

数学分析建构作业设计

谢太光 编著

中国青年出版社

(京)新登字 083 号

图书在版编目 (CIP) 数据

数学分析建构作业设计/谢太光编著. —北京: 中国青年出版社, 2004
ISBN 7-5006-5719-6

I. 数... II. 谢... III. 数学分析-高等学校-解题 IV. 017-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 017620 号

*

中国青年出版社出版 发行

社址: 北京东四 12 条 21 号 邮政编码: 100708

网址: www.cyp.com.cn

编辑部电话: (010) 64034350 邮购部电话: (010) 64049424

北京市梨园彩印厂印刷 新华书店经销

*

787 × 1092 1/16 20 印张 480 千字

2004 年 4 月北京第 1 版 2004 年 4 月北京第 1 次印刷

定价: 22.00 元

本图书如有任何印装质量问题, 请与出版处联系调换

联系电话: (010)64033570

雄狮书店: (010)84039659

□□前言

数学分析是数学专业的一门重要基础课,多年来它也是教和学都感困难的一门课程。为了解决这一教学难题,编者在当代数学教育的各种新理论、新观念的指导下,进行了十余年的教学改革实验和理论思考与探索,终于取得了重大突破,并将所取得的教研成果编写了这本《数学分析建构作业设计》(以下简称《建构作业》)。

《建构作业》既不同于通常的作业与练习,也不同于一般的题解与教学参考书。它是以认知科学、建构主义以及现代建构主义的先驱维果茨基的“最近发展区”理论为指导,吸取数学问题解决的观念与精华,根据大学生的知识结构以及数学学习的心理特征和规律而编写的,悉心引导学习者进行有成效的建构活动的“习材资料”。

本书应与华东师范大学数学系编写的面向 21 世纪课程教材《数学分析》(第三版)配套使用。根据多年来教学与改革的经验,我们从教材的 1870 个大小题目中,精心挑选出 1300 多个有难度、有代表性的题目,按题目特点和知识结构、问题解决的需要,分别编为作业 B 和作业 C(其中有一部分题目既归入作业 B,也归入作业 C)。建构作业 B,主要是引导学习者认清问题情境,提示(启发)解题策略,需要应用的定义、定理、法则和数学思想方法。建构作业 C,则提供了必要的解题步骤,具体引导学习者尝试解题方法,一步一步地开展建构活动,完成建构作业。为了减轻定向引导的副作用,《建构作业》尽可能地启发、提示或提供了多种证法或解法,以开拓思维、开阔眼界,培养学习者的创新意识与能力。学生解题感到困难的一个重要原因,是对教材、对教师讲授的内容未能真正理解,未能在新知识与自己已有的知识或数学经验之间建立起必要的联系。针对这种情况,我们特意编写了作业 A。建构作业 A 要求学习者叙述重要的定义、定理,对繁难的概念引导学习者突破难点,理解其实质;再就是引导学习者概括、理清一些定理证明的思路,领会问题解决的策略和数学思想方法,掌握证明的关键,以提高问题解决的能力。每一章节,按作业 A,作业 B,作业 C 的顺序排列,分层次引导学生建构作业。



为了使《建构作业》真正发挥出应有的效能,使用的正确动机与方法至关重要。首要的问题是观念的转变。作为学习者,第一要转变被动学习、接受学习的旧观念旧习惯,要增强主动意识,主动、积极地进行建构;第二听好每一堂课仍是学习的重要环节;第三在做《建构作业》时,要按编者的意图,先做作业 A,再做作业 B,最后做作业 C。要充分发挥主观能动性对教材上的习题,若自己能经过一段时间思考独立完成的,就不用作业 B 和作业 C 了;不能独立完成的,再按作业 B 的启发、提示去做;若还有困难,或做了题心中没有把握,再借用参考作业 C 的解题步骤。借助作业 B,特别是依靠作业 C 才做完习题的同学,要清楚地意识到自己的学习任务并未全部完成,还需要自己再建构、再提高。对于教师,谨希望能在使用《建构作业》方面给以学生切实的指导,若能以新视角看待《建构作业》,以其作为载体开展相应的教学改革,可以相信将会取得更好的效果。

编写《建构作业》是一个全新的课题。由于编者水平和精力有限,缺点和错误在所难免。诚恳地欢迎专家、学者和广大师生批评指正。惟此,方能使之逐步完善,真正成为建构学习的“学习材料”。

谢太光

2003 年 8 月 6 日

目 录

第一部分 作业 A 与作业 B

第一章 实数集与函数	3
第二章 数列极限	7
第三章 函数极限	12
第四章 函数的连续性	17
第五章 导数和微分	21
第六章 微分中值定理及其应用	25
第七章 实数的完备性	31
第八章 不定积分	35
第九章 定积分	36
第十章 定积分的应用	42
第十一章 反常积分	43
第十二章 数项级数	46
第十三章 函数列与函数项级数	50
第十四章 幂级数	52
第十五章 傅里叶级数	55
第十六章 多元函数的极限与连续	59
第十七章 多元函数微分学	62
第十八章 隐函数定理及其应用	67
第十九章 含参量积分	70
第二十章 曲线积分	73
第二十一章 重积分	74
第二十二章 曲面积分	80
* 第二十三章 流形上微积分学初阶	82

第二部分 作业 C

第一章	实数集与函数	87
第二章	数列极限	91
第三章	函数极限	101
第四章	函数的连续性	110
第五章	导数和微分	115
第六章	微分中值定理及其应用	126
第七章	实数的完备性	142
第八章	不定积分	149
第九章	定积分	156
第十章	定积分的应用	168
第十一章	反常积分	177
第十二章	数项级数	186
第十三章	函数列与函数项级数	195
第十四章	幂级数	203
第十五章	傅里叶级数	209
第十六章	多元函数的极限与连续	217
第十七章	多元函数微分学	227
第十八章	隐函数定理及其应用	243
第十九章	含参量积分	256
第二十章	曲线积分	265
第二十一章	重积分	269
第二十二章	曲面积分	290
* 第二十三章	流形上微积分学初阶	301



第一部分

作业 A 与作业 B

第一章 实数集与函数

§1 实数

【作业 A】

1. 填空:

(1) 若对任何正数 ϵ 有 $a > b - \epsilon$, 则实数 a 与 b 的序关系是_____.(2) 对于任何实数 a 与正数 h , 下述绝对值不等式的等价不等式是 $|a| < h \Leftrightarrow$ _____;
 $|a| \leq h \Leftrightarrow$ _____.(3) 对于任何 $a, b \in \mathbb{R}$ 有如下的三角形不等式: _____ $\leq |a \pm b| \leq$ _____.

【作业 B】

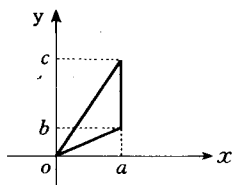
1. (《数学分析》第三版, 华东师大数学系编, 华东师大出版社 2001 年出版, 以下简称“教材”的第 4 页第 1 题) 设 a 为有理数, x 为无理数.证明: (1) $a + x$ 是无理数; (2) 当 $a \neq 0$ 时, ax 是无理数. 提示: 利用有理数对四则运算的封闭性证之(用反证法).2. (教材第 3 题) 设 $a, b \in \mathbb{R}$. 证明: 若对任何正数 ϵ 有 $|a - b| < \epsilon$, 则 $a = b$. 提示: 有两种证法. 其一是利用绝对值性质 3 及例 2 结论证之; 其二是仿例 2, 用反证法证之. 注意理解命题的几何意义.3. (教材第 5 题) 证明: 对任何 $x \in \mathbb{R}$ 有 $(2) |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| \geq 2$. 提示: 利用三角形不等式证之. 注意将 2 表示为 x 的两个一次式之差: $2 =$ _____ $-$ _____.4. (教材第 6 题) 设 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ ($\mathbb{R}^+$ 表示全体正实数的集合). 证明: $|\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2}| \leq |b - c|$.你能说明此不等式的几何意义吗? 提示: 有两种证法. 其一, 先将左端转化为一分式, 再放大; 其二, 从要证的不等式逆推(适时对两边同时平方). “几何意义”($b \neq c$ 时) 参见图 1-1.

图 1-1

5. (教材第 7 题) 设 $x > 0, b > 0, a \neq b$. 证明 $\frac{a+x}{b+x}$ 介于 1 与 $\frac{a}{b}$ 之间. 提示: 考察乘积 $(1 - \frac{a+x}{b+x})(\frac{a}{b} - \frac{a+x}{b+x})$ 的符号.6. (教材第 8 题) 设 p 为正整数. 证明: 若 p 不是完全平方数, 则 $\sqrt{p}$ 是无理数. 提示: 用反证法.7. (教材第 9 题) 设 a, b 为给定实数. 试用不等式符号(不用绝对值符号)表示下列不等式的解:(1) $|x - a| < |x - b|$; 提示: 原不等式等价于 $(x - a)^2 < (x - b)^2$;(2) $|x - a| < x - b$; 提示: 此不等式的解集包含于(1)的解集(因(2)中须 $x > b$ 时方有解);

(3) $|x^2 - a| < b$. 提示: 利用绝对值的性质 3 解之.

§2 数集·确界原理

【作业 A】

1. 设 $a \in \mathbb{R}$, 叙述点 a 的 δ 邻域, 空心 δ 邻域, δ 右邻域与 δ 左邻域的定义.
2. 填空: ∞ 邻域 $U(\infty) = \underline{\hspace{2cm}}$, 其中 M 为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 数; $+\infty$ 邻域 $U(+\infty) = \underline{\hspace{2cm}}$, $-\infty$ 邻域 $U(-\infty) = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. 叙述有上界数集的定义.
4. 叙述数集的上确界与下确界的定义.
5. 叙述确界原理.

【作业 B】

1. (教材第 9 页第 2 题) 设 S 为非空数集. 试对下列概念给出定义:
 (1) S 无上界; 提示: S “无上界”是与定义 1“有上界”相反的概念, 注意按逻辑规则, 按与定义 1 刚好相反(不能“过份”)的情形来叙述.
 (2) S 无界. 提示: S “无界”是与“有界”相反的概念. 由定义 1, 及有界集的概略定义(第 6 页第 1 行)不妨先写出有界集的精确定义(用不等式表示的), 然后再据逻辑规则构造“无界”集的定义.
2. (教材第 4 题) 求下列数集的上、下确界, 并依定义加以验证:
 (1) $S = \{x | x^2 < 2\}$; (2) $S = \{x | x = n!, x \in \mathbb{N}_+\}$;
 (3) $S = \{x | x \text{ 为 } (0, 1) \text{ 内的无理数}\}$;
 (4) $S = \{x | x = 1 - \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}_+\}$. 提示: “依定义”验证时, 要有严谨性. 如定义 2、3 中 (ii) “存在 $x_0 \in S$, 使得 x_0 ”怎样怎样, 这个“ x_0 ”要么举出具体的数, 要么据数集 S 的元素构成及逻辑规则(语言)推出这样的 x_0 必定存在.

§3 函数概念

【作业 A】

1. 写出符号函数, 狄利克雷函数和定义在 $[0, 1]$ 上的黎曼函数的表示式.

【作业 B】

1. (教材第 15 页第 8 题) 在什么条件下, 函数 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ 的反函数就是它本身? 提示: 函数 $y =$

$\frac{ax+b}{cx+d}$ ……(1)的反函数就是它本身,即由(1)能推出 $x = \frac{ay+b}{cy+d}$ ……(2)

2.(教材第9题)试作函数 $y = \arcsin(\sin x)$ 的图像.提示:正弦函数与反正弦函数互为反函数,从而当 $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 时,有 $y = \arcsin(\sin x) = x$,其图像易作.其余部分再按函数的周期性作出.

3.(教材第16页第12题)证明关于函数 $y = [x]$ 的如下不等式:(1)当 $x > 0$ 时, $1 - x < x[\frac{1}{x}] \leq 1$; (2)当 $x < 0$ 时, $1 \leq x[\frac{1}{x}] < 1 - x$.提示:根据取整函数的定义,对一切 $x \in \mathbb{R}$,有 $x - 1 < [x] \leq x$.

§4 具有某些特性的函数

【作业 A】

1.叙述有上界函数,有下界函数与有界函数的定义.

【作业 B】

1.(教材第20页第7题)设 f, g 为定义在 D 上的有界函数,满足 $f(x) \leq g(x), x \in D$.证明:
(1) $\sup_{x \in D} f(x) \leq \sup_{x \in D} g(x)$; (2) $\inf_{x \in D} f(x) \leq \inf_{x \in D} g(x)$.提示:①可据数集的确界的本质——上确界是上界中的最小者,下确界是下界中的最大者——证之;②由条件知,对一切 $x \in D$,有

$$\inf_{x \in D} f(x) \leq f(x) \leq g(x) \leq \sup_{x \in D} g(x)$$

注意利用上式.

2.(教材第10题)讨论狄利克雷函数 $D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数,} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数} \end{cases}$ 的有界性、单调性与周期性.提示:周期性的讨论较难.根据函数取值的特点,应该就有理数 r 和无理数 α 分别讨论它是不是 $D(x)$ 的周期.注意:有理数加有(无)理数是有(无)理数;但无理数加无理数是无理数吗?

3.(教材第11题)证明: $f(x) = x + \sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格增.提示:可利用下面的不等式
 $\left| \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \right| < \frac{x_2 - x_1}{2}, x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \text{ 且 } x_1 < x_2.$

总 练 习 题

【作业 B】

1.(教材第21页第5题)利用函数 $y = [x]$ 求解:

(1)某系各班级推选学生代表,每5人推选1名代表,余额满3人可增选1名.写出可推选代表数 y 与班级学生数 x 之间的函数关系(假设每班学生数为30~50人);提示:有两种解法.解法一是分两步走——两次取整;解法二是将附加条款“余额满3人可增选1名”考虑进来后再取整——

一步到位. 试选好解法.

(2) 正数 x 经四舍五入后得整数 y , 写出 y 与 x 之间的函数关系. 提示: 思路同上.

2. (教材第 22 页第 12 题) 设 f, g 为 D 上的有界函数. 证明:

(1) $\inf_{x \in D} \{f(x) + g(x)\} \leq \inf_{x \in D} f(x) + \sup_{x \in D} g(x)$; 提示: 证法之一是, 先证明 $\inf_{x \in D} f(x) + \inf_{x \in D} g(x) \leq \inf_{x \in D} \{f(x) + g(x)\}$ 再利用第 20 页习题 8 结果 $\sup_{x \in D} g(x) = -\inf_{x \in D} \{-g(x)\}$ 证之.

(2) $\sup_{x \in D} f(x) + \inf_{x \in D} g(x) \leq \sup_{x \in D} \{f(x) + g(x)\}$. 提示: 证法之一是, 先证明 $\sup_{x \in D} \{f(x) + g(x)\} \leq \sup_{x \in D} f(x) + \sup_{x \in D} g(x)$ 再利用第 20 页习题 8 结果 $\inf_{x \in D} g(x) = \sup_{x \in D} \{-g(x)\}$ 证之.

3. (教材第 14 题) 将定义在 $[0, +\infty)$ 上的函数 f 延拓到 $\mathbb{R}$ 上, 使延拓后的函数为 (i) 奇函数; (ii) 偶函数. 设 (1) $f(x) = \sin x + 1$; 提示: 注意, $\sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上是奇函数; 常量函数 1 在 $\mathbb{R}$ 上是偶函数. 将 $f(x) = \sin x + 1$ 延拓到 $\mathbb{R}$ 上时注意综合处理.

(2) $f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{1 - x^2}, & 0 \leq x \leq 1, \\ x^3, & x > 1. \end{cases}$ 提示: 1° 注意, 函数 f 是分段定义的. 2°, $1 - \sqrt{1 - x^2}$ 在 $[-1, 1]$ 上是偶数; x^3 在 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ 上是奇函数.

4. (教材第 16 题) 设 f 在区间 I 上有界. 记 $M = \sup_{x \in I} f(x)$, $m = \inf_{x \in I} f(x)$. 证明 $\sup_{x', x'' \in I} |f(x') - f(x'')| = M - m$. 提示: 先证明 $\sup_{x', x'' \in I} |f(x') - f(x'')| = \sup_{x', x'' \in I} \{f(x') - f(x'')\}$, 然后再利用第 9 页第 7、第 6 题结论证之.



第二章 数列极限

§1 数列极限概念

【作业 A】

1. 叙述数列极限的 $\epsilon - N$ 定义(定义 1)
2. 填空:与定义 1 等价的数列极限的定义 1' 是:_____, 若在 $U(a; \epsilon)$ 之外数列 $\{a_n\}$ 中的项 _____ 个, 则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于极限 a .
3. 写出教材第 25 页例 4 中证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 (|q| < 1)$ 时, “适当”放大 $|q^n - 0| = \frac{1}{(1+h)^n}$ 的不等式. 若要证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0 (|q| < 1)$, 又该怎样“适当”放大?

【作业 B】

1. (教材第 28 页第 5 题)试用定义 1' 证明: (2) 数列 $\{n^{(-1)^n}\}$ 发散. 提示: 注意, n 为偶数 $2k$ 时 $n^{(-1)^n} = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. (教材第 7 题)证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$. 当且仅当 a 为何值时反之也成立? 提示: 由极限定义及绝对值性质 $4(|a| - |b|) \leq \underline{\hspace{2cm}}$ 证之.

§2 收敛数列的性质

【作业 A】

1. 填空: 教材在例 2 中利用迫敛性定理推出 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ 时, 用了三个重要的式子, 它们分别是:
 (记) $a_n = \sqrt[n]{n} = 1 + \underline{\hspace{2cm}},$
 (则) $n = \underline{\hspace{2cm}} > \underline{\hspace{2cm}}$
 (由上式得) $0 < h_n < \underline{\hspace{2cm}}$
2. 填空: 教材在应用 $\epsilon - N$ 定义证明极限的乘积法则时, 用了重要的不等式, 即
 $|a_n b_n - ab| = |(a_n - \underline{\hspace{2cm}}) b_n + \underline{\hspace{2cm}}| \leq \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}}$
 (注: 为了利用已知条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$)

【作业 B】

1. (教材第 34 页第 5 题) 设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 中一个是收敛数列, 另一个是发散数列. 证明 $\{a_n \pm b_n\}$



是发散数列. 又问 $\{a_n b_n\}$ 和 $\{\frac{a_n}{b_n}\} (b_n \neq 0)$ 是否必为发散数列? 提示: 前一命题用反证法证明. 后一问题较复杂, 需要多向思维, 综合性思维. 值得注意的相关问题有: 收敛数列收敛于 0 吗? 发散数列是否无界(如 $\{n^2\}, \sqrt[3]{n}$ 还是 $\{(-1)^n\}$. 等等)? 在 $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ 中是 $\{a_n\}$ 收敛 $\{b_n\}$ 发散, 还是相反的情况? 参考以上情况, 举例说明答案是“不一定”.

2. (教材第 7 题) 判断以下结论是否成立(若成立, 说明理由; 若不成立, 举出反例):

(1) 若 $\{a_{2k-1}\}$ 和 $\{a_{2k}\}$ 都收敛, 则 $\{a_n\}$ 收敛;

(2) 若 $\{a_{3k-2}\}, \{a_{3k-1}\}$ 和 $\{a_{3k}\}$ 都收敛, 且有相同极限, 则 $\{a_n\}$ 收敛. 提示: 命题(1)和(2)的相同点是: 刚好能构成数列 $\{a_n\}$ 的子列(前者是 2 个, 后者是 3 个)都收敛; 不同点是(2)中的 3 个子列有相同极限, (1)中则未说明, 值得注意.

3. (教材第 8 题) 求下列极限:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n}$; 提示: $a_1 = \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}, a_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8} < \frac{1}{\sqrt{5}}$, 可以推测并证明

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{(\quad)}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{p=1}^n p!}{n!}$; 提示: 推出

$$n! < \sum_{p=1}^n p! < (n-2) \cdot (n-2)! + (n-1)! + n! < \underline{\hspace{2cm}}$$

再由迫敛性定理求原数列极限.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} [(n+1)^a - n^a], 0 < a < 1$; 提示: 利用 a 的特性(大于 0 小于 1)先证明

$$(n+1)^a - n^a < n^{a-1}$$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+\alpha)(1+\alpha^2) \cdots (1+\alpha^{2^n}), |\alpha| < 1$. 提示: 观察因式特点, 对乘积 $b_n = (1+\alpha)(1+\alpha^2) \cdots (1+\alpha^{2^n})$ 乘以 α 的某个一次式便得到一个形式简洁的积, 从而得

$$b_n = \frac{1 - \alpha^{2^{n+1}}}{(\quad)}$$

4. (教材第 9 题) 设 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 为 m 个正数, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max\{a_1, a_2, \dots, a_m\}.$$

提示: 注意结论——极限值. 应用迫敛性定理证之.

§3 数列极限存在的条件

【作业 A】

1. 叙述数列的柯西收敛准则.



【作业 B】

1. (教材第 39 页第 3 题) 证明下列数列极限存在并求其值:

(1) 设 $a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{2a_n}, n = 1, 2, \dots$; 提示: 证明数列 $\{a_n\}$ 递增且有上界.

(2) 设 $a_1 = \sqrt{c} (c > 0), a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}, n = 1, 2, \dots$; 提示: $\{a_n\}$ 递增且有上界. 但哪个数可以作为 $\{a_n\}$ 的上界, 且容易验证, 较难判断. 可应用逆向思维, 由式 $a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}$ 先令 $n \rightarrow \infty$ 取极限, 求出极限 a (它一定是 $\{a_n\}$ 的上确界) 再适当放大, 确定出易于验证的上界.

(3) $a_n = \frac{c^n}{n!} (c > 0), n = 1, 2, \dots$. 提示: 证法不只一种. 最好先确定出递推公式 $a_{n+1} = \frac{c}{n+1} a_n$, 以便更好地认识数列 $\{a_n\}$.

2. (教材第 4 题) 利用 $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$ 为递增数列的结论, 证明 $\{(1 + \frac{1}{n+1})^n\}$ 为递增数列. 提示: 记 $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n, b_n = (1 + \frac{1}{n+1})^n, n = 1, 2, \dots$. 注意到这两个数列通项的特点, 为利用 $\{a_n\}$ 递增这一条件, 最好通过比较分式 $\frac{b_n}{a_{n+1}}$ 与 $\frac{b_{n+1}}{a_{n+2}}$ 的大小来证明.

3. (教材第 6 题) 证明: 若单调数列 $\{a_n\}$ 含有一个收敛子列, 则 $\{a_n\}$ 收敛. 提示: 有两种证法. 一种是通过证明 $\{a_n\}$ 有界来证; 另一种是按数列收敛的定义来证.

4. (教材第 7 题) 证明: 若 $a_n > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = L > 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. 提示: 有两种证法. 其一是由条件及极限定义可得一系列不等式和递推公式, 证出 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{N+k} = 0$. 其二是对等式 $a_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot a_{n+1}$ 应用极限的运算法则推出结论——但是必须先证得数列 $\{a_n\}$ 收敛!

5. (教材第 9 题) 利用不等式

$$b^{n+1} - a^{n+1} > (n+1)a^n(b-a), b > a > 0$$

证明: $\{(1 + \frac{1}{n})^{n+1}\}$ 为递减数列, 并由此推出 $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$ 为有界数列. 提示: 观察给出的不等式, 由条件 $b > a > 0$ 知, 可设 $a = 1 + \frac{1}{n+1}, b = 1 + \frac{1}{n}$ 代入其中.

6. (教材第 11 题) 给定两正数 a_1 与 $b_1 (a_1 > b_1)$, 作出其等差中项 $a_n = \frac{a_1 + b_1}{2}$ 与等比中项 $b_2 = \sqrt{a_1 b_1}$, 一般地令

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, n = 1, 2, \dots$$

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 与 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 皆存在且相等. 提示: 由等差中项与等比中项的大小关系知, 本题的问题情境如图 2-1 所示:

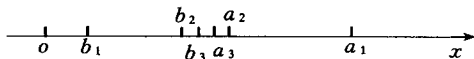


图 2-1

由此悟出证明思路.



总 练 习 题

【作业 B】

1. (教材第 40 页第 2 题) 证明:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 q^n = 0$ ($|q| < 1$); 提示: 设 $|q| = \frac{1}{1+h}$, $h > 0$. 对 $\frac{n^2}{(1+h)^n}$ 用二项式定理并适当放大.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg n}{n^\alpha} = 0$ ($\alpha \geq 1$); 提示: 先考虑 $\alpha = 1$ 的情形. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, 故对任给的 $\varepsilon > 0$, 当 n 充分大时有 $1 < \sqrt[n]{n} < ()^\varepsilon$.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}!} = 0$. 提示: 有两种证法. 其一, 利用 §3 习题 3(3) 结论证之. 试想, 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\frac{1}{\varepsilon})^n}{n!} = \underline{\hspace{2cm}}$. 其二, 先证明 $(n!)^2 \geq n^n$, 从而 $\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{n}$.

2. (教材第 3 题) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 证明:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$ (又问由此等式能否反过来推出 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$); 提示: 利用已知条件, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 对下式

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a \right|$$

估值时, 将 $(a_1 - a), (a_2 - a), \dots, (a_n - a)$ 分为两类, 从而应用 $\frac{\varepsilon}{2}$ 法证之.

(2) 若 $a_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$), 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$. 提示: 当 $a = 0$ 时, 仿一题证法证之; 当 $a \neq 0$ 时, 利用 (1) 题结论及迫敛性定理证之.

3. (教材第 5 题) 证明: 若 $\{a_n\}$ 为递增数列, $\{b_n\}$ 为递减数列, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0.$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 与 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 都存在且相等. 提示: 先证明数列 $\{a_n - b_n\}$ 递增有上确界 $\underline{\hspace{2cm}}$; 进而证明 $\{a_n\}$ 有上界, $\{b_n\}$ 有下界.

4. (教材第 6 题) 设数列 $\{a_n\}$ 满足: 存在正数 M , 对一切 n 有

$$A_n = |a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \cdots + |a_n - a_{n-1}| \leq M.$$

证明: 数列 $\{a_n\}$ 与 $\{A_n\}$ 都收敛. 提示: 先证明数列 $\{A_n\}$ 收敛, 再利用它并应用柯西准则证明 $\{a_n\}$ 也收敛.

5. (教材第 41 页第 7 题) 设 $a > 0, \sigma > 0, a_1 = \frac{1}{2}(a + \frac{\sigma}{a}), a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{\sigma}{a_n}), n = 1, 2, \dots$.

证明: 数列 $\{a_n\}$ 收敛, 且其极限为 $\sqrt{\sigma}$. 提示: 注意到 $a_1 = \frac{1}{2}(a + \frac{\sigma}{a})$ 与 $\sqrt{\sigma}$ 分别是 a 和 $\frac{\sigma}{a}$ 的算术平均与几何平均, 故由此题的条件 (包括 $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{\sigma}{a_n})$) 与结论推测, 数列 $\{a_n\}$ 必定是单调 $\underline{\hspace{2cm}}$ 而趋于 $\sqrt{\sigma}$.

6. (教材第 8 题) 设 $a_1 > b_1 > 0$, 记

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, b_n = \frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}}, n = 2, 3, \dots$$

证明: 数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的极限都存在且等于 $\sqrt{a_1 b_1}$. 提示: 易见 a_n 是 a_{n-1} 与 b_{n-1} 的算术平均, 而 b_n 则是 a_{n-1} 与 b_{n-1} 的几何平均的平方与算术平均之商, 故 b_n 小于 a_n . 结合本题结论不难看出数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的变化趋势.

7. (教材第 10 题) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. 记

$$S_n = \max\{a_n, b_n\}, T_n = \min\{a_n, b_n\}, n = 1, 2, \dots$$

证明: (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \max\{a, b\}$; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \min\{a, b\}$. 提示: 参考第一章总练习题 1 证之, 或按 $\epsilon - N$ 定义证之.