华东师范大学
函授教材

解析几何讲义

华东师范大学数学系
几何教研組编

（第一册）

华东师范大学出版社

华东师范大学函授教材

解析几何講义

华东师范大学数学系
几何教研組編

（第一册）

华东师范大学出版社

解析几何講义
（第一册）
华东师范大学数学系几何教研組编
（內部讀物　凭証发行）
*
华东师范大学出版社出版
（上海中山北路3663号）
上海市書刊出版業營業許可証出〇八八号
上海市印刷三厂印刷　　新华書店上海发行所
*
开本 787×1092 公厘 1/27　印張 3 5/27　字数 73,000
1958年11月第一版
1958年11月第一次印刷
印数 1—7080
統一書号：13135 · 6
定　价：(10)0.48元

目　　錄

第一部分　平面解析几何学

第一部分　平面解析幾何學

第一講　行列式理論初步

在日常生活中，我們遇到了這样的一种問題：如有甲、乙二亩水稻地，去年它們的总产量为 1800 斤，全民整风以后，今年甲地亩产量比去年增加 60 倍，而乙地总产量比去年增加 64 倍，已知它們的总产量是 113000 斤，問它們去年的产量各是多少？

象这类問題，同志們一看就知道是列一个綫性方程組的問題，方程組的列法如下：

設　甲地去年亩产量为 x，

　　乙地去年亩产量为 y，

则 $\begin{cases} x+\quad y=\quad 1800\cdots\cdots(1) \\ 61x+65y=113000\cdots\cdots(2) \end{cases}$

这是一个二个变数的綫性方程組，解之，可得

$x=1000$（斤），

$y=\ 800$（斤）。

但是在解綫性方程組时，在运算过程中会覺得有点繁瑣，特别是变数很多、方程个数也較多时，因此我們有必要利用一种工具——行列式，来縮短运算的时間。行列式在解析几何中的用途也很大的，例如求三角形的面积，三点共綫，以及三綫共点等問題用了行列式就非常方便。現在只講它应用于解析几何学方面的初步理論，从綫性方程組的求解，引进二阶行列式的一些基本性質，再推广得三阶行列式的一些基本性質及应用。

学习指示：（i）弄清楚行列式的定义和特性；

　　　　　（ii）掌握二阶及三阶行列式的运算方法；

(iii) 深入体会三元綫性齐次方程組有非零介的意义和条件，这条件对解析几何用途最大。

§1.1 **二阶行列式** 在初等代数学中已講过关于一次方程組的問題，現在我們要講比初等代数学中所講过的更加方便的方法。

設有二元綫性方程組:

$$\left.\begin{array}{ll} a_1x+b_1y=c_1 & \text{(i)} \\ a_2x+b_2y=c_2 & \text{(ii)} \end{array}\right\} \qquad (1)$$

初等代数学中用消去法求解，以 b_2 乘 (i) 式，b_1 乘 (ii) 式，然后相减，得

$$(a_1b_2-a_2b_1)\ x=c_1b_2-c_2b_1 \qquad (2)$$

同样得 $$(a_1b_2-a_2b_1)\ y=c_2a_1-a_2c_1$$

如果 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$，那么，方程組(1)有唯一的解

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1} \qquad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1} \qquad (2')$$

(2')的分子、分母是形式相同的代数式：二个因数的乘积减去其余二个因数的乘积，这种形式的代数式，例如 $a_1b_2-a_2b_1$ 叫做二阶行列式，記作:

$$a_1b_2-a_2b_1=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

行列式的計算方法就是：左上角的数乘以右下角的数的积减去左下角的数乘以右上角的数的积

例如 $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}=3\times 8-1\times 5=24-5=19$;

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc\text{。}$$

注意下列的名称:

(1) 行列式的元素　組成二阶行列式的数或文字叫做行列式的元素，在行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 中，a、b、c、d、就叫做行列式的元素，在

行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}$ 中，3、5、1、8、就叫做行列式的元素。二阶行列式共有四个元素。

（2）行列式的項　計算行列式时所得的乘积，叫做行列式的項，ad 和 cb 就是行列式：$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 的項。二阶行列式共有二項。

（3）行　横的排叫做行，元素 a 和 b 組成行列式的第一行，元素 c 和 d 組成行列式的第二行。二阶行列式共有二行。

（4）列　縱的排叫做列，元素 a 和 c 組成行列式的第一列，元素 b 和 d 組成行列式的第二列。二阶行列式共有二列。

（5）对角綫　在行列式中有二对角綫，元素 a 和 d 組成行列式的主对角綫，元素 c 和 b 組成行列式的付对角綫。

在行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 中

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \multicolumn{2}{c}{(\text{第一行})} \\ c & d \\ \multicolumn{2}{c}{(\text{第二行})} \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a\ (\text{第一列}) & b\ (\text{第二列}) \\ c & d \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a\ {}^{\text{主對角綫}} & b \\ c & d \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a & {}^{\text{付對角綫}}\ b \\ c & d \end{vmatrix}$$

利用这些术語，就得結論：二阶行列式等于它主角綫上二元素的乘积減去它付对角綫上二元素的乘积。

利用行列式可以把（2′）写成下面的形式

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad (3)$$

观察上式 x 和 y 的值，都是由分式表示，而分式的分母是相同的。在表示 x 的分式中，只要把分母的第一列（即 x 的系数）a_1, a_2 换为常数項 c_1, c_2，就得到它的分子。同样，在表示 y 的分式中，只要把它分母的第二列（即 y 的系数）b_1，b_2 換为 c_1, c_2，就得它的分子。

例 1 $\begin{cases} 5x+2y=5 & (1) \qquad a_1=5, \quad b_1=2, \quad c_1=5 \\ x-3y=18 & (2) \qquad a_2=1, \quad b_2=-3, \quad c_2=18 \end{cases}$

解 x：分母：$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-17$，分子：以 5, 18 代 5, 1

$\therefore \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 18 & -3 \end{vmatrix}=-51 \qquad \therefore x=\dfrac{-51}{-17}=3$。

解 y：分母：$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-17$，　分子：以 5, 18 代 2, −3

$\therefore \quad \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 18 \end{vmatrix}=5\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 18 \end{vmatrix}=5(18-1)=85 \quad \therefore y=\dfrac{85}{-17}=-5$。

$\therefore \begin{cases} x=3 \\ y=-5 \end{cases} \qquad (3)$

驗算：以(3)代入(1)左边得：$5\times3+2(-5)=15-10=5$，

$\therefore$(1)左=右

$\therefore \begin{cases} x=3 \\ y=-5 \end{cases}$ 正确

注意：如果常数項 c_1, c_2 在方程(1)的左边，則解 x，y 时，分子行列式前必須加"−"号，或把常数項放到方程的右边去再解，同时也必須把含有 x 的項放在第一項，y 項放在第二項。

例 2 $\begin{cases} y+3x-2=0 \\ 4x-5y-8=0 \end{cases}$

整理 $\begin{cases} 3x+y=2 & (1) \qquad \therefore \quad a_1=3, \quad b_1=1, \quad c_1=2 \\ 4x-5y=8 & (2) \qquad\qquad a_2=4, \quad b_2=-5, \quad c_2=8 \end{cases}$

$$\therefore \quad x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}}=\frac{-10-8}{-15-4}=\frac{-18}{-19}=\frac{18}{19};$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}}=\frac{24-8}{-19}=-\frac{16}{19}。$$

討論方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ (1)的解:

$$\because \quad x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}。$$

分三种情况来討論:

i)当 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ 时,方程組(1)有唯一的解如例1。

ii)当 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$,而 $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ 或 $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ 中有一个不等于0,则无解。

iii)当 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0, \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=0, \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=0$ 时就是

$$a_1b_2-a_2b_1=0, \quad c_1b_2-c_2b_1=0, \quad a_1c_2-a_2c_1=0,$$

$$\therefore \quad \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}, \quad \frac{c_1}{c_2}=\frac{b_1}{b_2}, \quad \frac{a_1}{a_2}=\frac{c_1}{c_2},$$

即 $$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}。$$

实际上两个方程的各項系数(連常数項在内)都成比例;所以这时方程組(1)变为一个方程了。

因为 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\gamma\neq 0$ (假設),

则 $a_1=\gamma a_2, \ b_1=\gamma b_2, \ c_1=\gamma c_2$;

代入(1)的第一式得

$$\gamma a_2x+\gamma b_2y=\gamma c_2$$

$\because \gamma\neq 0$,所以各項除以 γ 得

$a_2x+b_2y=c_2$ 即第二式。

$\therefore$ 当 iii)成立时,方程組(1)变成一个方程了。根据初等代数的知識,一个方程含有两个未知数时,它有无穷多的解。

例1 解 $\begin{cases} 2x-y-1=0 \\ 3x+y \quad =9 \end{cases}$

整理 $\begin{cases}2x-y=1 & a_1=2,\ b_1=-1,\ c_1=1;\\ 3x+y=9 & a_2=3,\ b_2=\ \ 1,\ c_2=9。\end{cases}$

$\because \begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=5\neq 0$ 所以这組方程有唯一的解:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1\\ 9 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}}=\frac{10}{5}=2 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 9\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}}=\frac{15}{5}=3$$

例 2 解 $\begin{cases}3x-2y=5 & a_1=3,\ b_1=-2,\ c_1=5;\\ 6x-4y=7 & a_2=6,\ b_2=-4,\ c_2=7。\end{cases}$

$\because \begin{vmatrix}3 & -2\\ 6 & -4\end{vmatrix}=0$ 而 $\begin{vmatrix}5 & -2\\ 7 & -4\end{vmatrix}=-20+14=-6\neq 0$

由 ii) 知无解。

例 3 $\begin{cases}2x-3y=1 & a_1=2,\ b_1=-3,\ c_1=1;\\ 4x-6y=2 & a_2=4,\ b_2=-6,\ c_2=2。\end{cases}$

解: $\because \dfrac{2}{4}=\dfrac{-3}{-6}=\dfrac{1}{2}$, $\therefore$ 把第二式除以 2 就得第一式。

所以这組方程可以用一个式子 $2x-3y=1$ 来表示。所以有无穷多解。

§1.2 **三阶行列式** 用二阶行列式来解二元綫性方程組的方法, 可以推广到用三阶行列式来解三元綫性方程組, 先引进三阶行列式的概念:

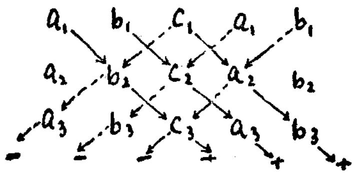
$a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ c_1,\ c_2,\ c_3,$ 九个元素所做成的三阶行列式用記号 $\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$ 表示, 它的定义就是:

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1。$$

关于三阶行列式的名称与二阶行列式相同, 有三行、三列。a_1, b_2, c_3, 組成行列式的主对角綫; c_1, b_2, a_3 組成付对角綫。

根据上面的定义, 我們得三阶行列式的計算法則(称沙洛氏法):

i）首先把行列式的三列元素写下，再添写第一，第二列元素成下面的表：



ii）主对角綫上的三元素相乘积 $a_1b_2c_3$ 和平行主对角綫的每三元素相乘积 $b_1c_2a_3$ 及 $c_1a_2b_3$ 这三項都取“＋”号。

iii）付对角綫上的三元素相乘积 $c_1b_2a_3$，和平行于付对角綫的每三元素相乘积 $a_1c_2b_3$ 及 $b_1a_2c_3$ 这三項都取“－”号。

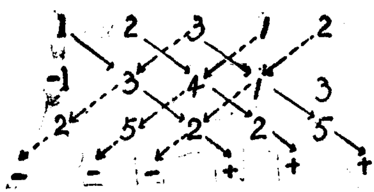
iv）最后作 *ii*）及 *iii*）中各項的代数和就是

$$a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1。$$

例 計算下面的行列式：

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

i）排表



ii）$1\cdot3\cdot2+2\cdot4\cdot2+3(-1)\cdot5=6+16-15;$

iii）$-2\cdot3\cdot3-1\cdot4\cdot5-2(-1)2=-18-20+4;$

iv）$6+16-15-18-20+4=-27$。

$$\therefore\quad \Delta=-27。$$

§1.3 三阶行列式的几个主要性質

i）行列式里，如果把它的行与列对調，行列式的数值不变。

例如 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

因为，左边$=a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-c_1b_2a_3-a_1c_2b_3-b_1a_2c_3$，

右边$=a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-c_1b_2a_3-a_1c_2b_3-b_1a_2c_3$，

$\therefore$ 左边=右边。

ii）行列式里，如果把它的任何兩行（或兩列）对調，行列式数值的符号要改变。

例如 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$

因为，左边$=a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-c_1b_2a_3-a_1c_2b_3-b_1a_2c_3$;

右边$=-(b_1a_2c_3+a_1c_2b_3+c_1b_2a_3-c_1a_2b_3-b_1c_2a_3-a_1b_2c_3)$

$=-b_1a_2c_3-a_1c_2b_3-c_1b_2a_3+c_1a_2b_3+b_1c_2a_3+a_1b_2c_3$;

$\therefore$ 左边=右边。

iii）行列式里，如果它的某一行（或一列）的所有元素全为零，那末，行列式的值等于零。

因为展开所得的六項里，每一項都有一个因子为零的，所以代数和为零。

iv）行列式里，如果它的某一行（或一列）的元素有公因子时，这个公因子可以提到行列式的外面。

例如 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 6 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

因为行列式里第二列的元素 2、4、2 都有 2，所以把 2 提出来，展开計算显然兩边相等。

或者 $\begin{vmatrix} a_1 & mb_1 & c_1 \\ a_2 & mb_2 & c_2 \\ a_3 & mb_3 & c_3 \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

v）行列式里，如果有兩行（或兩列）的元素完全相同，那末它的数值必然等于零。

証: 令
$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

把第一列与第二列对調，据 ii)：$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$\therefore$ $\Delta=-\Delta$。移項后，$2\Delta=0$，$\therefore$ $\Delta=0$，

就是 $\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$。

vi) 行列式里，如果有兩行(或兩列)的对应元素成比例，那末这行列式的数值为零。

例如 $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ 中第一列与第二列的元素成比例，

$$\frac{6}{3}=\frac{4}{2}=\frac{-2}{-1}\ (=2);$$

$$\therefore\quad \begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=2\cdot 0=0。$$

(由 v 知兩列元素完全相同时行列式为 0 。)

或者 $\begin{vmatrix} a_1 & ka_1 & c_1 \\ a_2 & ka_2 & c_2 \\ a_3 & ka_3 & c_3 \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$。

§1.4 **三阶行列式的余子式及代数余子式** 为了便于說明行列式的其他性質，下面先引入兩个新概念。

令
$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

在这行列式 Δ 里，任意取一个元素，例如取 b_1，把 b_1 所在的行与列，都划去，余下四个元素組成的二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$，叫做 b_1 的余子式。

定义：在行列式里，任意取一个元素，把这个元素所在的行与

列划去，留下的二阶行列式，就叫做原行列式关于这元素的余子式。

再設因为 b_1 是在第一行，第二列，所以行数为 1，列数为 2，$\because$ $1+2=3$ 是單数，所以在 b_1 的余子式前面放"－"号，那末$-\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$就叫做 b_1 的代数余子式。倘若取 a_3，則余子式为$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$；因为 a_3 在第一列第三行，$\because$ $3+1=4$ 是双数，所以在 a_3 的余子式前面放"＋"号(或者略去)，那末$+\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$就叫做 a_3 的代数余子式。

总之，行列式里，設某一元素所在的行数为 i，列数为 j，倘若 $i+j$ 等于双(偶)数(如 2, 4, 6, ……)，那末在这元素的余子式前放一个"＋"号，倘若 $i+j$ 等于單(奇)数(如1, 3, 5, ……)，那末在这元素的余子式前放一个"－"号，帶有符号的余子式，叫做这元素的代数余子式。

例如 c_2 的余子式：$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ c_2 的代数余子式：$-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

利用代数余子式，再建立行列式的下面几个性質：

vii) 行列式中，任何一行(或一列)的元素与它們各自的代数余子式的乘积的和等于行列式的値。

證：$\because$ $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1$

$$=a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)$$

$$=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}=a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3\text{。}$$

这里 A_i 代表 a_i 的代数余子式，以 B_i, C_i 各代表 b_i, c_i 的代数余子式。$A_1=\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$A_2=-\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$A_3=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$。

这个性質对任何一行或任何一列都同样正确，因此如果对第二行的元素展开就得

$$\Delta=b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3\text{。}$$

如果对第一列的元素展开就得

$$\Delta=a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1\text{。}$$

所以我們可以依照各行，各列展开，总共可得下面六个等式

$$\Delta=a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3,\quad \Delta=a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1,$$
$$\Delta=b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3,\quad \Delta=a_2A_2+b_2B_2+c_2C_2,$$
$$\Delta=c_1C_1+c_2C_2+c_3C_3,\quad \Delta=a_3A_3+b_3B_3+c_3C_3\text{。}$$

viii）行列式里某一行元素与其他一行元素的代数余子式的乘积的和等于零。

例如:

$$b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3=b_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}-b_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}+b_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1\\ b_2 & b_2 & c_2\\ b_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=0\ (\text{由 v}),$$

因此可得下面十二个等式:

$$a_1B_1+a_2B_2+a_3B_3=0;\quad a_1A_2+b_1B_2+c_1C_2=0;$$
$$a_1C_1+a_2C_2+a_3C_3=0;\quad a_1A_3+b_1B_3+c_1C_3=0;$$
$$b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3=0;\quad a_2A_1+b_2B_1+c_2C_1=0;$$
$$b_1C_1+b_2C_2+b_3C_3=0;\quad a_2A_3+b_2B_3+c_2C_3=0;$$
$$c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3=0;\quad a_3A_1+b_3B_1+c_3C_1=0;$$
$$c_1B_1+c_2B_2+c_3B_3=0;\quad a_3A_2+b_3B_2+c_3C_2=0\text{。}$$

ix）行列式里，如果某一行（或列）的元素为兩項的和，那末原行列式可以写成兩个行列式的和。

例如:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1'+a_1'' & b_1 & c_1\\ a_2'+a_2'' & b_2 & c_2\\ a_3'+a_3'' & b_3 & c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1' & b_1 & c_1\\ a_2' & b_2 & c_2\\ a_3' & b_3 & c_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1'' & b_1 & c_1\\ a_2'' & b_2 & c_2\\ a_3'' & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

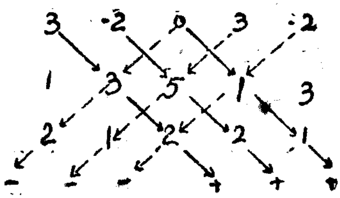
証: 令 A_1, A_2, A_3 代表行列式 Δ 内第一列元素的代数余子式，那末由 vii）得

$$\Delta=(a_1'+a_1'')A_1+(a_2'+a_2'')A_2+(a_3'+a_3'')A_3$$
$$=(a_1'A_1+a_2'A_2+a_3'A_3)+(a_1''A_1+a_2''A_2+a_3''A_3)$$

$$=\begin{vmatrix} a_1' & b_1 & c_1 \\ a_2' & b_2 & c_2 \\ a_3' & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1'' & b_1 & c_1 \\ a_2'' & b_2 & c_2 \\ a_3'' & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

例 1. 求行列式 $\varDelta=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 元值

第一种方法



$\varDelta=18-20+0-0-15+4=-13$。

第二种方法

$$\varDelta=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+\left(-\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right)+2\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$=3\times1-(-4)+2(-10)=-13$。

例 2. 証明 $\begin{vmatrix} a_1+lb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+lb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+lb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

証: $\begin{vmatrix} a_1+lb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+lb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+lb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} lb_1 & b_1 & c_1 \\ lb_2 & b_2 & c_2 \\ lb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+l\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+0=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

例 3. 解 $\begin{vmatrix} x & x+2 & 3x-10 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 7 & 5 \end{vmatrix}=0$。