在辨析中学习数学

殷显华◎著

奥林匹克数学百题辨析

科学普及出版社

在辨析中学习数学

——奥林匹克数学百题辨析

殷显华 著

科学普及出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

在辨析中学习数学:奥林匹克数学百题辨析/殷显华著.
—北京:科学普及出版社,2005
ISBN 7-110-06181-7

Ⅰ.在... Ⅱ.殷... Ⅲ.数学课-中学-课外读物
Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第102424号

科学普及出版社出版
北京市海淀区中关村南大街16号 邮政编码:100081
电话:010-62103210 传真:010-62183872
http://www.kjpbooks.com.cn
科学普及出版社发行部发行
北京卫顺印刷厂印刷
*
开本:889毫米×1194毫米 1/32 印张:15.5 字数:390千字
2005年9月第1版 2006年1月第2次印刷
印数:2001-5000册 定价:28.00元

内容提要

这是一本提供给学有余力的中学生和广大师范院校数学专业学生的数学课外读物，也可作为中学数学老师继续教育的参考资料。

本书以挑剔的目光从一些正式出版且比较畅销的竞赛数学书籍中选择了一百多道题及解答作为原始材料进行辨析。所选入的并非都是难题，但都有值得辨析的内容，大多涉及数学概念的正确理解、数学基本方法的正确运用以及数学语言的正确表述。其中有部分内容本身就属中学数学范围，所犯错误也是中学生在学习数学时容易发生的。比较难的一些题辨析比较详尽，也有一些题的辨析重点放在了思路的形成上。

在辨析中学习数学是一种尝试，本书题目不多，但覆盖面广，本书也是一本各取所需的书，对不同的读者对象附有导读建议。

前　言

社会上普遍存在着认为学习数学就是做数学题之偏见,实际上应付升学考试的“题海战”并不是学习数学之正途.学习数学,更重要的是要系统地掌握数学基础知识,学习数学思考问题的方法和数学的表述方式.数学是学习科学技术的基础和工具,是指数学这门学科本身的内容而言,而数学思想方法的最大宝库也就包含在这些数学的知识系统之中,作为基础和工具的数学,只要循序渐进,一般人都可以达到其所需要的水平.学习数学,尤其是打基础阶段,的确要做一定量的数学题,培养一定的解题能力.但没有必要花大量时间去搞低水平的重复,也没有必要一味地追求难题.当然,若学有余力,有选择地接触一些有深度的题目,以培养钻研之精神,也有必要,但并非越难越多越好.如真有爱好和精力,与其去接受以解题为中心的强化训练,还不如选择适当的材料培养阅读数学书籍之能力.立志于以数学为专业更应当看一些数学知识比较系统的课外读物,数学的理论功底并非能靠

解题来增强.已经以数学为专业的大学生,希望今后在某个专门化方向上有所成就,首先须在该方向上进行系统学习,否则几乎是不可能的.

数学竞赛有它自己的功能,社会上诸多的“奥数辅导”班,注入了太多的功利,事实上早就被异化.但因此就去贬低数学竞赛,难免有些肤浅.

国际数学奥林匹克(IMO)是世界上规模最大和影响最广的中学生学科竞赛活动,它的赛题范围具有国际的公认性,其中有些内容具有高等数学的背景,但往往又可用初等数学的手段来解决,有些还是现代数学思想方法的体现.和竞赛活动相适应,竞赛数学应运而生,它以中学数学为基础,又和 IMO 接轨,而学有余力又爱好数学的中学生也确有扩展数学视野的需要,因此竞赛数学为中学生的课外活动以及因材施教提供了丰富的资料;竞赛数学的产生客观上加速了现代数学思想方法对传统初等数学的渗透,这又会对中学数学的改革起到促进作用.未来的和在职的中学老师学一点竞赛数学当然也有必要.

这是本特殊的有关竞赛数学的读本,它不同于竞

赛数学中有关专题的专门读本，内容已具有一定的覆盖面，但又不同于竞赛数学的专门教程；它讨论了竞赛数学中的有关数学题，但又不同于典型题的分析或解题指导．它是从一些正式出版且比较畅销的竞赛数学书籍中选择了一百多道题及其解答作为原始材料展开辨析，希望通过在阅读辨析中学习数学，使没有接触过竞赛数学的读者可以了解竞赛数学的大概，使了解竞赛数学的读者有更多的收获，辨析中的大部分内容毕竟是作者独立思考的产物．

一道数学题及其解答，从结构到内容应当反映数学的科学性．涉及的概念及关系要明确，叙述要严谨清晰；条件要充分，结论要合理，使用方法要正确，推理过程要符合逻辑且依据要充足，即使在细节上都要无懈可击，准确无误．一般而言，数学命题除了条件需要充分外，还要求条件尽可能少且彼此独立．

书中所选入的题目或解答大多数存在这样那样的问题，有些错误在中学数学的学习中也容易发生，例如[15]不等式放缩时发生的错误；[44]、[86]轨迹方程表达的不完整；[48]、[53]解答时思考不周引起

的错误;[49]引进坐标系的方法错误;[54]结果的表述错误;以及像[57]求常数C,一般都会用必要条件来确定,但常常忽视充分性的证明等.当然也有很多是比较严重的科学性错误,例如[2]“至多”与“至少”之间的逻辑关系;[13]题设条件不具有充分性;[58]混淆了函数的最大值与一些函数最大值的最小上界这两个概念;[104]表面看来题型和解答均十分巧妙优美,但恰恰是混淆了面积的大小关系和覆盖的关系;[97]解答几乎步步错误且是错题,尤其在轮换法使用上的错误是容易被忽视的等.有些常用方法稍不留心也会发生科学性的错误,如[5]的待定系数法;[127]是第39届莫斯科数学奥林匹克试题,证明过程中使用的数学归纳法就是错误的.实际上在较复杂的情况下,使用数学归纳法一定要将归纳过程表述清楚,[9]是第2届中国数学奥林匹克竞赛试题,其解答归纳过程就交待不清;[8]是1989年加拿大数学奥林匹克试题,估计命题者忽视了存在着更一般的情况,而且此时恰恰无法使用原证明的数学归纳法,辨析中采用了现代数学中最基本的一一对应方法给出了

证明.

本书并非纯粹为了纠错,竞赛数学是一门成长中的学科,在一些书中出现这样那样的问题本不奇怪,这里仅仅是相对集中了起来,作为辨析的材料而已.为了使本书具备一定的覆盖面和系统性,或为了说明某一个问题有时也选用了些并没有错误或仅有小错的材料.[22]与[23]还通过自编题的形式,说明当用Δ方法或不等式法来求最大(小)值时,有时也会失效.[6]是第12届韩国奥林匹克竞赛试题,其符合题意条件的命题对象并不存在;自编题[11]是一道真正的命题对象不存在但又能严格证明命题成立的例子.

本书强调在辨析中来学习数学,虽然各节以题目为中心,但很多并非就题论题,除有时要作些相关知识的铺垫和引申外,重点想揭示的是如何从原材料中来发现问题和进一步提出问题.当然所谓学习也包括对原材料的学习,因为辨析本身就是在原材料的基础上所展开的.辨析比较有深度的有[24]、[65]、[66]、[83]、[90]、[115]、[120]、[127]、[135]等。例如其中的[66]是第23届国际数学奥林匹克竞赛试题,原题

仅仅要求 $f(1982)$ 的值,在一些书中称可得一般性结论 $f(n)=[\frac{n}{3}]$,$(1\leqslant n\leqslant 9999)$.可以发现该结论不正确,进而发现可以构建无穷多个定义在正整数集上的 $f(n)$,接着又可提出定义在 $1\leqslant n\leqslant 9999$ 上的 $f(n)$ 到底有多少个?

书中也收集了一些解答表述不清的题,[12]是典型;以及题意表述不清的题,[110]是典型.众所周知,题意表述尤其是试题的题意表述不能不被挑剔.实际上[123]是1992年全国初中数学联赛第二试的最后一题,题意也没有表述清楚.

为了减少本书辨析中的错误,初稿完成后请陈演祥先生、辜隆基先生各自独立地花了几个月的时间将辨析中的内容全部又推演了一遍,在此表示深深的感谢.

般显华

2004年12月

导读建议

本人的经验是,读数学书籍必备笔和纸,最忌快速度,要边阅读边做些相应的推导,将速度控制住.

书中有些原题和原解,因其自身的原因比较难读懂,应结合辨析阅读,避免浪费时间.

本书系统性不强,难易不均,可各取所需.除第一章外按内容分类,书中"☆"号表示原题的难易程度,"☆"号越多难度越高,"○"号表示原题内容属初中竞赛数学范围或表示摘自初中竞赛数学的书籍,但其中的大部分并不适宜初中生阅读.原题注明的出处是根据原材料.

高中生没有时间涉及课外内容,建议阅读如下属中学数学范围且难度不高的各节,然后若有余力再根据兴趣和实际可能选读其他各节.

[14]、[15]、[16];[51]、[52]、[53]、[54]、[56]、[57]、[59]、[60]、[63]、[67];[75]、[84]、[85]、[86]、[87]、[88];[36]、[38]、[39]、[41]、[42]、[43]、[44]、[45]、[46]、[47]、[48]、[49]、[50];略有余力再阅读[5]、[6]、[98]、[40]、[68]等.

对竞赛数学已了解的读者,如下各节,仍可参考.

[5]、[7]、[8]、[9]、[12]、[13]、[24]、[27]4°、[28]、[29]、[58]、[65]、[66]、[71]、[73]、[74]、[81]、[82]、[83]、[90]、[93]、[97]、[102]、[104]、[105]、

[106]、[107]、[108]、[109]、[110]、[115]、[120]、[121]、[124]、[127]、[128]、[131]、[133]、[135]、[136]、[137]等.

对有关方法有兴趣的读者可选读如下各节.

(1) 数学归纳法:[7]、[9]、[127]、[8]、[100]3°、[83]4°.

(2) 反证法:[7]、[10]、[11]、[19]、[73]、[103]、[115]、[126]、[133]、[134].

(3) 最小数原理:[7]2°、[10-1]、[10-2]、[76].

(4) 一一对应方法:[12]、[99]、[129]、[130]、[8]、[136].

(5) 抽屉原理:[1]、[2]、[135].

有关原题本身问题的例子(给试题的命题工作者作参考).

(1) 条件不充分:[14]、[15]、[13]、[97]、[137](3).

(2) 条件多余:[35]、[51].

(3) 命题对象不存在:[6]、[11].

(4) 命题的表述不严谨:[20]、[32]、[90]、[102]、[122]、[123]、[134]、[136].

(5) 题意表述不清:[5]、[58]、[62]、[82]、[99]、[101]、[110]、[120]、[131]、[133].

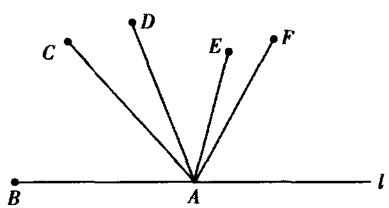
在本书中[4]2°是篇特殊的属于争鸣的辨析,阐述了不能将"零"归入自然数集的种种理由,算是给教材编写者进言.

第一章　概念、方法与表述

[1]抽屉原理　　　　　　　　　**反证法当作了抽屉原理**　　○☆

原题　平面上任意给定 6 个点(它们之中无三点共线),试证明:总能找到三点,使得这三点为顶点的三角形的内角中有不超过 30°的角.

原分析　记 6 个点为 A,B,C,D,E,F. 取过其中两点的直线 l,如图 - 1 所示,使其余四点在 l 同侧(这一点是可以办到的). 这样一来,可使我们处于有利位置.



[1]图 - 1

再考虑运用抽屉原理,只须

$$\angle BAF \leqslant 120°,$$

那么$\angle BAC$,$\angle CAD$,$\angle DAE$,$\angle EAF$ 中必有一个角不超过 30°.

若$\angle BAF > 120°$,则转而直接考察$\triangle BAF$:

$$\angle ABF + \angle AFB < 60°,$$

根据抽屉原理,其中必有一个角不超过 30°.

辨析

1°. 原题本不复杂,但两次运用了抽屉原理反而复杂化了. 实际这里不需要什么抽屉原理,而是分两种情况,然后用反证法给出

证明.

①若$\angle BAF \leqslant 120^\circ$.如果$\angle BAC$,$\angle CAD$,$\angle DAE$,$\angle EAF$都超过$30^\circ$,那么这四只角的总和就要超过$120^\circ$,与$\angle BAF \leqslant 120^\circ$矛盾.

②若$\angle BAF > 120^\circ$,则$\angle ABF + \angle AFB < 60^\circ$.如果$\angle ABF$,$\angle AFB$都超过$30^\circ$,其和大于$60^\circ$,又得到矛盾.

这样就用反证法证明了,总能找到三个点,使得这三个点为顶点的三角形的内角中有不超过30°的角.

2°.那么什么是抽屉原理呢?介绍如下:

抽屉原理 把$n+1$件或更多的物体放到n个抽屉中去,那么至少有一个抽屉里放进两件或更多的物体.

证明:假设结论不成立,即每一个抽屉里最多只能放进一个物体.因为总共有n个抽屉,因此最多只有n个物体放到n个抽屉中去,这与前提"把$n+1$件或更多的物体放到n个抽屉中去"矛盾.

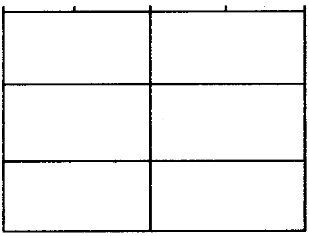
抽屉原理是证明存在性命题的一种非常重要的方法.在本书后面的问题中还会多次遇到.这里举三个例子,说明抽屉原理的应用.

[1-1] ○☆

在3×4的矩形中,放置七个点,试证:可以找到两个点,它们的距离不大于$\sqrt{5}$.

证明:将3×4的矩形分成六个1×2的小矩形(图-2),这小矩形的对角线的长为$\sqrt{2^2+1}=\sqrt{5}$,这也是小矩形上任意两点间距离的最大值.

将这六个小矩形视为六只抽屉(公共边属哪只抽屉可任意约定),根据抽屉原理,必有一只抽屉内存在两点,这两点的距离不大于$\sqrt{5}$.



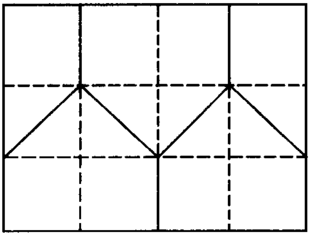
[1]图－2

[1－2] ☆☆

在 3×4 的矩形中，放置六个点，试证：可以找到两个点，它们的距离不大于$\sqrt{5}$.

（1981 年第 15 届全苏数学奥林匹克 10 年级试题）

分析：上题的七个点，改为本题的六个点，难度就增加了，像图－2那样构造抽屉已不能解决问题．应当构造五只抽屉，且每只抽屉仍要具备其中任意两点间的距离不大于$\sqrt{5}$的属性．图－3 所示的抽屉构造法，就可解决问题，读者可自行写出其证明．



[1]图－3

[1－3] ○☆☆

从 1 到 100 的 100 个自然数中任取 51 个，求证其中一定有两个自然数，它们中的某一个是另一个的倍数．

证明：将这 100 个数都写成 $2^k \cdot l$ 的形式，其中 l 是奇数：

$1=2^0\cdot1$；$2=2^1\cdot1$；$3=2^0\cdot3$；$4=2^2\cdot1$；$5=2^0\cdot5$；$6=2^1\cdot3$；…；$100=2^2\cdot25$.

将不同的 l 视为不同的抽屉.

因为 1,2,…,100 中有 50 个奇数,所以有 50 只抽屉,任取{1,2,…,100}中的 51 个数,肯定有两个数落入同一只抽屉.

注意到不管 k_1 与 k_2 是怎样的两个非负整数,自然数 $2^{k_1}\cdot l$ 与 $2^{k_2}\cdot l$ 都有倍数关系.可知,这落入同一只抽屉里的两个数,其中的一个是另一个的倍数.

3°. 再回到原题.从 2°中可知,利用抽屉原理证题,重要的是构造抽屉.从 2°中还可知,抽屉原理本身就是用反证法来证明的.但用反证法来证明的命题,并非都适合用抽屉原理来表述.例如原分析,两次提到了运用抽屉原理,那么它两次所对应的抽屉是什么呢?是什么物件放入了这些抽屉?又需要证明哪两个物件放入了同一个抽屉?

附带说明,原分析提及的"平面上任意给定的 6 个点(它们之中无三点共线)总能找到两个点,其余四点在这两个点连线的同侧"这一结论也是能够证明的.但这要用到竞赛数学组合几何中的平面上有限点集的凸包概念(参见[105]).取该六个点的凸包,因为无三点共线,凸包肯定是一个凸多边形,其顶点都是这六个点中的点,不作为顶点的点都位于这凸多边形的内部,这样凸包的任意一条边,就是所要找的那条连线.

[2]抽屉原理("至少"与"至多")　　　　解答错误　　○☆

原题　口袋里放有足够多的红、蓝、白三种颜色的球,现有 31 个人轮流从袋中取球,每人取三个,至多有多少个人所拿的球相互颜色不完全相同?

原解　我们从求"至少有多少人所拿的球的相互颜色是完全相同"入手.

每人取 3 个球,3 个球颜色完全相同有 3 种情况;有 2 个球颜色完全一样有 $C_3^1C_2^1=6$ 种情况,3 个球颜色互不相同只有一种情况. 即 3 个球的颜色搭配共有 10 种情况,而 $31=10\times3+1$.

根据抽屉原理,至少有 4 人所拿的球相互颜色完全一样,因此至多有 27 人所拿的球相互颜色不完全相同.

辨析

1°. 原解将简单问题复杂化了. 如果认为几个人所拿的球相互颜色不完全相同,是指这几个人中每两个两个比较所拿球的颜色都不完全相同,那么本题本是道简单题.

3 个球的颜色搭配共有如下 10 种情况:(红、红、红)、(蓝、蓝、蓝)、(白、白、白)、(红、红、蓝)、(红、红、白)、(蓝、蓝、红)、(蓝、蓝、白)、(白、白、红)、(白、白、蓝)、(红、蓝、白). 显然,可以有 10 个人所拿的球相互颜色不完全相同. 如果将 3 个球的颜色搭配的 10 种情况视为 10 只抽屉,考察 11 个人或 11 个以上的人各人所拿 3 个球的颜色搭配情况,根据[1]中的抽屉原理,总有两个人各自所拿 3 个球的颜色搭配情况属于同一个抽屉,于是 11 个人或 11 个以上的人各人拿 3 个球,每两个人两个人比较,就不可能所拿的球相互颜色都不完全相同. 也就是说至多有 10 个人所拿的球相互颜色不完全相同.

2°. 原解中称,31 个人轮流从袋中取球,每人取三个,至少有 4 个人所拿的球相互颜色完全相同. 这个结论是正确的,根据也是抽屉原理.

抽屉原理的第二种形式

把 $m\cdot n+1$ 件或更多的物体放到 n 个抽屉中去,那么至少有一个抽屉放进 $m+1$ 件或更多的物体.

证明:假设结论不成立,即每一个抽屉里最多只能放进 m 个物体. 因为总共有 n 个抽屉,因此最多只有 $m\cdot n$ 个物体放到 n 个抽屉中去,这与前提"把 $m\cdot n+1$ 件或更多的物体放到 n 个抽屉中去"矛盾.

将 3 个球的颜色搭配的 10 种情况,视为 10 只抽屉. 由于 31 =