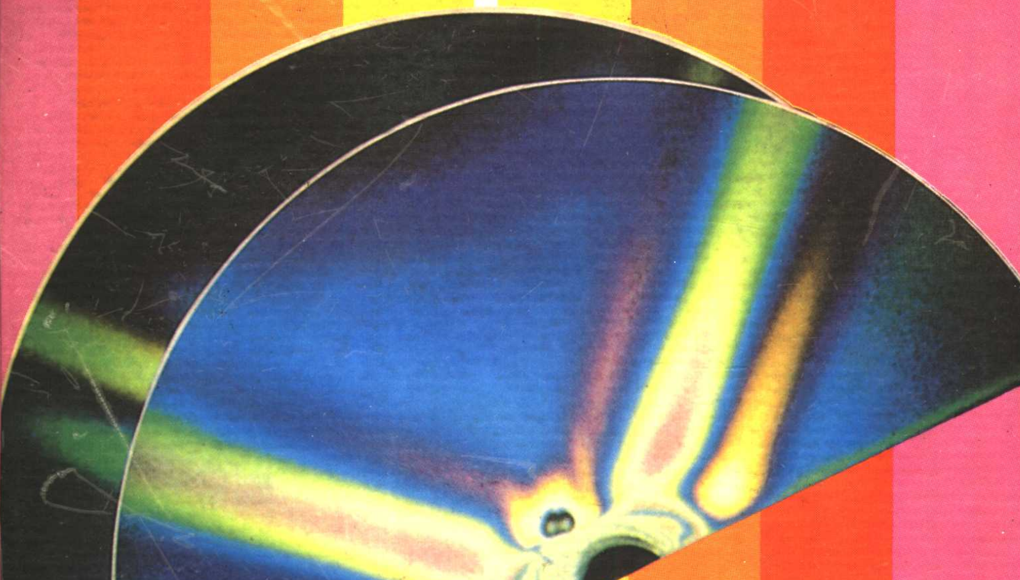
数学奥林匹克题典

数理化奥林匹克题解丛书



南京大学出版社

数理化奥林匹克题解丛书

数　学
奥林匹克题典

本书编写组　编

南京大学出版社

(苏)新登字 011 号

数理化奥林匹克题解丛书
数学奥林匹克题典
本书编写组　编
*
南京大学出版社出版
(南京大学校内　邮政编码:210093)
江苏省新华书店发行　扬中市印刷厂印刷
*
开本:850×1168　1/32　印张:54.375　字数:2189 千
1995 年 2 月第 1 版　　1997 年 1 月第 3 次印刷
印数 16001—22000
ISBN 7-305-02290-X/O·152
定价:54.00 元

《数理化奥林匹克题解丛书》编委会

主　编	单　墫
副主编	胡炳生(常务)
	何炳坤　杜先智
编　委	(以姓氏笔画为序)
	王巧林　王金理
	刘克和　杜先智
	何炳坤　张振环
	单　墫　胡礼祥
	胡炳生　温业美

序

中学生的学科竞赛（包括数学、物理、化学与信息科学）在我国蓬勃开展，取得了可喜的成绩。特别是1992年，四门学科的国际竞赛中，我国学生均取得总分第一。充分证明泱泱大国，人才辈出，莘莘学子，聪明勤奋，预示在下个世纪，中国将成为科学民主的大国。

为了方便广大师生及对学科竞赛有兴趣的朋友，我们将数、理、化三科内国外的竞赛试题整理分类，编成以题解为中心的题典各一卷（信息科学的竞赛刚刚起步，俟有足够资料时再编册）。搜罗（在篇幅允许的条件下）尽量完整全面，解答务求正确简明。每册均附有索引，便于查寻出处。

竞赛题典这一工作在国内外还是首创，我们所作的工作仅是初步的，问题一定很多，敬请高明之士不吝指正。

单 墫

1992.11.

编 写 说 明

本卷收编了从1894年匈牙利第一届数学竞赛至1992年第三十三届IMO的近百年中国内外（高中）数学奥林匹克试题共3108题。每题都有题说和解答，指明其出处，给出一种较好的解法，并对某些有价值的别解给以说明和提示。

本书选题原则是：典范性和资料性并重。对国内外重大数学竞赛，如国际数学奥林匹克，中国数学奥林匹克（冬令营）、全国联赛，美国、匈牙利（1974年前）、加拿大等数学奥林匹克试题，逐届全选，其他竞赛题则择优精选。

全书题目按数学学科内容分五篇编排：

A——整数；B——代数；C——几何；D——三角；E——组合数学。

每篇又分若干小类，按年代先后顺序编号排列。书后附有重要竞赛历届试题编号索引，便于读者检索。

本书是编者们集体分工合作的结果。在各人分头编写初稿的基础上。单墫对全书题稿进行了详细审订，并给出许多题目的新的简捷解法；胡炳生对全书进行总纂；胡礼祥、张振环、刘克和、王巧林参与部分题稿审阅。戴普庆、吴俊参与索引编制和图稿编订工作。

在本书编写过程中，中国科大苏淳教授、安徽师范大学丁秀芬、何苏阳和数学系资料室同志，在资料、制图和植字等方面，提供了帮助。编者还参阅和利用了大量有关数学竞赛的文献、资料和

书刊。对于上述同志和有关的资料的作者，谨在此表示诚挚的感谢。

数学奥林匹克题海浩瀚，妙解迭出，因受资料、知识水平和时间的限制，本书在选题、优解、分类等方面，一定存在不少问题、缺点，甚至错误，敬请广大读者批评指正。

编　者

1992年10月

目 录

A 整　　数

A1　特殊的自然数

A1-001　假设$n=2^{p-1}(2^p-1)$，这里2^p-1是素数，证明：数n的所有不等于n本身的约数之和恰好等于n。

〔题说〕　1903年匈牙利数学奥林匹克题1。

〔证〕　令$q=2^p-1$，由于q是素数，数$n=2^{p-1}q$的全部小于它自己的约数为：

$$1,\ 2,\ 2^2,\ \cdots,\ 2^{p-2},\ 2^{p-1},$$
$$q,\ 2q,\ 2^2q,\ \cdots,\ 2^{p-2}q.$$

和

$$(1+2+2^2+\cdots 2^{p-1})+(q+2q+\cdots+2^{p-2}q)$$
$$=(2^p-1)+q(2^{p-1}-1)=q\cdot 2^{p-1}=n.$$

A1-002　假设a_1，a_2，…，a_n是数1，2，…，n的某种排列。证明：如果n是奇数，则乘积

$$(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)$$

是偶数。

〔题说〕　1906年匈牙利数学奥林匹克题3。

〔证〕　因子的总个数是奇数，而它们的和等于零，零是偶数。如果所有的因子都是奇数，那么它们的和应该是奇数。因此，至少有一个因子是偶数，于是因子的乘积是偶数。

别证：由于n是奇数，故在1，2，…，n与a_1，a_2，…，a_n中总共有$n+1$个奇数。但是因子a_i-i只有n个，所以至少有一个因子中的被减数与减数都是奇数。即至少有一个因子是偶数。

A1-003　证明：四个连续的自然数的乘积不能表示成整数平方的形式。

〔题说〕　1926年匈牙利数学奥林匹克题2。

〔证〕　四个连续的自然数的乘积可以表示成

$$n(n+1)(n+2)(n+3)=(n^2+3n)(n^2+3n+2)$$
$$=(n^2+3n+1)^2-1.$$

它包含在两个连续整数n^2+3n和n^2+3n+1的平方之间。因此它不可能表示成整数平方的形式。

A1-004 证明：任意4个连续整数的乘积同1的和是一个完全平方数。

〔题说〕 第七届（1941年）莫斯科数学奥林匹克七、八年级题5。

〔证〕 设这四个连续整数为n，$n+1$，$n+2$，$n+3$

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1$$
$$=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1$$
$$=(n^2+3n+1)^2-1^2+1$$
$$=(n^2+3n+1)^2.$$

A1-005 试证四个连续自然数的乘积加上1的算术平方根仍为自然数。

〔题说〕 1962年上海市赛高三决赛题1。

〔证〕 设四个连续自然数为n，$n+1$，$n+2$，$n+3$，则有

$$\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1}$$
$$=\sqrt{(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1}$$
$$=\sqrt{(n^2+3n+1)^2}$$
$$=n^2+3n+1$$

A1-006 证明：在任何一群人中，认识这一群人中奇数个人的人有偶数个。

〔题说〕 1943年匈牙利数学奥林匹克题1。本题有很多叙述方式。例如：在一群人中，和奇数个人握过手的人有偶数个，在任何一个多面体中，引出奇数条棱的顶点有偶数个。

〔证〕 将人作为点。如果两个人互相认识，就在相应的两点间连一条边。点V引出的边数称为点V的次数。各点次数之和是偶数（等于图中边数的2倍）。因此，奇顶点（次数为奇数的点）的个数必为偶数，这就是要证明的结论。

A1-007 假设a_1，b_1，c_1，a_2，b_2，c_2是这样的实数，使得对于任何整数x和y，数

$$a_1x+b_1y+c_1 \quad 和 \quad a_2x+b_2y+c_2$$

中至少有一个是偶整数。证明：两组系数a_1，b_1，c_1和a_2，b_2，c_2中至少有一组全是整数。

〔题说〕 1950年匈牙利数学奥林匹克题3。

〔证〕 令$(x, y)=(1, 0), (0, 0), (-1, 0)$得到的两组值$a_1+c_1, c_1, -a_1+c_1$ 与 $a_2+c_2, c_2, -a_2+c_2$中至少有三个数是偶数。因此有一组中至少有两个偶数，不妨设$a_1+c_1, c_1, -a_1+c_1$中至少有两个偶数，从而易知a_1, c_1都是整数。

同样，令$(x,y)=(0, 1), (0, 0), (0, -1)$，可知$b_1$、$c_1$为整数或$b_2$、$c_2$为整数。若为前者，结论已经成立。若$b_2$、$c_2$为整数，再令$(x,y)=(1,1)$得$a_1+b_1+c_1$或$a_2+b_2+c_2$为偶数。在$a_1+b_1+c_1$为偶数时，$a_1$、$b_1$、$c_1$全为整数。在$a_2+b_2+c_2$为偶数时，$a_2$、$b_2$、$c_2$全为整数。

A1-008 假设n是自然数，d是$2n^2$的正约数。

证明：n^2+d不是完全平方。

〔题说〕 1953年匈牙利数学奥林匹克题2。

〔证〕 设$2n^2=kd$，k是正整数，如果n^2+d是整数x的平方，那么

$$k^2x^2=k^2(n^2+d)=n^2(k^2+2k).$$

但这是不可能的，因为k^2x^2与n^2都是完全平方，而由$k^2<k^2+2k<(k+1)^2$得出k^2+2k不是平方数。

A1-009 求一个四位数，它的前两位数字及后两位数字分别相同，而该数本身等于一个整数的平方。

〔题说〕 1956—1957年波兰数学奥林匹克一试题1。

〔解〕 设所求的四位数为$x=\overline{aabb}$ 则

$$x=1000a+100a+10b+b$$
$$=11(100a+b).$$

其中$0<a\leqslant 9$，$0\leqslant b\leqslant 9$。可见平方数x被11整除，从而x被11^2整除。因此，数$100a+b=99a+(a+b)$能被11整除，于是$a+b$能被11整除。但$0<a+b\leqslant 18$，以$a+b=11$。于是$x=11^2(9a+1)$，由此可知$9a+1$是某个自然数的平方。对$a=1, 2, \cdots\cdots, 9$逐一检验，易知仅$a=7$时，$9a+1$为平方数，故所求的四位数是$7744=88^2$。

A1-010 写出十个连续的自然数，个个都要是合数。

〔题说〕 1957年上海市赛高二复赛题1。高三复赛题1。

〔解〕 这十个连续自然数为：

$$11!+2, 11!+3, 11!+4, \cdots\cdots, 11!+11.$$

A1-011 假设a_1, a_2, a_3, a_4, a_5和b是满足关系式

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=b^2$$

的整数。证明：这些数不可能都是奇数。

〔题说〕 1931年匈牙利数学奥林匹克题2.

〔证〕 如果这六个数都是奇数，由于奇数的平方被8除时，余数总是1，等式

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=b^2$$

的左边被8除时余5，而右边被8除时余1。矛盾。

A1-012 已知各项均为正整数的算术级数，其中一项是完全平方数，证明：此级数一定含有无穷多个完全平方数。

〔题说〕 1963年全俄数学奥林匹克十年级题2。算术级数有无穷多项。

〔证〕 设此算术级数公差是d，且其中一项$a=m^2(m\in N)$。于是

$$a+(2km+dk^2)d=(m+kd)^2$$

对于任何$k\in N$，都是该算术级数中的项，且又是完全平方数。

A1-013 求一个最大的完全平方数，在划掉它的最后两位数后，仍得到一个完全平方数（假定划掉的两个数字中的一个非零）.

〔题说〕 1964年全俄数学奥林匹克十一年级题1.

〔解〕 设n^2满足条件，令$n^2=100a^2+b$

其中$0<b<100$。于是$n>10a$，即$n\geqslant 10a+1$。

因此　$b=n^2-100a^2\geqslant 20a+1$.

由此得　$20a+1<100$，所以$a\leqslant 4$.

经验算，仅当$a=4$时，$n=41$满足条件。若$n>41$则$n^2-40^2\geqslant 42^2-40^2>100$。因此，满足本题条件的最大的完全平方数为$41^2=1681$。

A1-014 证明：如果整数a和b满足关系式：$2a^2+a=3b^2+b$，那么$a-b$和$2a+2b+1$是整数的平方。

〔题说〕 1964—1965年波兰数学奥林匹克三试题3.

〔证〕 已知关系式即

$$(a-b)(2a+2b+1)=b^2. \qquad (1)$$

若$b=0$，则$a=b=0$，结论显然成立。

若$b\neq 0$，则$a\neq b$。设$a=a_1d$，$b=b_1d$，a_1与b_1互质，d为非零整数。

(1)即

$$(a-b)(2a+2b+1)=b_1^2d^2. \qquad (2)$$

因为$(2a+2b+1,\ d)=(1,\ d)=1$，所以$d^2\mid(a-b)$,

$$\frac{a-b}{d^2}\cdot(2a+2b+1)=b_1^2\ . \tag{3}$$

因为 $(\frac{a-b}{d},\ b_1)=(a_1-b_1,\ b_1)=(a_1,\ b_1)=1$，所以由(3)得

$$\frac{a-b}{d^2}=\pm1,\quad 2a+2b+1=\pm b_1^2\ .$$

但将$a-b=-d^2$代入原关系式得

$$2a^2-d^2=3b^2.$$

约去d^2得

$$2a_1^2-1=3b_1^2\ . \tag{4}$$

左边$\equiv\pm1\pmod 3$，因此(4)不可能成立。从而

$$a-b=d^2,\ 2a+2b+1=b_1^2\ .$$

A1-015　求所有的素数p，使$4p^2+1$和$6p^2+1$也是素数。

〔题说〕　1964—1965年波兰数学奥林匹克二试题1．

〔解〕　当$p\equiv\pm1\pmod 5$时，$5\mid 4p^2+1$．当$p\equiv\pm2\pmod 5$时，$5\mid 6p^2+1$．所以本题只有一个解$p=5$．

A1-016　在某个星系的每一个星球上，都有一位天文学家在观测最近的星球。若每两个星球间的距离都不相等，证明：当星球为奇数个时，一定有一个星球未被任何人观测。

〔题说〕　1966年全俄数学奥林匹克八年级题1．

〔证〕　设有n颗星球。先选出相距最近的两颗，设为A和B．A、B上的两位天文学家一定可以互相看到对方星球。假如这两颗之一被其他某个星球上的天文学家看到，那么余下$n-3$个天文学家，因此，余下的$n-2$颗星球中，一定有一颗星球不被人观测。

假如这两颗星球都不被其他星球上的人观测，则对其余$n-2$颗星重复上述的讨论，依次下去。因为n是奇数，最后必存在一颗，它不被任何别的星球上的天文学家观测。

A1-017　能否有这样的自然数x和y，使x^2+y和y^2+x都是整数的平方？

〔题说〕　1966年全俄数学奥林匹克八年级题3．

〔解〕　不存在满足条件的自然数x、y．事实上，设$x\geqslant y$，则

$$x^2<x^2+y\leqslant x^2+x<(x+1)^2.$$

因此，x^2+y不可能是整数的平方。

AJ-018 假设n是整数。证明：如果

$$2+2\sqrt{28n^2+1}$$

是整数，那么它是完全平方。

〔题说〕 1969年匈牙利数学奥林匹克题1。

〔证〕 设$m=2+2\sqrt{28n^2+1}$是整数，则

$$4(28n^2+1)=(m-2)^2=m^2-4m+4.$$

由此看出m应是偶数。设$m=2m_1$，我们得到

$$28n^2=m_1^2-2m_1.$$

易见m_1也是偶数。设$m=2m_1=4k$，那么

$$7n^2=k^2-k.$$

因为k和$k-1$是互素的，所以

$$(a)\begin{cases}k=7A^2\\k-1=B^2\end{cases}\quad 或 \quad (b)\begin{cases}k=A^2\\k-1=7B^2\end{cases}$$

其中A和B是整数，$AB=n$。

因为$B^2\equiv 1,2,4 \pmod 7$，所以情况(a)不可能发生。由(b)得$m=(2A)^2$，因此结论成立。

由于pell方程$A^2-7B^2=1$有无穷多解，所以存在无穷多个n，使$m=2+2\sqrt{28n^2+1}$为整数。例如$n=24$时，$m=2+2\times127=256$。

AJ-019 证明存在无限多个自然数a有下列性质：对任何自然数n，$z=n^4+a$都不是素数。

〔题说〕 第十一届(1969年)国际数学奥林匹克题1 本题由民主德国提供。

〔证〕 对任意整数$m>1$及自然数n，有

$$n^4+4m^4=(n^2+2m^2)^2-4m^2n^2$$

$$=(n^2+2mn+2m^2)(n^2-2mn+2m^2).$$

而

$$n^2+2mn+2m^2>n^2-2mn+2m^2$$

$$=(n-m)^2+m^2\geqslant m^2>1.$$

故n^4+4m^4 不是素数。取$a=4\cdot2^4, 4\cdot3^4, \cdots\cdots$就得到无限多个符合要求的