|x|+|y|,$$
$$z\cdot\bar{z}=|z|^2=|z^2|.$$

在 $z \neq 0$ 的情况下，以正实轴为始边，以表示 z 的向量（向径）$\overrightarrow{OP}$ 为终边的角的弧度数 θ 称为 z 的辐角，记为

$$\mathrm{Arg}z = \theta.$$

这时，有

$$\tan(\mathrm{Arg}z) = \frac{y}{x}. \tag{1-5}$$

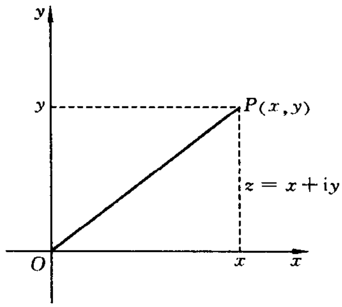

图 1-1

注意，由三角函数中终边相同的角的知识，任何一个复数 $z \neq 0$ 有无穷多个辐角，如果 θ_1 是其中的一个，那么

$$\mathrm{Arg}z = \theta_1 + 2k\pi \ (k \text{ 为任意正整数}) \tag{1-6}$$

就给出了 z 的全部辐角，在 $z(\neq 0)$ 的辐角中，我们把满足 $-\pi < \theta_0 \leqslant \pi$ 的 θ_0 称为 $\mathrm{Arg}z$ 的**主值**，记为 $\theta_0 = \arg z$.

当 $z = 0$ 时，$|z| = 0$，辐角不确定.

辐角的主值 $\arg z\ (z \neq 0)$ 可以由反正切 $\mathrm{Arctan}\,\frac{y}{x}$ 的主值 $\arctan\frac{y}{x}$ 按下列关系确定：

$$\arg z = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, & \text{当 } x > 0, y \gtreqless 0; \\ \pm\dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } x = 0, y \gtrless 0; \\ \arctan\dfrac{y}{x} \pm \pi, & \text{当 } x < 0, y \gtrless 0; \\ \pi, & \text{当 } x < 0, y = 0. \end{cases} \tag{1-7}$$

其中 $-\frac{\pi}{2} < \arctan\frac{y}{x} < \frac{\pi}{2}$.

辐角的多值性是学习复变函数的难点之一，应引起重视.

由复数运算可知，两个复数的加减运算与相应向量的加减运算是一致的（图 1-2）. 它们可以用平行四边形及三角形法则来表示.

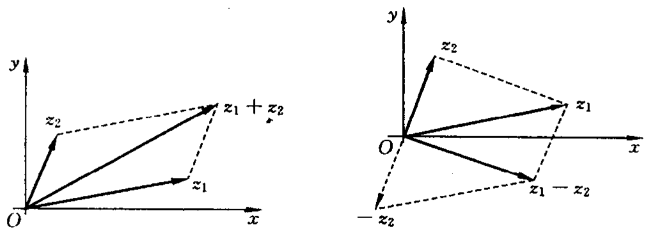

图 1-2

又由平面上的点及向量的几何意义知道，$|z_1 - z_2|$ 表示点 z_1 与 z_2 之间的距离(图 1-3)．

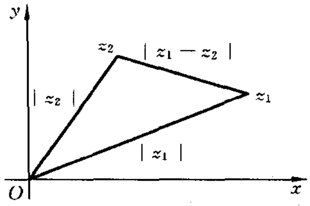

图 1-3

结合图 1-2 及图 1-3，由于三角形两边之和不小于第三边，所以

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \text{（三角不等式）}, \tag{1-8}$$

$$|z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||.$$

一对共轭复数 z 和 $\bar{z}$ 在复平面内是关于实轴对称的(图 1-4)，故有 $|z| = |\bar{z}|$；如果 z 不在负实轴和原点上，还有 $\arg z = -\arg \bar{z}$．

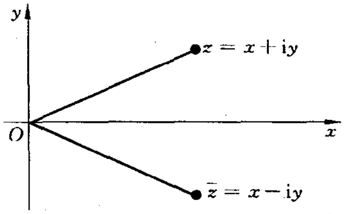

图 1-4

利用直角坐标与极坐标的关系

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta,$$

有

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta), \tag{1-9}$$

称为复数的**三角表示式**.

利用欧拉(Euler)公式：$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$，又可以得到

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \tag{1-10}$$

称为复数的**指数表示式**.

复数的各种表示式可以互相转换，以适应讨论不同问题时的需要.

例 1.3　将下列复数化成三角表示式与指数表示式：

(1) $z = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$；　　(2) $z = 1 - \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi \ (0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$．

解　(1) 显然，$r = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2$，由于 z 在第一象限，由(1-7)式知

$$\theta = \arctan\frac{y}{x} = \arctan\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}.$$

因此，z 的三角表示式为

$$z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}.$$

另外，因 $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故该题可简单解得如下：

$$z=1+\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

(2)
$$\begin{aligned}1-\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi&=2\sin^2\frac{\varphi}{2}+\mathrm{i}\cdot 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\\&=2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\sin\frac{\varphi}{2}+\mathrm{i}\cos\frac{\varphi}{2}\right)\\&=2\sin\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)\right]\\&=2\sin\frac{\varphi}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)}.\end{aligned}$$

此题如先求模再求辐角则解法要复杂得多，因此，解题时应具体问题具体分析，灵活掌握.

例 1.4　将通过两点 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 与 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的直线用复数形式的方程来表示.

解　通过两点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ 的直线的参数方程为

$$\begin{cases}x=x_1+t(x_2-x_1),\\y=y_1+t(y_2-y_1),\end{cases}\quad -\infty<t<+\infty.$$

因此，它的复数形式的参数方程为

$$z=z_1+t(z_2-z_1),\quad -\infty<t<+\infty.$$

当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，表示从 z_1 到 z_2 的直线段. 取 $t=\frac{1}{2}$ 得线段 $\overline{z_1z_2}$ 的中点为

$$z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

例 1.5　求下列方程所表示的曲线：

(1) $|z+\mathrm{i}|=1$；

(2) $|z+\mathrm{i}|=|z-\mathrm{i}|$；

(3) $\mathrm{Im}(z)=3$.

解　(1) 由复数的几何意义，方程表示动点 z 到定点 $-\mathrm{i}$ 的距离为 1 的点的轨迹，即以点 $-\mathrm{i}$ 为中心，半径为 1 的单位圆（见图 1-5(a)）. 化成直角坐标方程为 $|x+\mathrm{i}y+\mathrm{i}|=1$，即

$$x^2+(y+1)^2=1.$$

(2) 几何上表示到点 i 与 $-\mathrm{i}$ 等距离的点的轨迹，即过两点 i 与 $-\mathrm{i}$ 的垂直平分线（见图 1-5(b)），即 x 轴，读者不妨将它化成直角坐标方程来验证.

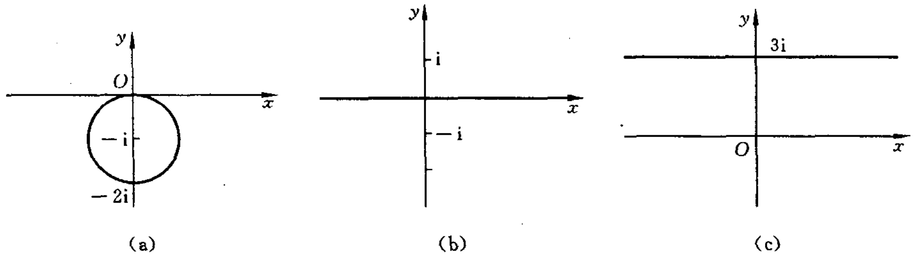

图 1-5

(3) 显然,由复数的几何意义,该方程即为直线 $y=3$,它是一条过点 3i 且平行于实轴的一条水平直线(见图 1-5(c)).

1.2.2　复球面

除了可以用平面内的点或向量表示复数外,还可以用球面上的点来表示复数.现在,我们来介绍这种方法.

取一个与复平面相切于原点 $z=0$ 的球面,球面上一点 S 与原点重合(如图 1-6),通过 S 作垂直于复平面的直线与球面相交于另一点 N,N、S 分别称为北极与南极.

对于复平面内任一点 z,如果用一直线段把 z 与北极 N 连接起来,那么该直线段一定与球面相交于异于 N 的点 P. 反之,对于球面上任一异于 N 的点 P,用直线将 P 与 N 连接起来,该直线一定在复平面上相交一点 z. 用这种方法,除 N 以外,可将复球面上任一点与复平面上的点建立一一对应的关系.因此,可用复球面上的点来表示复数.

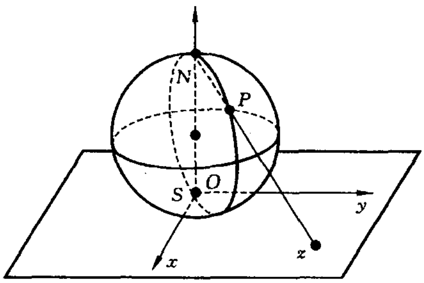

图 1-6

但是,对于球面上的北极 N,还没有复平面上的点与它对应.从图 1-6 可以看到,当 z 点无限地远离原点时,或者说,当复数 z 的模 $|z|$ 无限地变大时,点 P 就无限地接近于 N. 为使复平面与复球面上的点无一例外地建立一一对应的关系,我们规定:复平面上有一个唯一的"无穷远点",它与球面上的北极 N 相对应.相应地,我们又规定:复数中有一个唯一的"无穷大"与复平面上的无穷远点相对应,并