



高等学校精品规划教材

大学数学 (一)

(高职高专适用)

主 编 刘 萍
副主编 武 群 丁 梅

DAXUE SHUXUE



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

高等学校精品规划教材

大学数学(一)

(高职高专适用)

主 编 刘 萍

副主编 武 群 丁 梅



中国水利水电出版社

www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本教材分为《大学数学一》和《大学数学二》。《大学数学一》分为九章,内容包括函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、微分方程、拉普拉斯变换、数学实验等。每节均配有习题,并在全书的最后给出习题答案。

本书可作为高等职业学校、高等专科学校、成人高等学校及本科院校举办的二级职业技术学院工科类各专业的数学教材。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学.1/刘萍主编.一北京:中国水利水电出版社,2004.8

高等学校精品规划教材·高职高专适用

ISBN 7-5084-2229-5

I. 大... II. 刘... III. 高等数学—高等学校—教材 IV. 013

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第068690号

书 名	高等学校精品规划教材(高职高专适用) 大学数学(一)
作 者	主编 刘萍 副主编 武群 丁梅
出版 发行	中国水利水电出版社(北京市三里河路6号 100044) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: sales@waterpub.com.cn 电话: (010) 63202266(总机)、68331835(营销中心)
经 售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	鑫达电脑工作室
印 刷	北京市兴怀印刷厂
规 格	787mm×1092mm 16开本 17印张 403千字
版 次	2004年8月第1版 2006年8月第2次印刷
印 数	5101—7100册
定 价	28.00元

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社营销中心负责调换

版权所有·侵权必究

前 言

本教材依据教育部最新制定的“高职高专教育高等数学课程教学基本要求”而编写的。本教材力求贯彻专科教学要突出理论知识的应用和实践动手能力的培养的原则,“突出实用性,加强实践性,强调针对性,注意灵活性”,对基础理论的教学以够用、必需为度,注意减少理论推导,着重理论的应用,加强实践教学环节,以便学生受到较好的专业训练和实践动手能力的培养。

本教材有如下特点:①由于高职高专学校的教学总时数少,我们在编写过程中,打破了传统的高等数学和工程数学之间的界限,对课程进行了必要的优化;②强调高职高专学校学以致用,将数学软件包 Mathematica 的基本用法以及相关的数学实验作为教材内容编在教材里,以提高学生使用计算机解决实际问题的能力;③结合高职高专的特点,适度淡化了深奥的数学理论,强化了几何说明;④强化了数学思想、数学概念、数学方法的教学,为专业基础课和专业课的学习打下良好的基础,在例题的选排上,优选了在几何、物理方面的应用;⑤在课后习题的选择上,既考虑循序渐进的原则,又考虑重点、难点的结合;⑥每章末编排了拓展与训练,不仅深化了基础知识,拓宽了教材内容,而且配有一定深度的例题与习题,可供一部分学生选择性学习。

本教材包括《大学数学一》、《大学数学二》共两册。

《大学数学一》内容包括一元函数微分学、一元函数积分学、常微分方程、拉普拉斯变换和相关的数学实验。

《大学数学二》内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、线性代数、概率论与数理统计和相关的数学实验。

参加本教材编写的有刘萍(第五~九章、第十二章、第十三章、第十九章);武群(第一~三章、第十章、第十一章、第十五章、第十六章);丁梅(第四章、第十四章、第十七章、第十八章)。全书框架结构安排由刘萍承担。《大学数学一》由刘萍统稿、定稿。《大学数学二》由武群统稿、定稿。

山东大学教授、博士生导师江守礼老师承担了本教材的审稿工作,认真审阅了全部原稿,并提出了许多有价值的建设性意见。

在编写过程中,参阅了同济大学数学教研室主编的《高等数学》第四版、第五版,盛祥耀主编的《高等数学》,李心灿主编的《高等数学》,丁家太主编的《微积分解题方法》,侯风波主编的《高等数学》,郭锡伯主编的《高等数学实验课讲义》,彭玉芳编著的《线性代数》,骆承钦主编的《线性代数》,南京工学院数学教研室编著的《积分变换》,周肇锡主编的《积分变换》等国内许多正式出版的教材。

在出版过程中,得到了山东电力高等专科学校领导和老师的大力支持与帮助,特别是崔强同志作了大量的工作。在此,向以上对本教材的编写和出版工作提供大力支持和帮助

的同志一并表示衷心感谢。

本书可作为高等职业学校、高等专科学校、成人高等学校及本科院校举办的二级职业技术学院工科类各专业的数学教材。

本系列教材的内容根据各专业的不同要求可进行选择性教学。

由于作者水平所限，加之时间仓促，本教材难免有不足之处，敬请读者斧正。

作 者

2004 年 6 月

目 录

前言

第一章 函数与极限	1
第一节 函数	1
一、常量与变量	1
二、函数概念	1
三、函数的表示法	2
四、分段函数	3
五、反函数	4
六、初等函数	4
七、函数的几种特性	5
八、建立函数关系	6
习题 1-1	8
第二节 数列的极限	8
一、数列的极限	8
二、数列极限的几何意义	9
习题 1-2	10
第三节 函数的极限	10
一、当 $x \rightarrow \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限	10
二、当 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限	11
习题 1-3	13
第四节 无穷小量与无穷大量	13
一、无穷小量的定义	13
二、无穷小量的性质	14
三、无穷大量	14
习题 1-4	14
第五节 极限的运算法则	15
习题 1-5	18
第六节 两个重要极限	18
一、夹逼定理	18
二、重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	19

三、数列收敛准则	20
四、重要极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	20
习题 1-6	22
第七节 无穷小量的比较	23
习题 1-7	24
第八节 函数的连续性	24
一、函数的连续性	24
二、间断点	25
三、连续函数的运算	26
四、闭区间上连续函数的性质	27
习题 1-8	28
拓展与训练一	28
第二章 导数与微分	34
第一节 导数的概念	34
一、引例	34
二、导数的定义	35
三、求导数举例	36
四、导数的几何意义	37
五、可导与连续的关系	38
习题 2-1	38
第二节 函数的求导法则	39
一、函数和差积商的求导法则	39
二、复合函数的求导法则	40
三、隐函数的导数	41
四、反函数的导数	41
五、对数求导法	42
六、初等函数的导数	43
习题 2-2	44
第三节 函数的微分	44
一、微分的概念及其几何意义	44
二、微分公式与微分运算法则	46
三、由参数方程所表示的函数的导数	47
四、微分在近似计算中的应用	47
习题 2-3	48
第四节 高阶导数	49
一、函数 $y=f(x)$ 的高阶导数	49
二、隐函数的二阶导数	50
三、由参数方程所表示的函数的二阶导数	51

习题 2-4	51
拓展与训练二	51
第三章 导数的应用	57
第一节 洛必达法则	57
一、 $\frac{0}{0}$ 和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限	57
二、其他类型的未定式极限	58
习题 3-1	60
第二节 函数的单调性与极值	60
一、拉格朗日中值定理	60
二、函数单调性的判别法	61
三、函数的极值及其求法	63
四、函数的最大值和最小值	65
习题 3-2	66
第三节 曲线的凹凸与拐点	67
习题 3-3	69
第四节 函数图形的描绘	69
一、曲线的水平渐近线和垂直渐近线	69
二、函数图形的描绘	70
习题 3-4	71
拓展与训练三	72
第四章 不定积分	77
第一节 不定积分的概念和性质	77
一、原函数的概念	77
二、不定积分的概念及几何意义	77
三、基本积分表	79
四、不定积分的性质	80
习题 4-1	82
第二节 换元积分法	83
一、第一类换元积分法(凑微分法)	83
二、第二类换元积分法	87
习题 4-2	93
第三节 分部积分法	95
习题 4-3	99
第四节 有理函数及三角函数有理式的积分举例	99
一、有理函数的积分举例	99
二、三角函数有理式的积分举例	102
习题 4-4	104
拓展与训练四	104

第五章 定积分	111
第一节 定积分的概念与性质	111
一、定积分的实际背景	111
二、定积分的定义	113
三、定积分的几何意义	114
四、定积分的性质	114
习题 5-1	116
第二节 微积分基本公式	117
一、变上限的定积分	117
二、微积分基本公式	119
习题 5-2	120
第三节 定积分的换元积分法与分部积分法	121
一、定积分的换元积分法	121
二、定积分的分部积分法	123
习题 5-3	125
第四节 广义积分	126
一、无穷区间的广义积分	126
二、无界函数的广义积分	128
习题 5-4	130
拓展与训练五	130
第六章 定积分的应用	137
第一节 定积分的微元法	137
第二节 定积分的几何应用	138
一、用定积分求平面图形的面积	138
二、用定积分求体积	141
三、平面曲线的弧长	144
习题 6-2	145
第三节 定积分的物理应用	146
一、变力做功	146
二、水压力	147
习题 6-3	148
第四节 平均值	148
一、函数的平均值	148
二、均方根	150
习题 6-4	150
拓展与训练六	151
第七章 微分方程	156
第一节 微分方程的基本概念	156
习题 7-1	158

第二节 一阶微分方程·····	159
一、可分离变量的微分方程·····	159
二、一阶线性微分方程·····	161
习题 7-2·····	164
第三节 可降阶的高阶微分方程·····	165
一、 $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程·····	165
二、 $y''=f(x,y')$ 型的微分方程·····	165
三、 $y''=f(y,y')$ 型的微分方程·····	166
习题 7-3·····	166
第四节 二阶常系数线性微分方程·····	167
一、二阶线性微分方程解的结构·····	167
二、二阶常系数线性齐次微分方程·····	169
三、二阶常系数线性非齐次微分方程·····	171
习题 7-4·····	175
第五节 微分方程的应用举例·····	176
一、一阶微分方程应用举例·····	176
二、二阶微分方程应用举例·····	178
习题 7-5·····	181
拓展与训练七·····	182
第八章 拉普拉斯变换·····	188
第一节 拉氏变换的基本概念·····	188
习题 8-1·····	192
第二节 拉氏变换的性质·····	192
习题 8-2·····	197
第三节 拉氏变换应用举例·····	198
习题 8-3·····	200
拓展与训练八·····	201
第九章 数学实验·····	204
实验一 初识 <i>Mathematica</i> ·····	204
实验二 函数及其作图·····	208
实验三 一元函数微分学·····	215
实验四 微分学的应用·····	220
实验五 一元函数积分学·····	225
实验六 微分方程实验·····	229
附录 I 初等数学常用公式·····	233
附录 II 常用平面曲线及其方程·····	237
附录 III 积分表·····	239
附录 IV 拉氏变换简表·····	247
习题答案·····	249

第一章 函数与极限

初等数学的研究对象主要是常量,高等数学的研究对象主要是变量.所谓函数就是变量之间的依赖关系.极限方法是研究变量的一种基本方法.本章将介绍变量、极限和函数的连续性等基本概念.

第一节 函数

一、常量与变量

在观察自然现象或进行科学实验的过程中,常常可以直接或间接地遇到各种不同的量,如长度、容积、压强、温度、电压、电流等,其中有的量在过程中,保持某一固定值,这种量称作常量;还有一些量大小变化,也就是可以取不同的值,这种可以取不同值的量,称作变量.

例如,把一个密闭容器内的气体加热时,气体的体积和分子个数保持一定,所以是常量;而气体的温度与压力则是变量.

因此,一个量是常量还是变量,并不是绝对的,要根据具体情况,作出具体分析;也可以说,常量是变量的特殊情况.例如重力加速度在一个小范围地区可以视为是一个常量,但就广大地区而言,重力加速度是一个变量.在数学讨论中,一般也把常量与变量分别称作常数与变数.通常用字母 a, b, c 等表示常数,用字母 x, y, z 等表示变数.

在几何上,如果一个数 a 是常数,则用数轴上的一个定点来表示;如果 x 是一个变数,则用数轴上的一个动点来表示.设有一个变数 x ,它所取的一切数值的集合是 D (该集合可以是一个或几个区间,动点 x 在区间上变化),这个集合 D 就称作变数 x 的变域.初等数学主要研究常量,高等数学主要研究变量.

二、函数概念

在同一个自然现象或技术过程中,往往同时有几个量在变化着,它们相互联系、相互依赖,并按照一定规律变化着.我们先考察几个实际例子.

【例1】 考虑圆的面积 A 与它的半径 r 之间的相依关系.

A 与 r 之间的关系由公式

$$A = \pi r^2$$

给定,当半径 r 在区间 $(0, +\infty)$ 内任意取定一个数值时,由上式就可以确定圆面积 A 的相应数值.

【例2】 一根导线在输送电流的过程中,电压 V 与电流 I 在变化着,并且它们的变化是有规律的,按照欧姆定律有

$$I = \frac{V}{R} \text{ 或 } V = RI$$

【例3】 当一个物体(也可以近似看作一个质点)作自由落体的过程中,设物体下落的

时间为 t , 落下的距离为 s , 假定开始下落的时刻为 $t=0$, 那么距离 s 与 t 之间有关系式

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

抽去以上几个例子中所考虑的量的实际意义, 它们都表达了变量之间不仅是相互依赖的, 而且存在确定的对应关系. 当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时, 另一个变量就有确定的值与之对应, 两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质.

定义 如果当变量 x 在其变化范围内任意取定一个数值时, 变量 y 按照一定的法则总有惟一确定的 y 值与之对应, 则称 y 是 x 的函数.

称 x 为自变量, y 为函数或因变量, 称自变量 x 的变化范围为函数的定义域, 称因变量 y 的变化范围为函数的值域.

为了表明 y 是 x 的函数, 一般用记号 $y=f(x)$ 、 $y=g(x)$ 或 $y=F(x)$ 等来表示, 有时可以用一个字母 y 表示 $y=y(x)$.

对于函数 $y=f(x)$, 当自变量取定义域内的某一值 x_0 时, 函数的对应值称作函数当自变量取该值时的函数值, 记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.

如果自变量在定义域内任取一个确定值时, 函数都有惟一确定的值与之对应, 这种函数称作单值函数, 否则称作多值函数. 例如, $y=\text{Arcsin}x$ 可限制 $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 则使它转化为 $y=\arcsin x$, 这是一个单值函数, 而 $y=\text{Arcsin}x$ 则是一个多值函数.

【例4】 求函数 $y=\frac{1}{x+1}$ 的定义域.

解 显然在 $\frac{1}{x+1}$ 中, 当 $x+1 \neq 0$, 即 $x \neq -1$ 时, 表达式才有意义, 因此函数的定义域为 $x \neq -1$, 或用区间表示为 $(-\infty, -1)$ 及 $(-1, +\infty)$.

【例5】 确定函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$ 的定义域.

解 要使表达式有意义, 必须且只需 $x^2-2x-3 > 0$, 解得 $x > 3$ 或 $x < -1$.

因此, 函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$ 的定义域为 $x > 3$ 或 $x < -1$, 用区间可以表示为 $(-\infty, -1)$ 及 $(3, +\infty)$.

【例6】 设函数 $f(x)=x^2-2x+3$. 求 $f(1)$, $f(a)$, $f\left(-\frac{1}{a}\right)$, $f(a+1)$.

解

$$f(1)=1^2-2 \times 1+3=2$$

$$f(a)=a^2-2a+3$$

$$f\left(-\frac{1}{a}\right)=\left(-\frac{1}{a}\right)^2-2\left(-\frac{1}{a}\right)+3=\frac{1}{a^2}+\frac{2}{a}+3$$

$$f(a+1)=(a+1)^2-2(a+1)+3=a^2+2a+1-2a-2+3=a^2+2$$

三、函数的表示法

一般地说, 函数有三种表示法, 公式表示法(或解析法)、表格法(或列表法)与图示法.

1. 公式表示法

以数学式子表示函数的方法称作函数的公式表示法. 前述例子中的函数都是以公式表

示的;公式表示法的优点是便于理论推导和计算.

2. 表格法(或列表法)

用表格表示函数的方法称作函数的表格表示法.它是将自变量与其对应的因变量的值通过表格写出来.如三角函数表、对数表等.表格法的优点在于所求的函数值容易查得.

3. 图示法

以图形来表示函数的方法称作函数的图示法.图示法的优点是形象直观,但不便于理论分析.

四、分段函数

有些函数,在定义域的不同范围具有不同的表达式,这样的函数就是所谓的分段函数.例如

$$y=f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0\leq x\leq 1 \\ 1+x, & x>1 \end{cases}$$

是确定在区间 $[0, +\infty)$ 上的一个函数,当自变量 x 取闭区间 $[0, 1]$ 上的数值时,对应的函数值由公式 $y=2\sqrt{x}$ 确定;当 x 取区间 $(1, +\infty)$ 内的数值时,函数值由公式 $y=1+x$ 确定,如图1-1所示.

【例7】旅客乘坐火车可免费携带不超过20kg的物品,超过20kg不超过50kg的部分每千克交费0.20元,超过50kg部分每千克交费0.30元.求运费与携带物品重量的函数关系.

解 设物品的重量为 x kg,应交运费为 y 元,由题意知:

当重量不超过20kg时, $y=0, x\in[0, 20]$

当重量超过20kg但不超过50kg时, $y=(x-20)\times 0.2, x\in(20, 50]$

当重量超过50kg时, $y=(50-20)\times 0.2+(x-50)\times 0.3, x>50$

综上所述,得

$$y=\begin{cases} 0, & 0\leq x\leq 20 \\ 0.2x-4, & 20<x\leq 50 \\ 0.3x-9, & x>50 \end{cases}$$

【例8】若 $f(x)=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$,求 $f(3), f(0), f(-2)$.

解 由题意得 $f(3)=1, f(0)=0, f(-2)=-1$.

此函数称作符号函数,记为 $\operatorname{sgn}x$.其定义域为 $(-\infty, +\infty)$,值域为 $\{-1, 0, 1\}$.它的图形如图1-2所示.

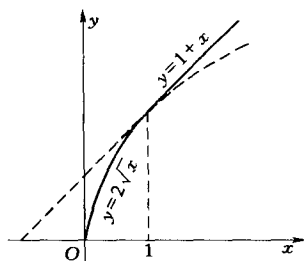


图 1-1

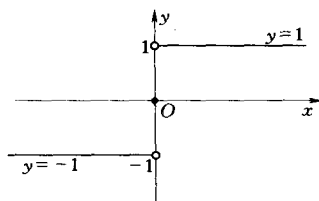


图 1-2

五、反函数

在研究两个变量之间的依赖关系时,可以根据问题的需要选定其中的一个为自变量,则另一个就是因变量或函数.如自由下落的物体,下落的距离 s 是时间 t 的函数, s 与 t 的依赖关系由公式 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 表示.这时,可以记作 $s=s(t)$.如果问题是要求用物体下落的距离来确定时间,那么可以把距离 s 取作自变量,而把时间 t 取作函数或因变量, t 与 s 的依赖关系由公式 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 确定为 $t=\sqrt{\frac{2s}{g}}$.此时,称 $t=t(s)$ 是函数 $s=s(t)$ 的反函数,而 $s=s(t)$ 称作直接函数.

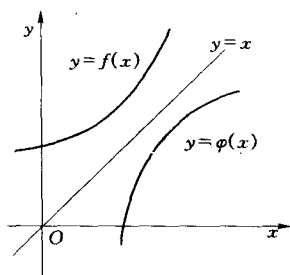


图 1-3

一般地,设给定 y 是 x 的函数 $y=f(x)$,如果把 y 当作自变量, x 当作函数,则由 $y=f(x)$ 确定的函数 $x=\varphi(y)$ 称作函数 $f(x)$ 的反函数,而 $y=f(x)$ 称作直接函数.互为相反的函数,其图形关于直线 $y=x$ 对称.如图1-3所示.

求反函数的步骤是,从 $y=f(x)$ 中解出 x ,得 $x=\varphi(y)$,再将 x,y 分别换为 y,x ,即 $y=\varphi(x)$ 就是 $y=f(x)$ 的反函数.

例如,求 $y=3x-2$ 的反函数,由 $y=3x-2$ 解出 x ,得 $x=\frac{y+2}{3}$,将 x,y 分别换为 y,x ,得 $y=\frac{1}{3}(x+2)$,所以 $y=3x-2$ 的反函数为 $y=\frac{1}{3}(x+2)$.

六、初等函数

1. 基本初等函数

幂函数 $y=x^a$ (a 为任意实数),指数函数 $y=a^x$ ($a>0$,且 $a\neq 1$),对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0$,且 $a\neq 1$),三角函数 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$, $y=\cot x$, $y=\sec x$, $y=\csc x$ 和反三角函数 $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\arctan x$, $y=\operatorname{arccot} x$ 等五类函数统称为基本初等函数.

这些函数在初等数学中已经比较系统地讨论过,在这里不再赘述.读者可对这些函数的定义域、值域、图形、特性等复习,以便为下面的学习奠定基础.

2. 复合函数

若 y 是 u 的函数 $y=f(u)$,而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$,则 $y=f[\varphi(x)]$ 是 x 的函数,称此函数为由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数, u 称作中间变量.

【例9】 试求函数 $y=u^2$ 与 $u=\sin x$ 构成的复合函数.

解 将 $u=\sin x$ 代入 $y=u^2$ 中,即为所求的复合函数 $y=\sin^2 x$,其定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

【例10】 试求函数 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=1-x^2$ 构成的复合函数.

解 将 $u=1-x^2$ 代入 $y=\sqrt{u}$ 中,得 $y=\sqrt{1-x^2}$ 即为所求复合函数,其定义域为 $[-1, 1]$.

【例11】 指出 $y=(2x+1)^4$, $y=\sqrt{\lg x}$ 及 $y=\sqrt{\ln(\sin x+2^x)}$ 是由哪些函数复合而成的?

解 $y=(2x+1)^4$ 是由 $y=u^4$ 和 $u=2x+1$ 复合而成的.

$y=\sqrt{\lg x}$ 是由 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=\lg x$ 复合而成的.

$y = \sqrt{\ln(\sin x + 2^x)}$ 是由 $y = \sqrt{u}$ 及 $u = \ln v$, $v = \sin x + 2^x$ 复合而成.

3. 初等函数

由基本初等函数和常数经过有限次的加、减、乘、除和复合运算构成的, 并且能用一个数学式子表示的函数, 称作初等函数. 例如, $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$, $y = \frac{x^2 + x + 1}{e^x + e^{-x}}$ 等都是初

等函数. 而 $y = \begin{cases} 2x, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$ 与 $y = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ 都不是初等函数.

七、函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 若存在一个正数 M , 使得对一切 $x \in I$, 都有

$$|f(x)| \leq M$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界, 否则称 $f(x)$ 在 I 上是无界的.

例如, 函数 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的, 因为无论 x 取任何实数, $|\sin x| \leq 1$ 都成立. 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内是无界的, 但在区间 $(1, 2)$ 内是有界的. 可见, 函数是否有界, 不仅与函数有关, 而且还与区间有关.

2. 函数的单调性

设 x_1 与 x_2 为区间 (a, b) 内的任意两个数, 若 $x_1 < x_2$ 时, 函数 $y = f(x)$ 满足

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ [或 } f(x_1) > f(x_2)]$$

则称函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内为一单调增加(或减少)的函数.

例如, $y = x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 内是单调增加函数, 在 $(-\infty, 0)$ 内是单调减少函数, 在 $(-\infty, +\infty)$ 内不是单调函数.

如图1-4所示, 表示单调增加函数的曲线总是上升的; 表示单调减少函数的曲线总是下降的.

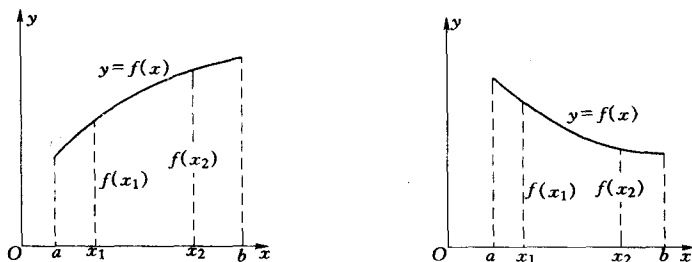


图 1-4

3. 函数的奇偶性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域关于原点对称, 如果对于定义域中的任何 x , 都有 $f(x) = f(-x)$, 则称 $y = f(x)$ 为偶函数; 如果有 $f(x) = -f(-x)$, 则称 $y = f(x)$ 为奇函数; 不是偶函数, 也不是奇函数的函数, 称为非奇非偶函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称, 奇函数的图形关于原点对称, 如图1-5所示.

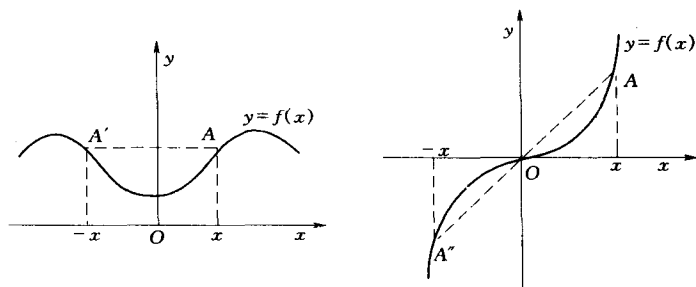


图 1-5

例如 $y=\sin x$ 是奇函数; $y=\cos x$ 是偶函数; $y=\sin x+\cos x$ 既不是偶函数, 也不是奇函数, 是非奇非偶函数.

【例 12】 证明 $f(x)=x^2\sin x^3$ 为奇函数.

证 因为 $f(x)=x^2\sin x^3$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 且有

$$f(-x)=(-x)^2\sin(-x)^3=-x^2\sin x^3=-f(x)$$

所以该函数为奇函数.

【例 13】 证明 $f(x)=\sin x \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 是偶函数.

证 因为该函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 且有

$$\begin{aligned} f(-x) &= \sin(-x) \ln(-x + \sqrt{(-x)^2+1}) \\ &= -\sin x \ln \frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}+x} \\ &= -\sin x \ln \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} \\ &= -\sin x \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \\ &= -\sin x [-\ln(\sqrt{x^2+1}+x)] \\ &= \sin x \ln(\sqrt{x^2+1}+x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

所以 $f(x)=\sin x \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 是偶函数.

4. 函数的周期性

对于函数 $y=f(x)$, 如果存在正数 T , 使得对于一切实数 x , 都有 $f(x \pm T)=f(x)$, 则称 $y=f(x)$ 为周期函数, T 是 $f(x)$ 的周期. 如果周期函数存在最小正周期, 则称此最小正周期为基本周期, 通常, 我们所说的周期是指最小正周期.

例如, 函数 $\sin x$, $\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数, 函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

八、建立函数关系

寻找函数关系是高等数学所要研究的重要课题之一, 在这里简单的介绍如何利用物理知识、几何知识等建立函数关系.

【例 14】 有一块边长为 a 的正方形铁皮, 将它的四角剪去大小相等的小正方形, 制成一个无盖的盒子, 求盒子的体积与小正方形边长之间的函数关系.

解 设剪去的小正方形的边长为 x , 盒子的体积为 V , 如图 1-6 所示, 则

$$V = x(a-2x)^2, 0 < x < \frac{a}{2}$$

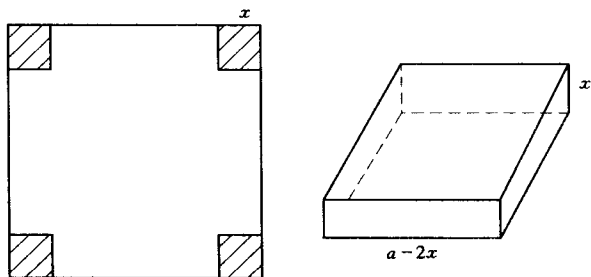


图 1-6

【例15】 直线 $y=x$, $y=2-x$ 及 x 轴所围成的等腰三角形 ABC , 如图 1-7 所示, 在底边上任取一点 $x \in [0, 2]$, 过 x 点作垂直 x 轴的直线, 将图上的阴影部分表示成 x 的函数.

解 设阴影部分的面积为 A , 当 $x \in [0, 1)$ 时, $A = \frac{1}{2}x^2$; 当 $x \in [1, 2]$ 时, $A = 1 - \frac{1}{2}(2-x)^2$.

所以
$$A = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & x \in [0, 1) \\ 2x - \frac{1}{2}x^2 - 1, & x \in [1, 2] \end{cases}$$

【例16】 设有一圆锥容器, 容器的底半径为 R , 高为 H , 现以 a 的速率往容器内注入水, 试把容器中的水的容积 V 分别表示成时间 t 及水高 h 的函数, 如图 1-8 所示.

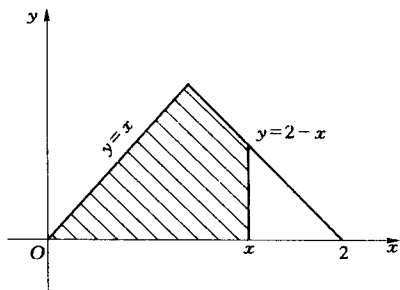


图 1-7

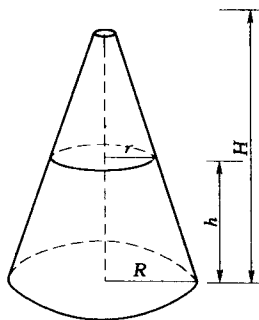


图 1-8

解 (1) 显然 t 时容器中水的容积为 $V=at$.

(2) 设当容器中水的高度为 h 时, 水的容积为 V , 并设此时水面的半径为 r .

根据锥体的体积公式有
$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi r^2 (H-h)$$

由图中可以看出
$$\frac{r}{R} = \frac{H-h}{H}, \text{ 即 } r = \frac{R}{H}(H-h)$$