宋清岳　王龙波　刘月兰　主编

# 高等数学

GAODENGSHUXUE

山东大学出版社

# 高等数学

宋清岳　王龙波　刘月兰　主编

山东大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学/宋清岳,王龙波,刘月兰主编.—济南:山东大学出版社,2006.9

ISBN 7-5607-3252-6

Ⅰ.高...
Ⅱ.①宋...②王...③刘...
Ⅲ.高等数学—高等学校:技术学校—教材
Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 104453 号

山东大学出版社出版发行
(山东省济南市山大南路 27 号 邮政编码:250100)
山 东 省 新 华 书 店 经 销
山东旅科印务有限公司印刷
787×1092 毫米 1/16 16.25 印张 371 千字
2006 年 9 月第 1 版 2006 年 9 月第 1 次印刷
定价:26.60 元

# 前 言

根据教育部与山东省教育厅有关文件对高职高专高等数学课程学习的基本要求，我们编写了本教材。

在编写过程中，我们注意到国内外同类高校高等数学教学改革的最新动向；注意到新的数学思想与现代化数学手段的应用；充分考虑到高职高专学生的学习目的和实际。因此，本教材的编写进一步贯彻以应用为目的，以必需、够用为度的原则，加强数学知识与实际的联系，突出应用问题；本教材强调数学的思想和方法，从内容的编排上体现了科学性、逻辑性与系统性；力争语言准确，条理清楚。

为了更有效地培养学生科学、良好的思维习惯，提高学生的学习素质，我们对全书的习题做了重大调整，除每节配有少量的体现基本概念、基本公式应用的练习外，每章配置一套以培养学生综合运用知识、解决实际问题能力为目的的综合练习题。

本教材共分九章，包括一元函数微积分向量与空间解析几何，多元函数微积分，常微分方程，无穷级数。本教材适合高职高专管理、经济类学生学习使用，也可供工程技术人员做参考用书，本教材基本数学时数应不少于120学时。

参加本教材编写工作的有：山东省青年管理干部学院宋清岳、王龙波、刘月兰；山东经济学院宋宝亚；山东女子学院季振东；山东财政学院郝秀梅；山东理工大学刘江臣。山东省青年管理干部学院教授宋清岳先生承担了全部教材的框架结构设计和统稿、定稿工作。本教材在编写过程中得到了有关领导和同行们的大力支持，在此一并表示感谢！

由于水平所限，本书缺点和错误在所难免，敬请广大师生和读者批评指正。

编 者
2006 年 9 月

# 目 录


**第一章 函数 极限 连续** …… (1)

§1.1 函数及其性质 …… (1)

一、函数的概念 …… (1)

二、函数的几何特性 …… (3)

三、反函数 …… (4)

§1.2 初等函数 …… (6)

一、基本初等函数 …… (6)

二、复合函数 …… (6)

三、初等函数 …… (6)

§1.3 数列的极限 …… (7)

一、数列极限的定义 …… (7)

二、数列极限存在的准则 …… (8)

§1.4 函数的极限 …… (9)

一、当 $x\to\infty$ 时,函数的极限 …… (9)

二、当 $x\to x_0$ 时,函数的极限 …… (10)

三、极限的性质 …… (12)

§1.5 无穷小与无穷大 …… (13)

一、无穷小 …… (13)

二、无穷大 …… (14)

三、无穷大与无穷小的倒数关系 …… (14)

四、无穷小的比较 …… (15)

§1.6 极限的运算 …… (16)

§1.7 两个重要极限 …… (18)

一、极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. …… (18)

二、极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ …… (19)

§1.8 函数的连续性 …… (20)

一、函数的连续性定义 …… (20)

二、初等函数的连续性 …… (21)

三、函数的间断点 …… (21)
四、闭区间上连续函数的性质 …… (22)

第二章 导数与微分 …… (26)

§2.1 导数的概念 …… (26)
一、两个实例 …… (26)
二、导数的定义 …… (27)
三、可导与连续的关系 …… (29)
四、导数的几何意义 …… (29)
§2.2 求导公式与求导法则 …… (30)
一、基本初等函数的导数公式 …… (30)
二、导数的运算法则 …… (31)
三、高阶导数 …… (33)
*四、隐函数求导 …… (33)
§2.3 微分及其在近似计算中的应用 …… (34)
一、微分的概念 …… (34)
二、微分的计算 …… (36)
三、微分在近似计算中的应用 …… (37)

第三章 导数的应用 …… (40)

§3.1 拉格朗日中值定理与函数的单调性 …… (40)
一、罗尔定理 …… (40)
二、拉格朗日定理 …… (40)
三、函数的单调性 …… (42)
§3.2 函数的极值与最值 …… (43)
一、函数的极值 …… (43)
二、函数的最值 …… (45)
§3.3 曲线的凹凸性与函数作图 …… (47)
一、曲线凹向与拐点 …… (47)
二、曲线的渐近线 …… (48)
三、函数作图 …… (49)
§3.4 柯西定理与洛必达法则 …… (51)
一、柯西中值定理 …… (51)
二、洛必达法则 …… (51)
§3.5 导数在经济上的应用 …… (54)
一、常见的经济函数 …… (54)
二、边际与边际分析 …… (56)
三、弹性与弹性分析 …… (57)

**第四章 不定积分** ………………………………………………… (61)

§4.1 不定积分的概念……………………………………………… (61)

一、原函数 ……………………………………………………… (61)

二、不定积分 …………………………………………………… (62)

三、不定积分的几何意义 ……………………………………… (63)

§4.2 不定积分的性质与基本公式………………………………… (64)

一、不定积分的性质 …………………………………………… (64)

二、不定积分的基本公式 ……………………………………… (64)

§4.3 积分方法……………………………………………………… (65)

一、第一类换元积分法(凑微分法) …………………………… (66)

二、第二类换元积分 …………………………………………… (67)

三、分部积分法 ………………………………………………… (69)

**第五章 定积分及其应用** ………………………………………… (74)

§5.1 定积分概念与性质…………………………………………… (74)

一、曲边梯形的面积与变速直线运动的路程 ………………… (74)

二、定积分概念 ………………………………………………… (76)

三、定积分的性质 ……………………………………………… (79)

§5.2 微积分基本定理……………………………………………… (80)

一、变上限的定积分 …………………………………………… (80)

二、牛顿—莱布尼茨公式 ……………………………………… (80)

§5.3 定积分的计算方法…………………………………………… (82)

一、定积分的换元积分法 ……………………………………… (82)

二、定积分的分部积分法 ……………………………………… (83)

§5.4 广义积分……………………………………………………… (85)

一、无限区间上的积分 ………………………………………… (85)

二、无界函数的积分 …………………………………………… (87)

§5.5 用定积分求平面图形的面积………………………………… (89)

一、直角坐标系中平面图形的面积 …………………………… (89)

二、由参数方程所表示的曲线的面积 ………………………… (91)

三、极坐标系中平面图形的面积 ……………………………… (91)

§5.6 定积分在经济上的应用……………………………………… (92)

一、已知总产量的变化率求总产量 …………………………… (92)

二、已知边际函数求总函数 …………………………………… (93)

**第六章 常微分方程** ……………………………………………… (98)

§6.1 常微分方程的基本概念……………………………………… (98)

一、微分方程的基本概念 …… (98)
二、可分离变量的微分方程 …… (99)
§6.2 一阶线性微分方程与可降阶的高阶微分方程的求解方法 …… (101)
一、一阶线性微分方程 …… (101)
二、可降阶的高阶微分方程 …… (103)
§6.3 二阶常系数线性微分方程 …… (105)
一、二阶常系数线性微分方程解的性质 …… (105)
二、二阶常系数线性齐次微分方程的求解方法 …… (106)
三、二阶常系数线性非齐次微分方程的解法 …… (107)

**第七章 向量与空间直角坐标系 …… (114)**

§7.1 空间直角坐标系 …… (114)
一、空间直角坐标系 …… (114)
二、空间两点间的距离 …… (115)
§7.2 向量代数 …… (116)
一、向量的基本概念 …… (116)
二、向量的线性运算 …… (117)
三、向量的坐标表示法 …… (118)
四、向量的数量积和向量积 …… (121)
§7.3 空间曲面及其方程 …… (126)
一、曲面与方程 …… (126)
二、几种常见的曲面 …… (127)
§7.4 平面及其方程 …… (132)
一、平面的方程 …… (132)
二、平面外一点到平面的距离 …… (134)
三、两平面间的夹角 …… (134)
§7.5 空间曲线及其方程 …… (136)
一、空间曲线的一般方程 …… (136)
二、空间曲线的参数方程 …… (136)
三、空间曲线在坐标面上的投影 …… (137)
四、空间直线的方程 …… (138)

**第八章 多元函数微积分 …… (142)**

§8.1 多元函数的基本概念 …… (142)
一、平面区域 …… (142)
二、多元函数概念 …… (143)
三、二元函数的极限与连续性 …… (144)
§8.2 偏导数 …… (145)

一、偏导数 …………………………………………………………… (146)
二、高阶偏导数 ……………………………………………………… (147)
§8.3　全微分 ……………………………………………………… (149)
一、全微分的定义 …………………………………………………… (149)
二、全微分在近似计算中的应用 …………………………………… (150)
§8.4　多元复合函数微分法及偏导数的几何应用 ………………… (152)
§8.5　多元函数的极值 …………………………………………… (160)
一、多元函数的极值 ………………………………………………… (160)
二、条件极值与拉格朗日乘数法 …………………………………… (162)
§8.6　二重积分概念及其性质 …………………………………… (164)
一、二重积分的概念 ………………………………………………… (165)
二、二重积分的性质 ………………………………………………… (167)
§8.7　二重积分的计算与应用 …………………………………… (168)
一、在直角坐标系下计算二重积分 ………………………………… (168)
二、在极坐标系下计算二重积分 …………………………………… (171)
三、二重积分应用举例 ……………………………………………… (174)

**第九章　无穷级数** ……………………………………………… (182)

§9.1　无穷级数概念及其性质 …………………………………… (182)
一、无穷级数概念 …………………………………………………… (182)
二、无穷级数的性质 ………………………………………………… (184)
§9.2　正项级数 …………………………………………………… (185)
一、收敛的基本定理 ………………………………………………… (185)
二、正项级数的收敛判别法 ………………………………………… (186)
§9.3　任意项级数 ………………………………………………… (188)
一、交错级数 ………………………………………………………… (188)
二、绝对收敛与条件收敛 …………………………………………… (189)
§9.4　幂级数 ……………………………………………………… (190)
一、函数项级数 ……………………………………………………… (190)
二、幂级数 …………………………………………………………… (191)
三、幂级数的性质 …………………………………………………… (193)
四、将函数展开成幂级数 …………………………………………… (194)

**附录 A　初等数学中的常用公式** ………………………………… (200)
**附录 B　常见的平面曲线及其方程** ……………………………… (205)
**附录 C　常用积分表** ……………………………………………… (208)
**答案与提示** ………………………………………………………… (218)

# 第一章　函数　极限　连续

函数是高等数学最基本的概念，它反映了客观世界变量间的依赖关系. 极限作为一种重要的思想方法和工具贯穿于高等数学的始终，它的理论构成了微分学和积分学的基础. 连续函数是高等数学所讨论的主要函数类型. 本章主要介绍函数、极限、连续等基本概念，以及它们的一些性质.

## §1.1　函数及其性质

### 一、函数的概念

在研究某一问题的过程中，常常会遇到两个相互依赖的变量，变量之间以某种形式相互联系、互相制约的关系，称之为函数.

1. 函数的定义

**定义 1.1**　设有两个变量 $x$ 和 $y$，$D$ 是一个给定的非空数集. 若对于任意一个数 $x\in D$，按照某一对应规律 $f$，变量 $y$ 总有惟一确定的值与之对应，则称 $y$ 是 $x$ 的函数，记作：

$$y=f(x),x\in D,$$

其中，$x$ 称为自变量，$y$ 称为函数；数集 $D$ 称为该函数的定义域.

若对于确定的 $x_0\in D$，通过对应规律 $f$，函数 $y$ 有惟一确定的值 $y_0$ 相对应，则称 $y_0$ 为函数 $y=f(x)$ 在 $x_0$ 处的函数值，记作：

$$y_0=y\Big|_{x=x_0}=f(x_0),$$

全体函数值的集合，称为函数的值域，记作 $M$.

若函数 $y=f(x)$ 的定义域是数集 $D$，则它的值域 $M=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$.

在实际问题中，函数的定义域要根据实际问题的意义来确定. 例如，每本书的单价是 6 元，买 $x$ 本书花 $y$ 元的函数关系式是 $y=6x$，其定义域是非负整数.

在数学中，往往不考虑函数的实际意义，而是抽象地研究用算式来表达的函数，这时函数的定义域只要能保证算式有意义就行. 例如：$y=\ln(x+1)$ 的定义域是 $(-1,+\infty)$.

2. 函数的两个要素

函数的对应规律和定义域为函数的两个要素. 定义域，对应规律完全相同的函数视为同一函数.

**例 1**　设 $y=f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$，求 $f\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$.

**解** $f\left(\frac{2}{\pi}\right)=y\Big|_{\frac{2}{\pi}}=\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$.

**例 2** 求函数 $y=\frac{\sqrt{9-x^2}}{\ln(x+2)}$的定义域.

**解** 这是分式.对分子、分母分别讨论.

对分子 $\sqrt{9-x^2}$,因偶次根的根底式应非负,所以 $9-x^2\geqslant0$;

对分母 $\ln(x+2)$,因对数符号下的式子应为正,且分母不能为零,所以:

$$\begin{cases}x+2>0,\\x+2\neq1,\end{cases}$$

所以要使函数有意义必须满足$\begin{cases}9-x^2\geqslant0,\\x+2>0,\\x+2\neq1,\end{cases}$ 即$\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant3,\\x>-2,\\x\neq-1.\end{cases}$

因此所求定义域是$(-2,-1)\cup(-1,3]$.

**例 3** 下列函数是否相同?为什么?

(1) $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$;

(2) $y=\frac{x^2-1}{x-1}$与 $y=x+1$;

(3) $y=x$ 与 $y=x(\sin^2x+\cos^2x)$.

**解** (1) $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$ 不是相同的函数,因为定义域不同;

(2) $y=\frac{x^2-1}{x-1}$与 $y=x+1$ 不是相同的函数,因为定义域不同;

(3) $y=x$ 与 $y=x(\sin^2x+\cos^2x)$是相同的函数,因为定义域和对应法则都相同.

3. 函数的表示方法

函数的表示方法主要有三种:表格法、图像法和公式法.

表格法是将一系列自变量 $x$ 的值与对应的函数值 $y$ 列成表.例如:车站上的里程票价表,我们所用的平方表、对数表、三角函数表等均是用表格法表示的函数.

图像法就是用平面直角坐标系中的曲线表示变量 $x$ 与 $y$ 之间的函数关系.

**例 4** 王先生到郊外去观景,他匀速前进,离家不久,他发现一骑车人的自行车坏了,他帮助这个人把自行车修好,随后又上路了.请把王先生离家的距离关于时间的函数用图形描述出来.

**解** 王先生离家的距离关于时间的函数图形如图 1-1 所示.

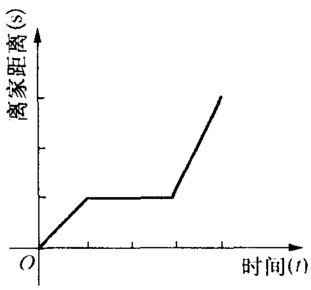

图 1-1

公式法就是用数学表达式表示函数关系的方法.例如:$y=\sin x$,$s=\pi r^2$ 等.

在用公式法表示的函数中,有以下两种需要指明的情形:

(1)分段函数 两个变量之间的函数关系有时要用两个或多于两个的数学式子来表达,即对一个函数,在其定义域的不同部分用不同数学式子来表达,称为分段函数.

**例 5** 函数 $f(x)=\mathrm{sgn}x=\begin{cases}1,x>0,\\0,x=0,\\-1,x<0\end{cases}$ 称为符号函数，这是分段函数，它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$；值域 $M=\{-1,0,1\}$. 它的图形如图 1-2 所示.

对于分段函数，应特别注意：

(i) 分段函数是用几个式子合起来表示的一个函数，而不是几个函数；

(ii) 由于分段函数是用多个式子表示，所以每一段上自变量的取值范围必须明确标出；

(iii) 对分段函数求函数值时，不同点的函数值应代入相应范围的公式中去求；

(iv) 分段函数的定义域是各段函数自变量取值范围的并集.

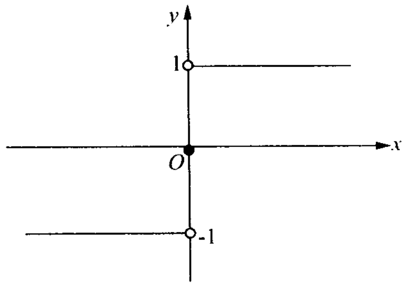

图 1-2

**例 6** 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\cos 2x,|x|\leqslant 1,\\2x+1,|x|>1.\end{cases}$ 求 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ 与 $f(-2)$.

**解** $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$；

$f(-2)=2\times(-2)+1=-3$.

(2)显函数与隐函数 若因变量 $y$ 用自变量 $x$ 的数学式直接表示出来，即等号一端只有 $y$，而另一端是 $x$ 的解析表示式，这样的函数称为显函数. 例如：$y=\sqrt{1-x^2}$，$y=\log_a(3x+1)$都是显函数.

若两个变量 $x$ 与 $y$ 之间的函数关系隐含在一个二元方程 $F(x,y)=0$ 中，这类函数称为隐函数. 例如：$ax+y+c=0$，$xy-e^{x+y}=0$ 都是隐函数.

有些隐函数可以写成显函数，这种把隐函数写成显函数的过程叫做隐函数的显化. 例如：$ax+y+c=0$ 显化为 $y=-ax-c$. 但并不是所有的隐函数都能显化，有的隐函数显化是不可能的. 例如：$xy-e^{x+y}=0$.

## 二、函数的几何特性

设函数 $f(x)$在某区间 $I$ 上有定义

1. 函数的有界性

若存在正数 $M$，使得在区间 $I$ 上任意 $x$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$在 $I$ 上有界；否则称 $f(x)$在 $I$ 上无界. 例如：$y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上是有界的；$y=\ln x$ 在$(0,1)$内是无界的.

2. 函数的单调性

若对于区间 $I$ 内任意两点 $x_1,x_2$ 当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$在 $I$ 上单调增加，区间 $I$ 称为单调增区间；若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$在 $I$ 上单调减少，区间 $I$ 称为单调减区间. 单调增区间或单调减区间统称为单调区间，单调增加的函数和单调减少的函数统称为单调函数.

3. 函数的奇偶性

设 $I$ 为关于原点对称的区间，若对于任意 $x\in I$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图像关于 $y$ 轴对称，奇函数的图像关于坐标原点对称.

4. 函数的周期性

若存在不为零的数 $T$，使得对于任意 $x\in I$，有 $x+T\in I$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期. 例如：$y=\sin x$，$y=\cos x$ 的周期是 $2\pi$，$y=\sin\omega x$，$y=\cos\omega x$ 的周期是 $\dfrac{2\pi}{\omega}(\omega>0)$.

**例 7** 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$；　(2) $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$；　(3) $f(x)=x^3+\sin x+1$.

**解** (1) 因为 $f(-x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{(-x)^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数.

(2) 因为 $f(-x)=\ln\dfrac{1-(-x)}{1+(-x)}=\ln\dfrac{1+x}{1-x}=-\ln\dfrac{1-x}{1+x}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 是奇函数.

(3) 因为 $f(-x)=(-x)^3+\sin(-x)+1=-x^3-\sin x+1$，$f(-x)\neq f(x)$，$f(-x)\neq -f(x)$，所以该函数既不是奇函数，也不是偶函数.

**例 8** 判断函数 $y=\ln x$ 的单调性.

**解** 函数的定义域是 $(0,+\infty)$，在其定义域内任取两点 $x_1$，$x_2$，且 $x_1<x_2$，由于 $f(x_2)-f(x_1)=\ln x_2-\ln x_1=\ln\dfrac{x_2}{x_1}>0$，故 $f(x_1)<f(x_2)$，即函数在 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的，如图 1-3 所示.

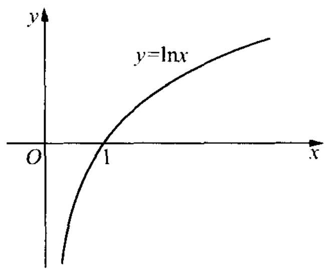

图 1-3

再如，函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 内是单调减少的，在 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的，而在 $(-\infty,+\infty)$ 内不具备单调性.

**三、反函数**

**定义 1.2** 已知函数 $y=f(x)$，$x\in D$，$y\in M$，若对于每一个 $y\in M$，$D$ 中只有一个 $x$ 值，使得：

$$f(x)=y$$

成立，这就以 $M$ 为定义域确定了一个函数，这个函数称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作：

$$x=f^{-1}(y),\ y\in M.$$

按习惯记法，$x$ 作自变量，$y$ 作函数，函数 $y=f(x)$ 的反函数记作：

$$y=f^{-1}(x),\ x\in M.$$

若函数 $y=f(x)$ 的反函数是 $y=f^{-1}(x)$，则 $y=f(x)$ 也是函数 $y=f^{-1}(x)$ 的反函数，或者说它们互为反函数，且

$$f^{-1}(f(x))=x,\ f(f^{-1}(y))=y.$$

由反函数定义知：

(1) 由函数 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$，它们是同一个函数，其函数的图形是同一条曲线，而 $y=f^{-1}(x)$，与 $y=f(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称；

(2) 若函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D$，值域为 $M$，则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域为 $M$，值域为 $D$.

函数 $y=e^x$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内的反函数是 $y=\ln x, x\in(0,+\infty), y\in(-\infty,+\infty)$；而函数 $y=x^2$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内没有反函数，若限制定义域 $D=[0,+\infty)$，则有反函数，$y=\sqrt{x}, x\in[0,+\infty)$.

**例 9**　求函数 $y=2^{x-1}$ 的反函数.

**解**　由 $y=2^{x-1}$ 得 $x=1+\log_2 y$，将上式中的 $x$ 与 $y$ 互换，得到反函数 $y=1+\log_2 x$.

## 习题 1.1

1. 在下列各对函数中，是相同函数的是(　　).

(1) $y=\ln x^7$ 与 $y=7\ln x$；　　(2) $y=\ln\sqrt{x}$ 与 $y=\dfrac{1}{2}\ln x$；

(3) $y=\cos x$ 与 $y=\sqrt{1-\sin^2 x}$；　　(4) $y=\dfrac{1}{x+1}$ 与 $y=\dfrac{x-1}{x^2-1}$.

2. 求下列函数的定义域

(1) $y=\dfrac{x}{x^2+3x}$；　　(2) $y=\sqrt{x^2-9}$；　　(3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{|x|-1}}$；

(4) $y=\dfrac{1}{\ln(x-5)}$；　　(5) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$；　　(6) $y=\dfrac{1}{\ln(2-x)}+\sqrt{100-x^2}$.

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, 0\leqslant x<1,\\ 2-x, 1\leqslant x<2,\\ x, x\geqslant 2,\end{cases}$ 求(1) 函数 $f(x)$ 的定义域；(2) 求 $f(0)$，$f(1)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f(3)$.

4. 确定下列函数的奇偶性

(1) $y=x^2\sin x$；　　(2) $y=\lg\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$；

(3) $y=\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$；　　(4) $y=x^2\arcsin x$.

5. 指出下列函数的单调性

(1) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$；　　(2) $y=\operatorname{arccot} x$；　　(3) $y=x^3+1$.

6. 求下列函数的反函数

(1) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$；　　(2) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$；　　(3) $y=1+\lg(x-2)$.

# §1.2 初等函数

## 一、基本初等函数

下列六类函数称为基本初等函数.

1. 常数函数 $y=C$($C$ 为常数);
2. 幂函数 $y=x^{\mu}$($\mu$ 为常数);
3. 指数函数 $y=a^{x}$($a>0,a\neq 1,a$ 为常数);
4. 对数函数 $y=\log_{a}x$($a>0,a\neq 1,a$ 为常数);
5. 三角函数 $y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x,y=\sec x,y=\csc x$;
6. 反三角函数 $y=\arcsin x,y=\arccos x,y=\arctan x,y=\operatorname{arccot} x$.

## 二、复合函数

**定义 1.3** 已知两个函数:

$$y=f(u),u\in D_1,y\in M_1,$$
$$u=\varphi(x),x\in D_2,u\in M_2,$$

则称 $y=f[\varphi(x)]$是由 $y=f(u)$和 $u=\varphi(x)$经过复合而成的复合函数.通常称 $f(u)$是外层函数,称 $\varphi(x)$是内层函数,称 $u$ 为中间变量.

复合函数可用两个以上函数复合而成.

例如函数 $y=f(u)=e^{u},u=\varphi(x)=\cos x$,则函数 $y=f(\varphi(x))=e^{\cos x}$就是由已知的两个函数复合而成的复合函数.

**例 1** 函数 $y=\sqrt{\ln\sin\sqrt{x}}$是由哪几个函数复合而成的?

**解** $y=\sqrt{\ln\sin\sqrt{x}}$是由 $y=\sqrt{u},u=\ln v,v=\sin t,t=\sqrt{x}$复合而成的复合函数.

**例 2** 设 $f(x)=x^2,g(x)=2^x$,求 $f[g(x)],g[f(x)]$.

**解** $f[g(x)]=[g(x)]^2=(2^x)^2=4^x,g[f(x)]=2^{f(x)}=2^{x^2}$.

## 三、初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合而形成的函数,称为初等函数.例如:$y=\sqrt{1+\sin^2 x},y=\arcsin\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$都是初等函数.

而 $y=x+x^2+x^3+\cdots$与 $f(x)=\begin{cases}1,x>0,\\0,x=0,\\-1,x<0\end{cases}$都不是初等函数.

**例 3** 下列函数统称为双曲函数:

双曲正弦函数 $\operatorname{sh}x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$;

双曲余弦函数 $\mathrm{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$;

双曲正切函数 $\mathrm{th}x=\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}$.

它们都是初等函数,在工程上是常用的.

## 习题 1.2

1. 下列函数由哪些基本初等函数复合而成?

(1) $y=\sin x^2$; (2) $y=\sin^2 x$; (3) $y=\sqrt{\ln x}$

(4) $y=e^{\tan\frac{1}{x}}$; (5) $y=\ln\tan\dfrac{1}{x^2}$; (6) $y=\sin^2(\ln x)$.

2. 单项选择题

(1) 已知 $f(\sin x)=\cos 2x$,则 $f(x)=$ ( ).

(A) $1-x^2$; (B) $1-2x^2$; (C) $1+2x^2$; (D) $2x^2-1$.

(2) 设 $f(x^2+1)=x^4+5x^2+3$,则 $f(x^2-1)=$ ( ).

(A) $x^4-x^2-3$; (B) $x^4+x^2+3$; (C) $x^4-x^2+3$; (D) $x^4+x^2-3$.

3. 已知 $f(x)=x^3+1$,求 $f(x^2)$,$[f(x)]^2$,$f(f(x))$,$f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$.

# §1.3 数列的极限

## 一、数列极限的定义

1. 无穷数列的变化趋势

已知数列:

(1) $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}:1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots,\dfrac{1}{n},\cdots$

(2) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}:\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\cdots,\dfrac{n}{n+1},\cdots$

当项数 $n$ 无限增大时,数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 无限趋向于 0;数列 $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ 无限趋向于 1.

2. 数列极限的定义

**定义 1.4** 对于数列 $\{x_n\}$,如果当 $n$ 无限增大时,通项 $x_n$ 无限接近于一个确定的常数 $A$,那么 $A$ 就叫做数列 $\{x_n\}$ 的极限,记作:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A \text{ 或 } x_n\to A(n\to\infty).$$

前式读作"当 $n$ 无限增大时,$x_n$ 的极限等于 $A$";后式读作"当 $n$ 趋于无穷大时,$x_n$ 趋于 $A$",

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$.

有极限的数列称为收敛数列；没有极限的数列称为发散数列.

**例 1** 观察下列数列的极限：

(1) $x_n=\frac{1}{2^n}$； (2) $x_n=(-1)^{n+1}$；

(3) $y_n=\frac{1+(-1)^n}{n}$； (4) $y_n=2n+1$.

**解** (1)由数列 $x_n=\frac{1}{2^n}$ 可得到数列：

$$\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\frac{1}{2^4},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$$

当 $n$ 无限增大时，数列无限接近于 0，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$

(2)由数列 $x_n=(-1)^{n+1}$ 可得到数列：

$$1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$$

数列在 1 与 $-1$ 之间摆动，不能接近于任何一个常数，不存在极限.

(3)由数列 $y_n=\frac{1+(-1)^n}{n}$ 可得到数列：

$$0,1,0,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1+(-1)^n}{n},\cdots$$

当 $n$ 无限增大时，数列无限接近于 0，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+(-1)^n}{n}=0$

(4)由数列 $y_n=2n+1$ 可得到数列：

$$3,5,7,\cdots,2n+1,\cdots$$

当 $n$ 无限增大时，数列 $y_n=2n+1$ 的通项无限增大，不能接近于任何一个常数，不存在极限.

## 二、数列极限存在的准则

**准则 I**（夹逼准则） 如果数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$ 满足下列条件：

(1) $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$ .

那么，数列 $\{x_n\}$ 的极限存在且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

**准则 II** 单调有界的数列必有级限.

**例 2** 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}$.

**解** 因为 $1<\sqrt{1+\frac{1}{n}}<1+\frac{1}{n}$，

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}1=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1$.