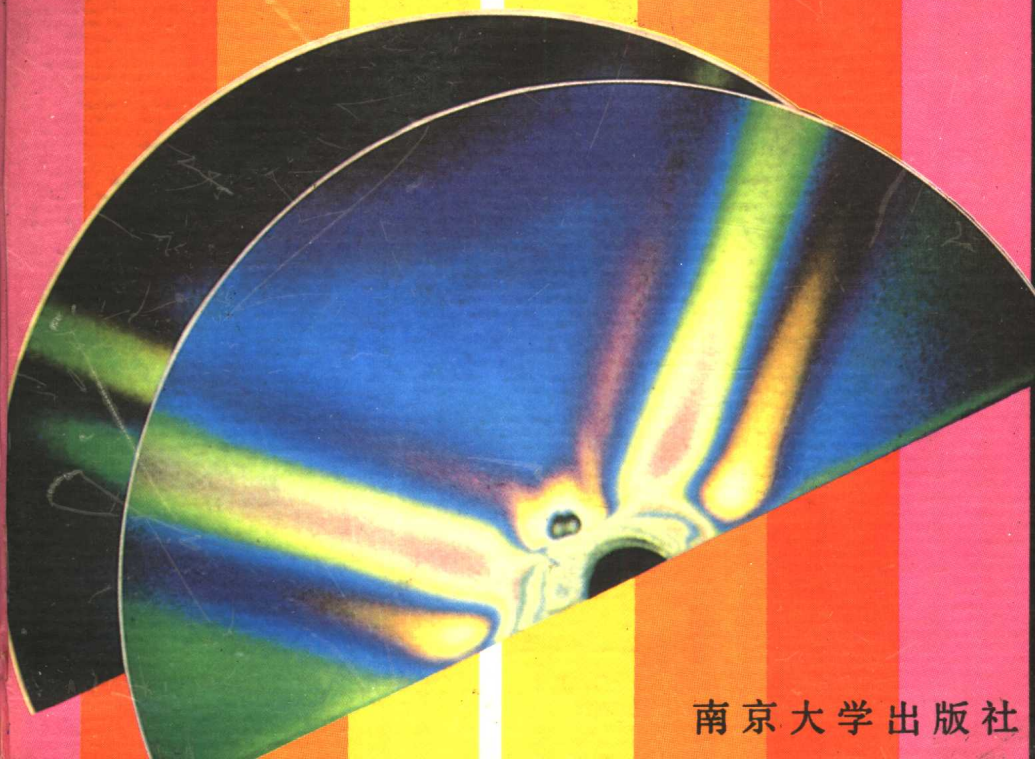


# 数学奥林匹克题典

数理化奥林匹克题解丛书



南京大学出版社

G1634.6

5

数理化奥林匹克题解丛书

# 数 学

## 奥林匹克题典

本书编写组 编



南京大学出版社

(苏)新登字 041 号

数理化奥林匹克题解丛书

数学奥林匹克题典

本书编写组 编

\*

南京大学出版社出版

(南京大学校内 邮政编码:210093)

江苏省新华书店发行 扬中市印刷厂印刷

\*

开本:850×1168 1/32 印张:54.375 字数:2189 千

1995年2月第1版 1997年1月第3次印刷

印数 16001—22000

ISBN 7-305-02290-X/O · 152

定价:54.00 元

# 《数理化奥林匹克题解丛书》编委会

|            |           |
|------------|-----------|
| <b>主 编</b> | 单 搏       |
| <b>副主编</b> | 胡炳生(常务)   |
|            | 何炳坤 杜先智   |
| <b>编 委</b> | (以姓氏笔画为序) |
|            | 王巧林 王金理   |
|            | 刘克和 杜先智   |
|            | 何炳坤 张振环   |
|            | 单 搏 胡礼祥   |
|            | 胡炳生 温业美   |

## 序

中学生的学科竞赛（包括数学、物理、化学与信息科学）在我国蓬勃开展，取得了可喜的成绩。特别是1992年，四门学科的国际竞赛中，我国学生均取得总分第一。充分证明泱泱大国，人才辈出，莘莘学子，聪明勤奋，预示在下个世纪，中国将成为科学民主的大国。

为了方便广大师生及对学科竞赛有兴趣的朋友，我们将数、理、化三科内国外的竞赛试题整理分类，编成以题解为中心的题典各一卷（信息科学的竞赛刚刚起步，俟有足够资料时再编册）。搜罗（在篇幅允许的条件下）尽量完整全面，解答务求正确简明。每册均附有索引，便于查寻出处。

竞赛题典这一工作在国内外还是首创，我们所作的工作仅是初步的，问题一定很多，敬请高明之士不吝指正。

单 璁

1992. 11.

## 编写说明

本卷收编了从1894年匈牙利第一届数学竞赛至1992年第三十三届IMO的近百年中国内外（高中）数学奥林匹克试题共3108题。每题都有题说和解答，指明其出处，给出一种较好的解法，并对某些有价值的别解给以说明和提示。

本书选题原则是：典范性和资料性并重。对国内外重大数学竞赛，如国际数学奥林匹克，中国数学奥林匹克（冬令营）、全国联赛，美国、匈牙利（1974年前）、加拿大等数学奥林匹克试题，逐届全选，其他竞赛题则择优精选。

全书题目按数学学科内容分五篇编排：

A——整数；B——代数；C——几何；D——三角；E——组合数学。

每篇又分若干小类，按年代先后顺序编号排列。书后附有重要竞赛历届试题编号索引，便于读者检索。

本书是编者集体分工合作的结果。在各人分头编写初稿的基础上，单璋对全书题稿进行了详细审订，并给出许多题目的新的简捷解法；胡炳生对全书进行总纂；胡礼祥、张振环、刘克和、王巧林参与部分题稿审阅。戴普庆、吴俊参与索引编制和图稿编订工作。

在本书编写过程中，中国科大苏淳教授、安徽师范大学丁秀芬、何苏阳和数学系资料室同志，在资料、制图和植字等方面，提供了帮助。编者还参阅和利用了大量有关数学竞赛的文献、资料

书刊。对于上述同志和有关的资料的作者，谨在此表示诚挚的感谢。

数学奥林匹克题海浩瀚，妙解迭出，因受资料、知识水平和时间的限制，本书在选题、优解、分类等方面，一定存在不少问题、缺点，甚至错误，敬请广大读者批评指正。

编者

1992年10月

# 目 录

## 序

### 编写说明

|                                      |         |
|--------------------------------------|---------|
| A 整数                                 | ( 1 )   |
| A 1 特殊的自然数 ( A1-001~067 )            | ( 1 )   |
| A 2 求解问题 ( A2-001~078 )              | ( 28 )  |
| A 3 数字问题 ( A3-001~106 )              | ( 59 )  |
| A 4 整除 ( A4-001~098 )                | ( 101 ) |
| A 5 综合题 ( A5-001~079 )               | ( 140 ) |
| B 代数                                 | ( 181 ) |
| B 1 集合、数、式 ( B1-001~235 )            | ( 181 ) |
| 集合 ( B1-001~030 )                    | ( 181 ) |
| 数 ( 有理数、实数、复数 ) ( B1-031~098 )       | ( 197 ) |
| 一元多项式 ( B1-099~162 )                 | ( 225 ) |
| 式子化简与求值 ( B1-163~205 )               | ( 257 ) |
| 恒等式证明 ( B1-206~235 )                 | ( 272 ) |
| B 2 方程 ( B2-001~245 )                | ( 286 ) |
| 一元整式方程 ( B2-001~091 )                | ( 286 ) |
| 多元整式方程 ( 组 ) ( B2-092~150 )          | ( 327 ) |
| 分式方程 ( 组 )、无理方程 ( 组 ) ( B2-151~186 ) | ( 362 ) |
| 超越方程 ( B2-187~207 )                  | ( 379 ) |
| 不定方程 ( B2-208~245 )                  | ( 388 ) |
| B 3 不等式 ( B3-001~191 )               | ( 404 ) |
| 整式不等式 ( B3-001~087 )                 | ( 404 ) |

|                          |         |
|--------------------------|---------|
| 分式不等式 (B3-088~146) ..... | ( 446 ) |
| 无理不等式 (B3-147~162) ..... | ( 482 ) |
| 超越不等式 (B3-163~191) ..... | ( 490 ) |

#### B4 二项式定理、数学归纳法、概率

|                      |         |
|----------------------|---------|
| ( B4-001~048 ) ..... | ( 503 ) |
|----------------------|---------|

#### B5 函数、数列、极限 ( B5-001~266 ) .....

|                                 |         |
|---------------------------------|---------|
| 函数定义域、值域、解析式 (B5-001~082) ..... | ( 526 ) |
| 函数性态 (B5-083~123) .....         | ( 576 ) |
| 等差数列、等比数列 (B5-124~160) .....    | ( 602 ) |
| 递归数列 (B5-161~202) .....         | ( 619 ) |
| 杂数列 (B5-203~239) .....          | ( 647 ) |
| 数列求和 (B5-240~255) .....         | ( 667 ) |
| 极限 (B5-256~266) .....           | ( 676 ) |

#### C 几何 .....

##### C1 平面几何证明 ( C1-001~420 ) .....

|                                  |         |
|----------------------------------|---------|
| 线段相等 (C1-001~032) .....          | ( 685 ) |
| 角相等 (C1-033~053) .....           | ( 701 ) |
| 和差倍分 (C1-054~091) .....          | ( 715 ) |
| 垂直与平行 (C1-092~117) .....         | ( 737 ) |
| 三角形 (C1-118~163) .....           | ( 750 ) |
| 多边形 (C1-164~191) .....           | ( 776 ) |
| 圆 (C1-192~230) .....             | ( 793 ) |
| 面积问题 (C1-231~288) .....          | ( 814 ) |
| 几何不等式 (C1-289~377) .....         | ( 855 ) |
| 共点线(圆)、共线(圆)点 (C1-378~420) ..... | ( 904 ) |

##### C2 平面几何求解 ( C2-001~252 ) .....

|                          |          |
|--------------------------|----------|
| 直线图形 (C2-001~072) .....  | ( 926 )  |
| 多边形 (C2-073~117) .....   | ( 968 )  |
| 圆 (C2-118~147) .....     | ( 999 )  |
| 轨迹与作图 (C2-148~252) ..... | ( 1017 ) |

|     |                          |          |
|-----|--------------------------|----------|
| C 3 | 立体几何证明 ( C3-001~088 )    | ( 1077 ) |
|     | 基本题 ( C3-001~018 )       | ( 1077 ) |
|     | 四面体 ( C3-019~056 )       | ( 1086 ) |
|     | 柱体 ( C3-057~069 )        | ( 1109 ) |
|     | 锥体 ( C3-070~074 )        | ( 1117 ) |
|     | 球 ( C3-075~088 )         | ( 1121 ) |
| C 4 | 立体几何求解 ( C4-001~143 )    | ( 1127 ) |
|     | 计算题 ( C4-001~092 )       | ( 1127 ) |
|     | 极值与几何不等式 ( C4-093~123 )  | ( 1193 ) |
|     | 轨迹与作图 ( C4-124~143 )     | ( 1214 ) |
| C 5 | 解析几何 ( C5-001~119 )      | ( 1226 ) |
|     | 证明题 ( C5-001~035 )       | ( 1226 ) |
|     | 一般求解题 ( C5-036~063 )     | ( 1250 ) |
|     | 曲线与方程 ( C5-064~105 )     | ( 1266 ) |
|     | 极值及其他 ( C5-106~119 )     | ( 1293 ) |
| D   | 三角                       | ( 1301 ) |
| D 1 | 求值与作图 ( D1-001~038 )     | ( 1301 ) |
| D 2 | 三角恒等式 ( D2-001~048 )     | ( 1324 ) |
| D 3 | 三角不等式 ( D3-001~055 )     | ( 1355 ) |
| D 4 | 解三角形 ( D4-001~028 )      | ( 1386 ) |
| D 5 | 三角方程 ( D5-001~014 )      | ( 1402 ) |
| E   | 组合数学                     | ( 1411 ) |
| E 1 | 存在性问题 ( E1-001~121 )     | ( 1411 ) |
|     | 关于数和集合的问题 ( E1-001~030 ) | ( 1411 ) |
|     | 关于人和物的问题 ( E1-031~076 )  | ( 1427 ) |
|     | 关于图形的问题 ( E1-077~121 )   | ( 1446 ) |
| E 2 | 计数和离散极值 ( E2-001~110 )   | ( 1471 ) |
|     | 计数 ( E2-001~054 )        | ( 1471 ) |
|     | 离散极值 ( E2-055~110 )      | ( 1500 ) |

|                                    |               |
|------------------------------------|---------------|
| <b>E3 组合几何 (E3-001~107) .....</b>  | <b>(1534)</b> |
| <b>平面几何问题 (E3-001~060) .....</b>   | <b>(1534)</b> |
| <b>立体几何问题 (E3-061~075) .....</b>   | <b>(1573)</b> |
| <b>覆盖问题 (E3-076~107) .....</b>     | <b>(1582)</b> |
| <b>E4 变换和操作 (E4-001~062) .....</b> | <b>(1599)</b> |
| <b>E5 对策和逻辑 (E5-001~090) .....</b> | <b>(1639)</b> |
| <b>国内外部分竞赛题编号索引 .....</b>          | <b>(1690)</b> |

## A 整 数

### A1 特殊的自然数

**A1-001** 假设  $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ , 这里  $2^p - 1$  是素数, 证明: 数  $n$  的所有不等于  $n$  本身的约数之和恰好等于  $n$ .

〔题说〕 1903年匈牙利数学奥林匹克题1.

〔证〕 令  $q = 2^p - 1$ , 由于  $q$  是素数, 数  $n = 2^{p-1}q$  的全部小于它自己的约数为:

$$1, 2, 2^2, \dots, 2^{p-2}, 2^{p-1}, \\ q, 2q, 2^2q, \dots, 2^{p-2}q.$$

和

$$(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{p-1}) + (q + 2q + \dots + 2^{p-2}q) \\ = (2^p - 1) + q(2^{p-1} - 1) = q \cdot 2^{p-1} = n.$$

**A1-002** 假设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是数  $1, 2, \dots, n$  的某种排列. 证明: 如果  $n$  是奇数, 则乘积

$$(a_1 - 1)(a_2 - 2) \cdots (a_n - n)$$

是偶数.

〔题说〕 1906年匈牙利数学奥林匹克题8.

〔证〕 因子的总个数是奇数, 而它们的和等于零, 零是偶数. 如果所有的因子都是奇数, 那么它们的和应该是奇数. 因此, 至少有一个因子是偶数, 于是因子的乘积是偶数.

别证: 由于  $n$  是奇数, 故在  $1, 2, \dots, n$  与  $a_1, a_2, \dots, a_n$  中总共有  $n + 1$  个奇数. 但是因子  $a_i - i$  只有  $n$  个, 所以至少有一个因子中的被减数与减数都是奇数. 即至少有一个因子是偶数.

**A1-003** 证明: 四个连续的自然数的乘积不能表示成整数平方的形式.

〔题说〕 1926年匈牙利数学奥林匹克题2.

〔证〕 四个连续的自然数的乘积可以表示成  $n(n+1)(n+2)(n+3)$

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3) &= (n^2+3n)(n^2+3n+2) \\ &= (n^2+3n+1)^2 - 1. \end{aligned}$$

它包含在两个连续整数  $n^2+3n$  和  $n^2+3n+1$  的平方之间。因此它不可能表示成整数平方的形式。

A1-004 证明：任意 4 个连续整数的乘积同 1 的和是一个完全平方数。

〔题说〕 第七届（1941年）莫斯科数学奥林匹克七、八年级题 5。

〔证〕 设这四个连续整数为  $n, n+1, n+2, n+3$

$$\begin{aligned} & n(n+1)(n+2)(n+3)+1 \\ &= (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1 \\ &= (n^2+3n+1)^2 - 1^2 + 1 \\ &= (n^2+3n+1)^2. \end{aligned}$$

A1-005 试证四个连续自然数的乘积加上 1 的算术平方根仍为自然数。

〔题说〕 1962年上海市赛高三决赛题 1。

〔证〕 设四个连续自然数为  $n, n+1, n+2, n+3$ ，则有

$$\begin{aligned} & \sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1} \\ &= \sqrt{(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1} \\ &= \sqrt{(n^2+3n+1)^2} \\ &= n^2+3n+1 \end{aligned}$$

A1-006 证明：在任何一群人中，认识这一群人中奇数个人的人有偶数个。

〔题说〕 1943年匈牙利数学奥林匹克题 1。本题有很多叙述方式。例如：在一群人中，和奇数个人握过手的人有偶数个，在任何一个多面体中，引出奇数条棱的顶点有偶数个。

〔证〕 将人作为点。如果两个人互相认识，就在相应的两点间连一条边。点  $V$  引出的边数称为点  $V$  的次数。各点次数之和是偶数（等于图中边数的 2 倍）。因此，奇顶点（次数为奇数的点）的个数必为偶数，这就是要证明的结论。

A1-007 假设  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$  是这样的实数，使得对于任何整数  $x$  和  $y$ ，数

$$a_1x + b_1y + c_1 \quad \text{和} \quad a_2x + b_2y + c_2$$

中至少有一个是偶整数。证明：两组系数  $a_1, b_1, c_1$  和  $a_2, b_2, c_2$  中至少有一组全是整数。

〔题说〕 1950年匈牙利数学奥林匹克题 8。

〔证〕 令 $(x, y) = (1, 0), (0, 0), (-1, 0)$ 得到的两组值 $a_1 + c_1, c_1, -a_1 + c_1$ 与 $a_2 + c_2, c_2, -a_2 + c_2$ 中至少有三个数是偶数, 因此有一组中至少有两个偶数, 不妨设 $a_1 + c_1, c_1, -a_1 + c_1$ 中至少有两个偶数, 从而易知 $a_1, c_1$ 都是整数.

同样, 令 $(x, y) = (0, 1), (0, 0), (0, -1)$ , 可知 $b_1, c_1$ 为整数或 $b_2, c_2$ 为整数. 若为前者, 结论已经成立. 若 $b_2, c_2$ 为整数, 再令 $(x, y) = (1, 1)$ 得 $a_1 + b_1 + c_1$ 或 $a_2 + b_2 + c_2$ 为偶数. 在 $a_1 + b_1 + c_1$ 为偶数时,  $a_1, b_1, c_1$ 全为整数. 在 $a_2 + b_2 + c_2$ 为偶数时,  $a_2, b_2, c_2$ 全为整数.

A1-008 假设 $n$ 是自然数,  $d$ 是 $2n^2$ 的正约数.

证明:  $n^2 + d$ 不是完全平方.

〔题说〕 1953年匈牙利数学奥林匹克题2.

〔证〕 设 $2n^2 = kd$ ,  $k$ 是正整数, 如果 $n^2 + d$ 是整数 $x$ 的平方, 那么

$$k^2 x^2 = k^2 (n^2 + d) = n^2 (k^2 + 2k).$$

但这是不可能的, 因为 $k^2 x^2$ 与 $n^2$ 都是完全平方, 而由 $k^2 < k^2 + 2k < (k+1)^2$ 得出 $k^2 + 2k$ 不是平方数.

A1-009 求一个四位数, 它的前两位数字及后两位数字分别相同, 而该数本身等于一个整数的平方.

〔题说〕 1956—1957年波兰数学奥林匹克一试题1.

〔解〕 设所求的四位数为 $x = \overline{aabb}$  则

$$\begin{aligned} x &= 1000a + 100a + 10b + b \\ &= 11(100a + b). \end{aligned}$$

其中 $0 < a \leq 9, 0 \leq b \leq 9$ . 可见平方数 $x$ 被11整除, 从而 $x$ 被 $11^2$ 整除. 因此, 数 $100a + b = 99a + (a + b)$ 能被11整除, 于是 $a + b$ 能被11整除. 但 $0 < a + b \leq 18$ , 以 $a + b = 11$ . 于是 $x = 11^2 (9a + 1)$ , 由此可知 $9a + 1$ 是某个自然数的平方. 对 $a = 1, 2, \dots, 9$ 逐一检验, 易知仅 $a = 7$ 时,  $9a + 1$ 为平方数, 故所求的四位数是 $7744 = 88^2$ .

A1-010 写出十个连续的自然数, 个个都要是合数.

〔题说〕 1957年上海市赛高二复赛题1. 高三复赛题1.

〔解〕 这十个连续自然数为:

$$11! + 2, 11! + 3, 11! + 4, \dots, 11! + 11.$$

A1-011 假设 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ 和 $b$ 是满足关系式

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = b^2$$

的整数。证明：这些数不可能都是奇数。

〔题说〕 1931年匈牙利数学奥林匹克题2。

〔证〕 如果这六个数都是奇数，由于奇数的平方被8除时，余数总是1，等式

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = b^2$$

的左边被8除时余5，而右边被8除时余1。矛盾。

A1-012 已知各项均为正整数的算术级数，其中一项是完全平方数，证明：此级数一定含有无穷多个完全平方数。

〔题说〕 1963年全俄数学奥林匹克十年级题2。算术级数有无穷多项。

〔证〕 设此算术级数公差是 $d$ ，且其中一项 $a = m^2 (m \in \mathbb{N})$ 。于是

$$a + (2km + dk^2)d = (m + kd)^2$$

对于任何 $k \in \mathbb{N}$ ，都是该算术级数中的项，且又是完全平方数。

A1-013 求一个最大的完全平方数，在划掉它的最后两位数后，仍得到一个完全平方数（假定划掉的两个数字中的一个非零）。

〔题说〕 1964年全俄数学奥林匹克十一年级题1。

〔解〕 设 $n^2$ 满足条件，令 $n^2 = 100a^2 + b$

其中 $0 < b < 100$ 。于是 $n > 10a$ ，即 $n \geq 10a + 1$ 。

因此  $b = n^2 - 100a^2 \geq 20a + 1$ 。

由此得  $20a + 1 < 100$ ，所以 $a \leq 4$ 。

经验算，仅当 $a = 4$ 时， $n = 41$ 满足条件。若 $n > 41$ 则 $n^2 - 40^2 \geq 42^2 - 40^2 > 100$ 。因此，满足本题条件的最大的完全平方数为 $41^2 = 1681$ 。

A1-014 证明：如果整数 $a$ 和 $b$ 满足关系式： $2a^2 + a = 3b^2 + b$ ，那么 $a - b$ 和 $2a + 2b + 1$ 是整数的平方。

〔题说〕 1964—1965年波兰数学奥林匹克三试题3。

〔证〕 已知关系式即

$$(a - b)(2a + 2b + 1) = b^2. \quad (1)$$

若 $b = 0$ ，则 $a = b = 0$ ，结论显然成立。

若 $b \neq 0$ ，则 $a \neq b$ 。设 $a = a_1d$ ， $b = b_1d$ ， $a_1$ 与 $b_1$ 互质， $d$ 为非零整数。

(1)即

$$(a - b)(2a + 2b + 1) = b^2 d^2. \quad (2)$$

因为 $(2a + 2b + 1, d) = (1, d) = 1$ ，所以 $d^2 \mid (a - b)$ ，

$$\frac{a-b}{d^2} \cdot (2a+2b+1) = b_1^2. \quad (3)$$

因为  $(\frac{a-b}{d}, b_1) = (a_1 - b_1, b_1) = (a_1, b_1) = 1$ , 所以由(3)得

$$\frac{a-b}{d^2} = \pm 1, \quad 2a+2b+1 = \pm b_1^2.$$

但将  $a-b = -d^2$  代入原关系式得

$$2a^2 - d^2 = 3b^2.$$

约去  $d^2$  得

$$2a_1^2 - 1 = 3b_1^2. \quad (4)$$

左边  $\equiv \pm 1 \pmod{3}$ , 因此(4)不可能成立. 从而

$$a-b = d^2, \quad 2a+2b+1 = b_1^2.$$

A1-015 求所有的素数  $p$ , 使  $4p^2+1$  和  $6p^2+1$  也是素数.

〔题说〕 1964—1965年波兰数学奥林匹克二试题1.

〔解〕 当  $p \equiv \pm 1 \pmod{5}$  时,  $5 \mid 4p^2+1$ . 当  $p \equiv \pm 2 \pmod{5}$  时,  $5 \mid 6p^2+1$ . 所以本题只有一个解  $p=5$ .

A1-016 在某个星系的每一个星球上, 都有一位天文学家在观测最近的星球. 若每两个星球间的距离都不相等, 证明: 当星球为奇数个时, 一定有一个星球未被任何人观测.

〔题说〕 1966年全俄数学奥林匹克八年级题1.

〔证〕 设有  $n$  颗星球. 先选出相距最近的两颗, 设为  $A$  和  $B$ .  $A$ 、 $B$  上的两位天文学家一定可以互相看到对方星球. 假如这两颗之一被其他某个星球上的天文学家看到, 那么余下  $n-3$  个天文学家, 因此, 余下的  $n-2$  颗星球中, 一定有一颗星球不被人观测.

假如这两颗星球都不被其他星球上的人观测, 则对其余  $n-2$  颗星重复上述的讨论, 依次下去. 因为  $n$  是奇数, 最后必存在一颗, 它不被任何别的星球上的天文学家观测.

A1-017 能否有这样的自然数  $x$  和  $y$ , 使  $x^2+y$  和  $y^2+x$  都是整数的平方?

〔题说〕 1966年全俄数学奥林匹克八年级题8.

〔解〕 不存在满足条件的自然数  $x$ 、 $y$ . 事实上, 设  $x \geq y$ , 则

$$x^2 < x^2 + y \leq x^2 + x < (x+1)^2.$$

因此,  $x^2 + y$  不可能是整数的平方.

A1-018 假设  $n$  是整数. 证明: 如果

$$2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}$$

是整数, 那么它是完全平方.

〔题说〕 1969年匈牙利数学奥林匹克题1.

〔证〕 设  $m = 2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}$  是整数, 则

$$4(28n^2 + 1) = (m - 2)^2 = m^2 - 4m + 4.$$

由此看出  $m$  应是偶数. 设  $m = 2m_1$ , 我们得到

$$28n^2 = m_1^2 - 2m_1.$$

易见  $m_1$  也是偶数. 设  $m = 2m_1 = 4k$ , 那么

$$7n^2 = k^2 - k.$$

因为  $k$  和  $k - 1$  是互素的, 所以

$$(a) \begin{cases} k = 7A^2 \\ k - 1 = B^2 \end{cases} \quad \text{或} \quad (b) \begin{cases} k = A^2 \\ k - 1 = 7B^2 \end{cases}$$

其中  $A$  和  $B$  是整数,  $AB = n$ .

因为  $B^2 \equiv 1, 2, 4 \pmod{7}$ , 所以情况 (a) 不可能发生. 由 (b) 得  $m = (2A)^2$ , 因此结论成立.

由于 Pell 方程  $A^2 - 7B^2 = 1$  有无穷多解, 所以存在无穷多个  $n$ , 使  $m = 2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}$  为整数. 例如  $n = 24$  时,  $m = 2 + 2 \times 127 = 256$ .

A1-019 证明存在无限多个自然数  $a$  有下列性质: 对任何自然数  $n, 2 \leq n \leq a$  都不是素数.

〔题说〕 第十一届(1969年)国际数学奥林匹克题1 本题由民主德国提供.

〔证〕 对任意整数  $m > 1$  及自然数  $n$ , 有

$$\begin{aligned} n^4 + 4m^4 &= (n^2 + 2m^2)^2 - 4m^2n^2 \\ &= (n^2 + 2mn + 2m^2)(n^2 - 2mn + 2m^2). \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} n^2 + 2mn + 2m^2 &> n^2 - 2mn + 2m^2 \\ &\equiv (n - m)^2 + m^2 \geq m^2 > 1. \end{aligned}$$

故  $n^4 + 4m^4$  不是素数. 取  $a = 4 \cdot 2^4, 4 \cdot 3^4, \dots$  就得到无限多个符合要求的