华章数学译丛

29

Fundamentals of Complex Analysis with Applications to Engineering and Science

(Third Edition)

复分析基础及工程应用

（原书第3版）

（美） E. B. Saff 范德比尔特大学　A. D. Snider 南佛罗里达大学 等著

高宗升　等译

机械工业出版社
China Machine Press

华 章 数 学 译 丛

29

Fundamentals of Complex Analysis with Applications to Engineering and Science

(Third Edition)

复分析基础及工程应用

（原书第3版）

（美） E. B. Saff 范德比尔特大学 A. D. Snider 南佛罗里达大学 等著

高宗升 等译

机械工业出版社
China Machine Press

本书系统而全面地介绍了复分析的基本理论和方法及其在工程问题上的应用，且注重理论与实际密切结合．全书共分八章：复数，解析函数，初等函数，复积分，解析函数的级数表示，留数理论，共形映射，应用数学的变换．为了便于读者掌握本书的主要内容，在每章后面都给出了小结和参考文献，并且配备了大量的例题和练习，书末附有练习答案和提示．

本书内容丰富，理论严谨，讲解透彻，可作为高等院校高年级本科生和研究生复分析课程的教材或教学参考书，还可供需要复变函数知识的工程技术人员参考．

本书版权登记号：图字：01-2005-0519

图书在版编目(CIP)数据

复分析基础及工程应用（原书第3版）/（美）萨夫（Saff, E. B.）等著；高宗升等译．—北京：机械工业出版社，2007.1

（华章数学译丛）

书名原文：Fundamentals of Complex Analysis with Applications to Engineering and Science, Third Edition

ISBN 7-111-20020-9

Ⅰ．复…　Ⅱ．①萨…　②高…　Ⅲ．复分析　Ⅳ．O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 119307 号

机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街 22 号　邮政编码　100037）

责任编辑：迟振春

北京瑞德印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行

2007 年 1 月第 1 版第 1 次印刷

186mm × 240mm · 24.75 印张

定价：55.00 元

凡购本书，如有倒页、脱页、缺页，由本社发行部调换

本社购书热线：(010)68326294

译 者 序

本书是一本高水平的理工科大学复分析及应用教材. 与国内外同类教材相比，它具有如下明显的特色和优点：

1. 本书系统地讲述了复分析的基本理论和方法，内容丰富，理论严谨，详略得当. 对于复分析的基本概念和主要定理，一般都给出了准确的叙述和严格的证明；对那些在理论或应用上十分重要、证明比较艰深的少数定理，例如柯西定理、黎曼映射定理等，采用述而不证的方法.

2. 本书最重要的特色之一是着重介绍复分析理论在现代工程科技上的应用. 书中给出了流体力学、电学、磁学、信号处理、热传导等方面的大量实例，把复分析这门学科和实际问题的联系描述得淋漓尽致，为学生应用复方法解决工程问题打下了坚实的基础.

3. 本书十分重视学生知识面的拓宽和数学素质的培养. 例如，第 2 章介绍了现代复分析中的茹利亚集和芒德布罗集；第 4 章给出了柯西定理的两种可供选择的表述方法；第 8 章介绍了傅里叶变换、梅林变换、拉普拉斯变换、希尔伯特变换和 z 变换；附录 A 介绍了共形映射的数值结构等一般复分析教材中少见的内容，为学生的进一步学习和提高创造了条件.

4. 本书的内容编排新颖，生动活泼，可读性强，有令人耳目一新之感. 书中许多内容，例如第 5 章中洛朗定理的证明与第 6 章中儒歇定理的说明等，讲解通俗易懂，令人过目不忘.

5. 本书非常适合读者自学. 每章后面不仅有小结，而且还附有相应的参考文献，同时配有大量的例题和练习. 另外，书后附有练习答案供读者参考.

本书可作为高等院校理工科高年级本科生和研究生的复分析教材或教学参考书，同时也可供工程技术人员参考之用.

本书第 1 章与第 2 章由高宗升翻译；第 3 章由玄祖兴翻译；第 4 章与第 8 章由尚丽娜翻译；第 5 章、第 6 章及索引由滕岩梅翻译；前言、第 7 章以及附录由王松敏翻译. 最后由高宗升统稿. 由于译者水平所限，译文中难免有疏漏和错误之处，敬请读者批评指正.

高宗升
于北京航空航天大学理学院

前　言

本书之所以出第3版，是因为我们确信学过微积分的理工科大学生完全有能力理解复分析基础，并且可以应用其方法来解决工程问题. 因此，在写作本书时，对那些没有耐心阅读定理证明的读者，也尽力使其更加容易接受复分析的基础. 为了实现这一目标，在本书内容的讲解和编排上，我们参考了微积分教材的叙述方式，并且还具体体现了书中理论在工程上的应用. 这样，读者就不会觉得本书的数学方法枯燥无味了.

下面具体谈谈本书的编写方式. 首先，我们回答大部分教师都会问的问题：这本书包含的内容层次是什么，也就是说，哪些结果被论证了，哪些结果仅仅被陈述了？我们的回答是：反映解析函数性质的结果，我们都加以证明了；对于大部分涉及实分析更深层内容的结果(例如，复分析的黎曼和的收敛、判断收敛的柯西判别法、古萨的广义柯西定理以及黎曼映射定理)，我们没有给予证明. 其次，在本书中，我们避免了传统的叙述方式，没有讨论复数的有序数对，而采用了更加清晰明了的(基于代数扩域的)描述方法.

在第4章，我们给出了柯西定理的两个可供选择的表述. 第一个表述基于周线的形变，即拓扑学家所谓的同伦. 我们尽量使初学者觉得这个方法容易理解，因为该方法易于形象化，并且易于应用到具体的问题中. 第二个方法是从周线积分来解释的，证明时利用了线积分和格林定理. 这两个平行的方法使得4.4节有两部分内容，读者可以只读其中一部分，而忽略另一部分，并不会影响到对本书后面内容的进一步学习(尽管从这里读者很容易看出我们的优选).

笔者认为二维稳定状态下的温度形式是大家最熟悉的调和函数的实例，所以我们主要从这个问题的理解来使解析函数理论形象化. 整本书中都可以看到这个应用，尤其在第7章共形映射的背景中强调了这一点. 在第7章，我们还指出了直接方法和间接方法的不同. 前者要求先构造出映射进而解决实际问题，而后者先假设出映射，然后研究该映射解决的问题. 许多比较早的书上的技巧都不能运用间接方法，因此，在学习这部分内容时，我们希望读者不要先人为主.

在第3版中，L. N. Trefethen 和 T. Driscoll 更新了附录 A. 该附录反映了共形映射的数值结构在近些年所取得的进展. 附录 B 汇编了一些常用的映射，并且给出了它们的具体表达式和图形.

线性系统分析是本书多次涉及的另一个应用. 在第3章中学习了超越函数后，紧接着介绍了频率分析的基本思想；另外，我们在适当的时候提到了史密斯图、电路合成和稳定性准则；在第8章中，随着对傅里叶变换、梅林变换、拉普拉斯变换、希尔伯特变换和 z 变换的解析函数方面的讲解，以及在信号处理和通信工程中的新应用的介绍，使这方面的内容达到了极致. 因此，对于想在这些领域进一步学习的读者来说，我们希望本书能对他们有所帮助.

第3版的特色

第3版的新颖之处是：讨论了黎曼球面，从而解释了复分析中“无穷远点”这一概念的本

质意义；介绍了函数的迭代和独特而有趣的茹利亚集，并在复平面上给出了它们的图形；在对多项式和有理函数的分析中，引入复观点，丰富了过去的研究结果；对于简单几何图形，全面介绍了用于计算恒温的调和函数方法．选讲章节前面都加了星号，以便读者选学．在每章的最后给出了小结和参考文献．与前两版一样，正文精选了大量用于阐明定理、技巧以及复分析应用方面的例子，使本书的品质更加完美．

教师(以及感兴趣的学生)可以从 Francisco Carreras 开发的 MATLAB 工具箱中得益，可从下面的网站下载该工具箱：

http：//ee. eng. usf. edu/people/snider2. html

(点击 complextools. zip 可以顺利地下载)．文件 compman. doc 详细地说明了该工具箱的使用方法．MATLAB 工具箱提供了形象化的机上作图、有趣的复数代数处理、常见的共形映射以及设计儒可夫斯基(Joukowski)机翼的入门指导．

该书难免有误，读者可通过勘误表反映给我们．勘误表是一个可下载的 PDF 文件，可以在上面的网站上找到．

笔者的导师 Joseph L. Walsh 和 Paul Garabedian 对本书给予了指导，在此对他们表示衷心的感谢．南佛罗里达大学的 Samuel Garrett 是笔者多年的同事，在此也对他致谢．另外，编辑 George Lobell 对本书给予了很大的支持，Adam Lewenberg 提供了技术支持，出版商 Bob Walters 在本书印刷过程中给予了指导．下面的数学家对书稿提出过宝贵意见：马里兰大学的 Carlos Berenstein、科罗拉多大学的 Keith Kearnes、阿肯色大学的 Dmitry Khavinson、华盛顿大学的 Donald Marshall(第 1 ~ 4 章)、加州大学圣芭芭拉分校的 Mihai Putinar、亚利桑那州立大学的 Sergei Suslov、巴特勒大学的 Rebecca Wahl、得克萨斯技术大学的 G. Brock Williams，在此对他们表示衷心的感谢！

E. B. Saff
esaff@ math. vanderbilt. edu
A. D. Snider
snider@ eng. usf. edu

目　录

译者序

前言

第 1 章　复数 ………… 1

1.1　复数代数 ………… 1

1.2　复数的点表示 ………… 5

1.3　向量与极式 ………… 9

1.4　复指数 ………… 17

1.5　幂与根 ………… 22

1.6　平面集 ………… 26

1.7　黎曼球面与球极射影 ………… 29

小结 ………… 34

参考文献 ………… 35

第 2 章　解析函数 ………… 36

2.1　复变函数 ………… 36

2.2　极限与连续性 ………… 39

2.3　解析性 ………… 44

2.4　柯西－黎曼方程 ………… 49

2.5　调和函数 ………… 54

*2.6　调和函数的一个实例——恒温 ………… 59

*2.7　迭代映射——茹利亚集与芒德布罗集 ………… 61

小结 ………… 65

参考文献 ………… 65

第 3 章　初等函数 ………… 66

3.1　多项式与有理函数 ………… 66

3.2　指数函数、三角函数与双曲函数 ………… 74

3.3　对数函数 ………… 80

3.4　垫、楔与壁 ………… 84

3.5　复幂函数与复反三角函数 ………… 88

*3.6　在振荡系统中的应用 ………… 92

小结 ………… 97

参考文献 ………… 98

第 4 章　复积分 ………… 99

4.1　周线 ………… 99

4.2　周线积分 ………… 106

4.3　积分与路径的无关性 ………… 114

4.4　柯西积分定理 ………… 118

4.4.1　周线形变法 ………… 119

4.4.2　向量分析法 ………… 126

4.5　柯西积分公式及其推论 ………… 135

4.6　解析函数的界 ………… 142

*4.7　在调和函数中的应用 ………… 146

小结 ………… 152

参考文献 ………… 153

第 5 章　解析函数的级数表示 ………… 155

5.1　序列与级数 ………… 155

5.2　泰勒级数 ………… 160

5.3　幂级数 ………… 167

*5.4　收敛的数学理论 ………… 174

5.5　洛朗级数 ………… 180

5.6　零点与奇点 ………… 186

5.7　无穷远点 ………… 193

*5.8　解析延拓 ………… 196

小结 ………… 203

参考文献 ………… 204

第 6 章　留数理论 ………… 205

6.1　留数定理 ………… 205

6.2　$[0, 2\pi]$上三角函数的积分 ………… 210

6.3　$(-\infty, +\infty)$上某些函数的反常积分 ………… 213

6.4　涉及三角函数的反常积分 ………… 220

6.5　凹周线 ………… 226

6.6　关于多值函数的积分 ………… 232

6.7　辐角原理与儒歇定理 ………… 238

小结 ………… 246

参考文献 ………… 247

第 7 章　共形映射 …………………………… 248
7.1　拉普拉斯方程的不变性 ……………… 248
7.2　几何性质 ……………………………… 253
7.3　默比乌斯变换 ………………………… 258
7.4　默比乌斯变换(续) …………………… 266
7.5　施瓦茨-克里斯托费尔变换 …………… 275
7.6　在静电学、热流与流体力学中的应用 … 283
7.7　共形映射在物理中的进一步应用 …… 292
小结 ……………………………………………… 298
参考文献 ………………………………………… 298
第 8 章　应用数学的变换 …………………… 300
8.1　傅里叶级数(有限傅里叶变换) ……… 300
8.2　傅里叶变换 …………………………… 313
8.3　拉普拉斯变换 ………………………… 322
8.4　z 变换 ………………………………… 330
8.5　柯西积分与希尔伯特变换 …………… 337
小结 ……………………………………………… 347
参考文献 ………………………………………… 347
附录 A　共形映射的数值结构 ……………… 349
附录 B　共形映射表 ………………………… 362
奇数练习答案 ………………………………… 368
索引 ……………………………………………… 384

第1章 复　　数

1.1　复数代数

为了用合适的方法研究复数系，先简单回顾一下运算中所用到的各种数的构造.

我们先从有理数说起. 有理数是形如 $m/n(n\neq 0)$ 的两个整数之比，并且约定所有形如 n/n 的有理数都等于1(因此可消去公因子). 有理数之间的加、减、乘、除运算总能在有限步内完成，其结果仍是有理数. 此外，有理数的运算满足一些简单的运算法则，即我们熟悉的交换律、结合律和分配律. 设 a，b，c 为任意有理数，

加法交换律

$$a+b=b+a$$

乘法交换律

$$ab=ba$$

加法结合律

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

乘法结合律

$$a(bc)=(ab)c$$

分配律

$$(a+b)c=ac+bc,$$ 1

注意，有理数只是我们在求解形如 $ax+b=0$ 的方程时可能需要的数. 对于非零数 a，该方程的解为 $x=-b/a$，它是两个有理数之比，从而也是有理数.

但是，我们在有理数系中求解二次方程时，会发现它们中的一些无解. 例如，对于简单的方程

$$x^2=2 \tag{1}$$

来说，任意有理数都不是它的解(参见本节末习题29). 因此，为得到更为满意的数系，在有理数中添加一个新的符号，记之为$\sqrt{2}$，把它定义为方程(1)的解，这样就扩大了“数”的概念. 修改数的概念之后，它的标准表达式可写为

$$a+b\sqrt{2}, \tag{2}$$

这里 a，b 为有理数. 加法和减法运算按照

$$(a+b\sqrt{2})\pm(c+d\sqrt{2})=(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{2} \tag{3}$$

进行. 由分配律以及记号$\sqrt{2}$的平方总可由有理数2来代替，对于乘法，我们有

$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(bc+ad)\sqrt{2}. \tag{4}$$

最后，利用众所周知的分母有理化过程，可将任意两个新数的商化为标准形式

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}=\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}\frac{c-d\sqrt{2}}{c-d\sqrt{2}}=\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2}. \tag{5}$$

这种带有根式的运算读者已经十分熟悉了，且容易看出得到的数系的运算也满足交换律、结合律和分配律. 但是，记号$\sqrt{2}$并不能轻易地被有理数消掉. 这一点在标准形式(2)及运算法则(3)、(4)、(5)中可以明显地看出来. 事实上，当对那些含有$\sqrt{2}$的项进行运算时，除去$\sqrt{2}$平方的情况外，我们只是对这些项中的有理数进行计算，而$\sqrt{2}$仅仅是作为一个记号保留下来. 因此，把$\sqrt{2}$作为一个数添加到有理数系中有点人为化的过程，这样做只不过使我们可以构造一个更大的数系，使得方程 $x^2=2$ 有解.

在上述想法下，假设我们已把全体实数加入到有理数系中. 它们中的一些数，例如，
2 $\sqrt[4]{17}$，可作为更复杂的方程的解出现. 其他的数，例如 π 和 e，可由极限得到. 每一个无理数都以一种人为的方式引入，而得到的数集与数学运算同样满足交换律、结合律和分配律[1].
即便如此，我们仍不能求解方程

$$x^2=-1. \tag{6}$$

然而经验表明，我们可以再次通过添加方程(6)的解的一个记号$\sqrt{-1}$来扩大数系；习惯上用记号 i(工程上常用字母 j)来代替. 下面仿照(与$\sqrt{2}$有关的)表达式(2)～(5)归结出如下数的概念[2].

> **定义 1** 形如 $a+b\text{i}$ 的数称为**复数**(complex number)，其中 a，b 都是实数. 两个复数 $a+b\text{i}$ 与 $c+d\text{i}$ 相等，即 $a+b\text{i}=c+d\text{i}$，当且仅当 $a=c$，$b=d$.

复数的加减法运算由下面的等式给出：

$$(a+b\text{i})\pm(c+d\text{i}):=(a\pm c)+(b\pm d)\text{i},$$

这里符号$:=$表示“定义为”.

根据分配律及等式 $\text{i}^2=-1$，两个复数的乘法定义为

$$(a+b\text{i})(c+d\text{i}):=(ac-bd)+(bc+ad)\text{i}.$$

为了计算两个复数的商，可将“分母有理化”，得

$$\frac{a+b\text{i}}{c+d\text{i}}=\frac{a+b\text{i}}{c+d\text{i}}\frac{c-d\text{i}}{c-d\text{i}}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\text{i}.$$

由此可定义复数的除法为

$$\frac{a+b\text{i}}{c+d\text{i}}:=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\text{i}\quad(\text{这里 } c^2+d^2\neq 0).$$

以上是复数系中的一些运算法则. 一些常见的代数性质(如交换律、结合律等)比较容易
3 验证，留作练习.

例 1 计算

$$\frac{(6+2\text{i})-(1+3\text{i})}{(-1+\text{i})-2}.$$

[1] 扩充一个数域的代数问题在本章末参考文献[5]中有讨论.

[2] 高斯(Karl Friedrich Gauss，1777—1855)是第一位自如地使用复数且充分认定其在数学中客观存在的数学家.

解

$$\frac{(6+2i)-(1+3i)}{(-1+i)-2}=\frac{5-i}{-3+i}=\frac{(5-i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)}=\frac{-15-1-5i+3i}{9+1} \tag{7}$$

$$=-\frac{8}{5}-\frac{1}{5}i. \qquad ■$$

（在本书中，记号■表示解题或证明的结束.）

在历史上，由于人们所知道的任何数都不是方程(6)的解，所以把 i 看作一个“虚构”的数. 按照前面的观点，可用记号来代替$\sqrt{2}$或 $\sqrt[4]{17}$. 同样，i 也仅仅是一个为了得到更大的数系而添加的记号. 通常有以下定义⊖.

> **定义 2**　对于复数 $a+bi$，(实数)a 称为它的**实部**，(实数)b 称为它的**虚部**. 如果 a 为零，则称这个数为**纯虚数**.

为方便起见，习惯上用字母 z 表示一个复数，它的实部与虚部分别记为 $\mathrm{Re}z$ 和 $\mathrm{Im}z$. 于是，$z=\mathrm{Re}z+i\mathrm{Im}z$.

注意等式 $z_1=z_2$ 成立当且仅当 $\mathrm{Re}z_1=\mathrm{Re}z_2$ 且 $\mathrm{Im}z_1=\mathrm{Im}z_2$. 因此任意有关复数的等式都可表示为一对实等式.

全体复数的集合记为 **C**. 与实数系不同，**C** 中的元素没有大小顺序；例如，比较 $2+3i$ 与 $3+2i$ 的大小是没有意义的(参见习题 30).

练习 1.1

1. 证明 $-i$ 也是方程(6)的一个根.

2. 证明复数运算满足交换律、结合律和分配律.　4

3. 注意 0 和 1 作为复数保持它们的“单元性”，即当 z 为复数时，$0+z=z$，$1\cdot z=z$.

(a) 证明复数减法是加法的逆运算(即 $z_3=z_2-z_1$ 当且仅当 $z_3+z_1=z_2$).

(b) 证明书中给出的复数除法是乘法的逆运算(即如果 $z_2\neq 0$，那么 $z_3=z_1/z_2$ 当且仅当 $z_3z_2=z_1$).

4. 证明若 $z_1z_2=0$，则 $z_1=0$ 或 $z_2=0$.

在 5～13 题中，用 $a+bi$ 的形式写出各数.

5. (a) $-3\left(\frac{i}{2}\right)$　　(b) $(8+i)-(5+i)$　　(c) $\frac{2}{i}$

6. (a) $(-1+i)^2$　　(b) $\dfrac{2-i}{\frac{1}{3}}$　　(c) $i(\pi-4i)$

7. (a) $\frac{8i-1}{i}$　　(b) $\frac{-1+5i}{2+3i}$　　(c) $\frac{3}{i}+\frac{i}{3}$

8. $\dfrac{(8+2i)-(1-i)}{(2+i)^2}$

9. $\dfrac{2+3i}{1+2i}-\dfrac{8+i}{6-i}$

10. $\left[\dfrac{2+i}{6i-(1-2i)}\right]^2$

⊖ René Descartes 在 1637 年引进了“实”和“虚”的术语. W. R. Hamilton 在 1843 年讲到一个数的“虚部”.

11. $i^3(i+1)^2$

12. $(2+i)(-1-i)(3-2i)$

13. $((3-i)^2-3)i$

14. 证明 $\mathrm{Re}(iz)=-\mathrm{Im}z$ 对所有复数 z 成立.

15. 设 k 为整数，证明

$$i^{4k}=1,\quad i^{4k+1}=i,\quad i^{4k+2}=-1,\quad i^{4k+3}=-i.$$

16. 利用 15 题的结果计算

(a) i^7 (b) i^{62} (c) i^{-202} (d) i^{-4321}

17. 利用 15 题的结果计算 $3i^{11}+6i^3+\dfrac{8}{i^{20}}+i^{-1}$.

5 **18.** 证明复数 $z=-1+i$ 满足方程 $z^2+2z+2=0$.

19. 把复方程 $z^3+5z^2=z+3i$ 写成两个实方程.

20. 求解下列方程：

(a) $iz=4-zi$ (b) $\dfrac{z}{1-z}=1-5i$

(c) $(2-i)z+8z^2=0$ (d) $z^2+16=0$

21. 复数 z_1，z_2 满足方程组

$$(1-i)z_1+3z_2=2-3i,$$
$$iz_1+(1+2i)z_2=1.$$

求 z_1，z_2.

22. 求方程 $z^4-16=0$ 的所有解.

23. 设 z 是复数，满足 $\mathrm{Re}z>0$. 证明 $\mathrm{Re}(1/z)>0$.

24. 设 z 是复数，满足 $\mathrm{Im}z>0$. 证明 $\mathrm{Im}(1/z)<0$.

25. 设 z_1，z_2 是两个复数且 z_1+z_2，z_1z_2 都是负实数. 证明 z_1，z_2 必为实数.

26. 证明

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{n}z_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Re}z_j$$

和

$$\mathrm{Im}\left(\sum_{j=1}^{n}z_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Im}z_j.$$

[和的实(虚)部等于实(虚)部的和.]用公式表示出相应的对复数乘法的猜测并证明它不成立.

27. 证明复数的二项式公式：

$$(z_1+z_2)^n=z_1^n+\binom{n}{1}z_1^{n-1}z_2+\cdots+\binom{n}{k}z_1^{n-k}z_2^k+\cdots+z_2^n,$$

这里 n 是正整数，二项式系数为

$$\binom{n}{k}:=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

28. 利用二项式公式(练习 27)计算 $(2-i)^5$.

29. 证明任意实数都不满足方程 $x^2=2$. [提示：假设 p/q 是它的解，这里 p 和 q 都是整数，那么 2 必整除 p 和
6 q. 这与分数总可写为两个无公因子的数之比的事实相矛盾.]

30. 实数系中的大小关系用符号“$>$”表示，其定义的基础是存在子集 $\mathcal{P}$(正实数集)具有下列性质：

(i) 对任意 $\alpha\neq0$，α 或 $-\alpha$(但不同时)属于 $\mathcal{P}$.

(ii) 若 α 与 β 属于 $\mathcal{P}$，则 $\alpha+\beta$ 也属于 $\mathcal{P}$.

(iii)若 α 与 β 属于$\mathcal{P}$，则 $\alpha\beta$ 也属于$\mathcal{P}$.

当集合$\mathcal{P}$存在时，记 $\alpha>\beta$ 当且仅当 $\alpha-\beta$ 属于$\mathcal{P}$[○]. 证明复数系不存在非空集$\mathcal{P}$满足性质(i)、(ii)和(iii).

[提示：论证 i 与 -i 都不属于这样的集合$\mathcal{P}$.]

31. 编一个程序计算复数的和、差、积、商. 输入输出参数要有相应的实部与虚部.

32. 计算乘积$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+i(bc+ad)$时，用直接的方法需要计算四次(实数的)乘法(和两次带符号的加法). 利用计算机计算乘法所用的时间往往远远多于加法. 设计一个程序计算$(a+bi)(c+di)$，使其只需计算三次乘法(需要更多次加法计算). [提示：先计算$(a+b)(c+d)$.]

1.2　复数的点表示

假定读者熟悉笛卡儿坐标系(见图1-1)，它建立了 xy 平面上的点与有序实数对之间的一一对应. 例如：有序数对$(-2, 3)$对应位于 y 轴左方 2 个单位 x 轴上方 3 个单位的点 P. 7

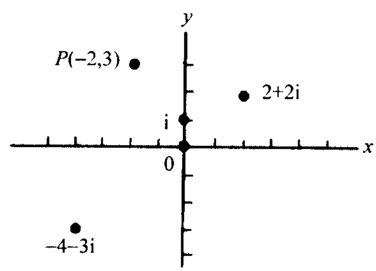

图 1-1　笛卡儿坐标系

笛卡儿坐标系提供了一种将复数表示为 xy 平面上的点的简便方法，即对任意复数$a+bi$，对应 xy 平面上一个坐标为(a, b)的点. 因此复数 $-2+3i$ 可由图 1-1 中的点 P 来表示. 图 1-1 中其余各点分别表示复数 0，i，$2+2i$ 和 $-4-3i$.

用 xy 平面描述复数时，称其为**复平面**或 **z 平面**.（有时称为阿干特(Argand)图；Caspar Wessel 和 Jean Pierre Argand 分别于 1797 年和 1806 年独立地提出了复数在平面上的表示.）因为 x 轴上的每一个点表示一个实数，故把 x 轴称为**实轴**. 类似地，y 轴上的点表示纯虚数，故称其为**虚轴**.

今后，我们把表示复数 z 的点简称为点 z；即点 $z=a+bi$ 是坐标为(a, b)的点.

例 1　假设质量分别为 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 的 n 个质点分别位于复平面上的 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 处. 说明该系统的质心是点

$$\hat{z}=\frac{m_1z_1+m_2z_2+\cdots+m_nz_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}.$$

解　设 $z_1=x_1+y_1i$，$z_2=x_2+y_2i$，$\cdots$，$z_n=x_n+y_ni$，令 M 为总质量 $\sum_{k=1}^{n} m_k$. 容易知道已给系统的质心坐标为$(\hat{x}, \hat{y})$，其中

$$\hat{x}=\frac{\sum_{k=1}^{n} m_kx_k}{M},\quad \hat{y}=\frac{\sum_{k=1}^{n} m_ky_k}{M}.$$

显然$\hat{x}$，$\hat{y}$分别为复数 $\left(\sum_{k=1}^{n} m_kz_k\right)/M=\hat{z}$的实部和虚部. ■

绝对值. 由庞特里亚金(Pythagorean)定理，从点 $z=a+bi$ 到原点的距离是$\sqrt{a^2+b^2}$. 下面给这种距离一个特殊的记号.

○ 事实上，这正是计算机中检验命题 $\alpha>\beta$ 的方法.

定义 3 $\sqrt{a^2+b^2}$称为复数 $z=a+bi$ 的**绝对值**(absolute value)或**模**(modulus)，用记号$|z|$表示，即$|z|:=\sqrt{a^2+b^2}$.

特别地，

8 $$|0|=0,\quad \left|\frac{\mathrm{i}}{2}\right|=\frac{1}{2},\quad |3-4\mathrm{i}|=\sqrt{9+16}=5.$$

因此复数 z 的模$|z|$恒为非负实数，并且 0 是模为 0 的唯一复数.

令 $z_1=a_1+b_1\mathrm{i}$，$z_2=a_2+b_2\mathrm{i}$. 那么

$$|z_1-z_2|=|(a_1-a_2)+(b_1-b_2)\mathrm{i}|=\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2},$$

它是坐标为(a_1,b_1)，(a_2,b_2)的两点间的距离(参见图 1-2). 从而，$|z_1-z_2|$给出了两点 z_1，z_2 间的距离. 它在描述平面上的某些曲线时是很有用的. 例如，考虑满足方程

$$|z-z_0|=r \tag{1}$$

的所有的点 z 的集合，这里 z_0 是一个给定的复数，r 是一个正实数. 这个点集由所有那些与 z_0 的距离为 r 的点组成. 因此方程(1)表示一个圆周.

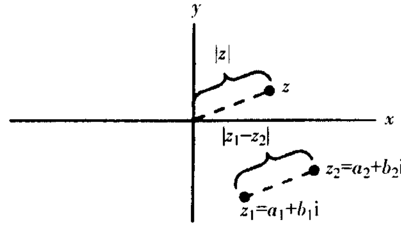

图 1-2 两点间的距离

例 2 描述满足下列方程的点集.

(a) $|z+2|=|z-1|$，　(b) $|z-1|=\mathrm{Re}z+1$.

解 (a)点 z 满足方程(a)的充分必要条件是它到点 -2 和点 1 的距离相等. 因此方程(a)为连接 -2 与 1 的线段的中垂线的方程；即满足方程(a)的点集为直线 $x=-\dfrac{1}{2}$.

一种更常规的方法是令 $z=x+\mathrm{i}y$，代入方程进行计算：

$$\begin{aligned}|z+2|&=|z-1|,\\ |x+\mathrm{i}y+2|&=|x+\mathrm{i}y-1|,\\ (x+2)^2+y^2&=(x-1)^2+y^2,\\ 4x+4&=-2x+1,\\ x&=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(b)方程(b)的几何意义不很明显，直接计算，得到$\sqrt{(x-1)^2+y^2}=x+1$，或 $y^2=4x$，它

9 表示一条抛物线(参见图 1-3). ■

复共轭. 点 $z=a+bi$ 关于实轴的对称点是 $z=a-bi$(参见图 1-4). 我们将会看到，$a+bi$ 与 $a-bi$ 之间的关系在复变理论中起了很重要的作用. 下面的定义给这个概念一个特别的记号.

定义 4 $a-bi$ 称为数 $z=a+bi$ 的复共轭(complex conjugate)，用记号$\bar{z}$表示，即$\bar{z}:=a-bi$.

于是，

$$\overline{-1+5\mathrm{i}}=-1-5\mathrm{i},\qquad \overline{\pi-\mathrm{i}}=\pi+\mathrm{i},\quad \bar{8}=8.$$

也有一些书中使用星号，即用 z^* 来表示 z 的复共轭.

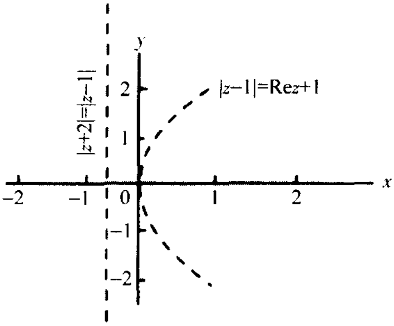

图 1-3　例 2 的图

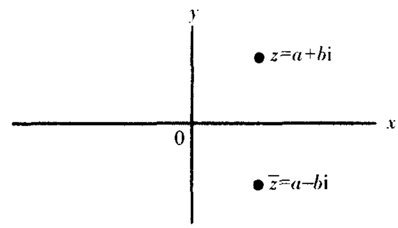

图 1-4　复共轭

由定义 4 知，$z=\bar{z}$ 当且仅当 z 是一个实数. 显然，两个复数的和(差)的共轭等于它们共轭的和(差)，即

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2},\quad \overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}.$$ 10

对于复数乘法来说，类似的结论就不那么直观.

例 3　证明两个复数的乘积的共轭等于它们的共轭的乘积.

证　只需证明

$$(\overline{z_1 z_2})=\overline{z_1}\,\overline{z_2}. \tag{2}$$

设 $z_1=a_1+b_1\mathrm{i}$，$z_2=a_2+b_2\mathrm{i}$. 那么

$$\begin{aligned}(\overline{z_1 z_2}) &= \overline{a_1a_2-b_1b_2+(a_1b_2+a_2b_1)\mathrm{i}}\\ &= a_1a_2-b_1b_2-(a_1b_2+a_2b_1)\mathrm{i}.\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\overline{z_1}\,\overline{z_2} &= (a_1-b_1\mathrm{i})(a_2-b_2\mathrm{i}) = a_1a_2-b_1b_2-a_1b_2\mathrm{i}-a_2b_1\mathrm{i}\\ &= a_1a_2-b_1b_2-(a_1b_2+a_2b_1)\mathrm{i}.\end{aligned}$$

因此(2)式成立. ■

除(2)以外，还有如下一些性质

$$\left(\overline{\frac{z_1}{z_2}}\right)=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_1}}\quad (z_2\neq 0); \tag{3}$$

$$\mathrm{Re}z=\frac{z+\bar{z}}{2}; \tag{4}$$

$$\mathrm{Im}z=\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}; \tag{5}$$

性质(4)表明复数与其共轭的和是实数，而(5)式说明它们的差是(纯)虚数. 一个复数的共轭的共轭是它本身：

$$(\bar{\bar{z}})=z. \tag{6}$$

根据定义 4 显然有

$$|z| = |\bar{z}|;$$

即点 z 与点 $\bar{z}$ 到原点的距离相等. 而且，由于

$$z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2,$$

我们有

11 $$z\bar{z} = |z|^2. \tag{7}$$

这是一个有用的事实：一个复数的模的平方等于这个复数与它的共轭的乘积.

其实，在 1.1 节除法运算的分母有理化过程中已经用到了复共轭. 例如，设 z_1，z_2 是复数，然后利用 $\overline{z_2}$ 把 z_1/z_2 写成分母为实数的比式：

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}. \tag{8}$$

特别地，

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}. \tag{9}$$

最后值得一提的是，可用一种或许更有启发性的方法来理解(2)式. 注意到我们表示一个复数时需要两个实数和记号 i，例如 $z=a+bi$，对它取共轭相当于改变 i 项的符号. 现在回忆一下 i 在计算中所扮演的角色，除了出现它的平方时用 -1 代替外，其余情况下 i 都不参与计算，仅是作为一个记号保留了下来. 因此，我们也可以用 j，λ，$\sqrt{-1}$ 或其他任何符号的平方去代替 -1. 实际上，由于 $-i$ 的平方也是 -1，所以用 $-i$ 代替 i 也不会影响到计算的合理性. 例如，在乘积 $(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)$ 中用 $-i$ 代替 i 后再做乘法，其结果的不同之处仅是 i 都换成了 $-i$. 用共轭的语言表达，正好是例 3 的结论[⊖].

练习 1.2

1. 证明：$\dfrac{z_1+z_2}{2}$ 是连接 z_1 与 z_2 的线段的中点.
2. 给定四个质量分别为 2，1，3，5 的质点，各自位于复平面上的点 $1+i$，$-3i$，$1-2i$，-6 处，求这个系统的质心.
3. 在 i，$2-i$，-3 各点中，哪个点距原点最远？
4. 令 $z=3-2i$，在复平面上画出点 z，$-z$，$\bar{z}$，$-\bar{z}$ 和 $1/z$；当 $z=2+3i$，$z=-2i$ 时，同样画出以上 5 个点.
5. 证明：点 1，$-1/2+i\sqrt{3}/2$，$-1/2-i\sqrt{3}/2$ 是一等边三角形的三个顶点.

12 6. 证明：点 $3+i$，6，$4+4i$ 是一直角三角形的三个顶点.

7. 描述复平面上满足下列各式所表示的点 z 的集合.

(a) $\mathrm{Im}z=-2$ (b) $|z-1+i|=3$

(c) $|2z-i|=4$ (d) $|z-1|=|z+i|$

(e) $|z|=\mathrm{Re}z+2$ (f) $|z-1|+|z+1|=7$

(g) $|z|=3|z-1|$ (h) $\mathrm{Re}z\geq 4$

⊖ 由于同样的原因，先用 $-\sqrt{2}$ 代替 $\sqrt{2}$ 再做乘法 $(3+2\sqrt{2})(4-3\sqrt{2})$ 与先做乘法再替换得到的结果是一样的.（试一下.）

(i) $|z-\mathrm{i}|<2$　　　(j) $|z|>6$

8. 分别用解析法和图形法证明 $|z-1|=|\bar{z}-1|$.

9. 设 r 为非负实数，证明 $|rz|=r|z|$.

10. 证明：$|\mathrm{Re}z|\leqslant|z|$，$|\mathrm{Im}z|\leqslant|z|$.

11. 证明：若 $|z|=\mathrm{Re}z$，则 z 是非负实数.

12. 证明性质(3)、(4)和(5).

13. 证明：若 $(\bar{z})^2=z^2$，则 z 是实数或纯虚数.

14. 证明：$|z_1z_2|=|z_1||z_2|$. [提示：利用方程(7)和(2)证明 $|z_1z_2|^2=|z_1|^2|z_2|^2$.]

15. 证明：对任意整数 k，有 $(\bar{z})^k=\overline{(z^k)}$ 成立(当 k 是负数时假定 $z\neq0$).

16. 证明：若 $|z|=1(z\neq1)$，则 $\mathrm{Re}[1/(1-z)]=\dfrac{1}{2}$.

17. 设 a_1，a_2，…，a_n 为实常数. 证明：若 z_0 是多项式方程 $z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\cdots+a_n=0$ 的一个根，那么 $\overline{z_0}$ 也是它的一个根.

18. 利用熟知的二次多项式的求根公式，给出 17 题中 $n=2$ 时的另外一种证明方法.

19. 已知点 z 关于实轴(水平线 $y=0$)的对称点是 z 的共轭复数 $\bar{z}$. 证明：点 z 关于直线 $ax+by=c$(a，b，c 是实数)的对称点是 $\dfrac{2\mathrm{i}c+(b-a\mathrm{i})\bar{z}}{b+a\mathrm{i}}$.

20. (复矩阵)设 $\boldsymbol{B}$ 是 m 行 n 列复矩阵. 对 $\boldsymbol{B}$ 的每个元素取共轭后再作转置(行与列互换)，得到的 n 行 m 列的矩阵记为 $\boldsymbol{B}^\dagger$. 即，如果 $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$，则 $\boldsymbol{B}^\dagger=[\overline{b_{ji}}]$. 例如：

$$\begin{bmatrix}\mathrm{i} & 3\\ 4-\mathrm{i} & -2\mathrm{i}\end{bmatrix}^\dagger=\begin{bmatrix}-\mathrm{i} & 4+\mathrm{i}\\ 3 & 2\mathrm{i}\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1+\mathrm{i}\\ 3\end{bmatrix}^\dagger=[1-\mathrm{i}\quad 3].$$ 13

设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ 是一 n 阶复矩阵，证明：

(a) 如果对任意 n 行 1 列复向量 $\boldsymbol{u}$ 都有 $\boldsymbol{u}^\dagger\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{A}$ 是零矩阵(即对所有的 i，j，有 $a_{ij}=0$). [提示：为证明 $a_{ij}=0$，取 $\boldsymbol{u}$ 为第 i 个与第 j 个分量都为 1、其他分量都为 0 的列向量.]

(b) 举例说明(a)中的假设换成 $\boldsymbol{u}$ 为实向量时，结论($\boldsymbol{A}$ 为零矩阵)不真. [提示：试找一个 2 阶(即 2 行 2 列)非零实矩阵 $\boldsymbol{A}$，使它对任意 2 维(即 2 行 1 列)实列向量 $\boldsymbol{u}$ 都有 $\boldsymbol{u}^\dagger\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}=0$ 成立.]

21. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶复矩阵. 若 $\boldsymbol{A}^\dagger=\boldsymbol{A}$(参考练习 20)，则称 $\boldsymbol{A}$ 为埃尔米特矩阵.

(a) 证明：如果 $\boldsymbol{A}$ 是埃尔米特矩阵，则对任意 n 维复列向量 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{u}^\dagger\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$ 是实数.

(b) 证明：如果 $\boldsymbol{B}$ 是 m 行 n 列复矩阵，则 $\boldsymbol{B}^\dagger\boldsymbol{B}$ 是埃尔米特矩阵.

(c) 证明：如果 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶复矩阵，$\boldsymbol{u}$ 是 n 维复列向量，则 $\boldsymbol{u}^\dagger\boldsymbol{B}^\dagger\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$ 必为非负实数.

1.3　向量与极式

复平面上的每一点 z 都可以用一个向量(即连接原点到点 z 的有向线段)来表示. 由于向量由它的长度和方向来决定，因此一个给定的向量经过平移后保持不变. 从而，由 $z=1+\mathrm{i}$ 确定的向量与以点 $2+\mathrm{i}$ 为起点、$3+2\mathrm{i}$ 为终点的有向线段确定的向量是相同的(见图 1-5). 注意任何平行于实轴的向量表示实数，而那些平行于虚轴的向量则表示纯虚数. 因此，向量 z 的长度是 $|z|$. 14

设 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 是分别由点 z_1 和 z_2 确定的向量. 图 1-6 说明向量的和 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$ 满足平行四边形法则. 如果 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，则图 1-6 中的向量 $\boldsymbol{v}$ 的终点具有坐标 $(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$，即它对应于点 z_1+z_2. 由此可知，**复数的加法与平面向量的加法运算法则是一致的.**