教育部职业教育与成人教育司推荐教材
中等职业学校文化基础课程教学用书

数学

（理工科专业分册）

高广志 主编

SHUXUE

语文出版社

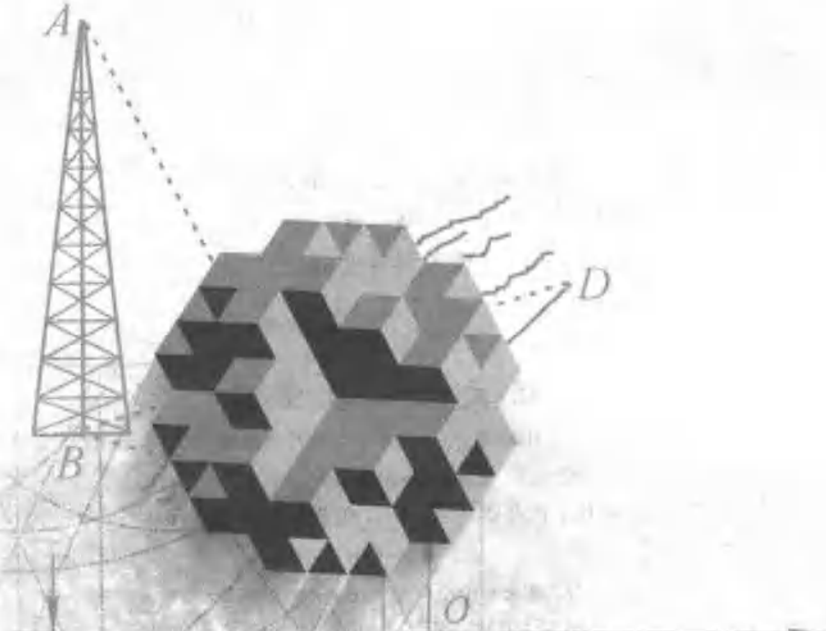
教育部职业教育与成人教育司推荐教材
中等职业学校文化基础课程教学用书

数学

（理工科专业分册）

高广志 主编

SHUXUE



语文出版社

中等职业学校文化基础课程教学用书
数 学
(理工科专业分册)
高广志 主编
*
语文出版社出版
100010 北京朝阳门南小街51号
E-mail:ywp@ywcbs.com
新华书店经销 世界知识印刷厂印刷
*
787毫米×1092毫米 16开本 17.25印张
2006年3月第1版 2006年7月第2次印刷
定价：17.30元
ISBN 7-80184-654-0/G·600

前　言

为了贯彻《国务院关于大力推进职业教育改革与发展的决定》精神，体现“以服务为宗旨，以就业为导向”的职业教育办学指导思想，语文出版社邀请了职教文化基础课课程专家，教研实践经验丰富的职教教研员及执教一线的骨干教师，组成了本套教材编写队伍，编写了这套中等职业学校文化基础课教材《数学》。

教材的编写是以教育部职业教育与成人教育司的有关精神及教育部联合七部委共同颁布的关于实施“职业院校制造业和现代服务业技能型紧缺人才培养培训工程”的通知的有关文件为指导思想，针对目前职业教育对文化基础课改革的新的要求，本套教材编写遵循以下原则：

1. 基础性原则　以实用与适用为准绳，选择基础性、经典性内容。教材编写与职教培养目标相符，适合数学基础薄弱，人学水平较低的学生。

2. 实用性原则　符合职校生思维特点，对定理、公式不强调推导、证明，突出应用，使学生学习后会用、会算即可。

3. 功能性原则　与岗位接轨，以为职业目标和专业课服务为原则，内容编排不追求全面，而是针对不同专业配备不同的学习内容。

4. 导学性原则　时刻关注教师的方法性教学，做到既方便教师教，又指导学生学习。

5. 分层性原则　与学生接轨，给不同学习水平、不同专业的学生不同的发展空间。在习题设置上做到与教学内容的匹配，习题难度分出不同层次。

本套教材的特点有：

1. 立足基础，服务于专业的模块化设置

本教材立足于职业教育所需培养的不同岗位群，围绕各类岗位的不同需求进行设计。教材编写采用“基本教材”加“专业模块”的形式。

基本教材包含的教学内容满足各类专业的基本需求，通过基本教材的学习使学生获得中等职业教育数学课最基本的数学知识与技能，为学生进一步学习专业知识提供基本保证，这些内容也提供了使学生作为一个公民应具备的基本数学素养。

专业模块适用于不同岗位群的不同需求，根据专业大类分为：文科、财经及服务类和理工科类，既满足不同专业需要又可满足学生个性化学习的需求。

2. 更新编排体系，使学生对数学的学习实现螺旋上升

与以往教材相比，本套教材的编排体系、内容选择均做了比较大的调整。基于“以服务为宗旨，以就业为导向”的指导思想，我们删减了很多“繁、难、偏、旧”的教学内容以及与专业学习无关的教学内容，使教学内容突出基础性、经典性与专业性的结合，弱化定理证明，强化结论性与应用性。

(1) 增加复习内容

鉴于目前学生入学水平参差不齐的情况，教材在各章教学内容中针对学习需要，将初中阶段的重要数学知识与基本技能进行必要的复习提示，形式上以“返灰”的图框与正文加以区别。此外教材附录中将初中数学知识整理成表，供教师指导学生复习使用。

(2) 教材在内容的选择和编排上进行了较大的调整

教材弱化了逻辑用语，指、对数的计算与证明，以及抽象的函数等，突出了实际应用能力的培养和数学模型的建立。

教材拆分了三角和解析几何的内容。首先将三角拆分为两部分，第一部分为任意角三角函数，放在基本教材中；第二部分为三角函数的性质与图像（文科、财经及服务类）或三角函数的计算与应用（理工科类），分别放在专业模块中。在学生认识了基本三角函数知识的基础上，结合专业特点或了解图形与性质或注重计算与应用。其次将解析几何拆分为直线与圆（基本教材）和二次曲线（专业模块）两部分。根据专业不同，教师可选择所需的教学内容，减轻学生的负担，将“以就业为导向”落实到实处。

此外，教材根据专业需求，对部分专业精减了立体几何教学内容。

(3) 增加计算器教学

计算器的工具性近些年来日益突出，随着计算器功能的不断增强，它已成为学生学习工作不可或缺的得力助手。因此教材对教学内容中涉及到的有关计算器的计算内容进行了比较详细的介绍，同时在附录中专门介绍了计算器的各种常用功能和基本运算方法。

(4) 练习、习题设置的层次性与功能性

本套教材的编写不是一味地精简教学内容，而是希望学生不但要学得精，还要掌握得牢。因此教材在练习、习题的设置上分为三个层次。其中正文设置的“练一练”是教师在教学中指导学生完成的练习；随堂练习则是教师在一课时教学内容中让学生独立完成的练习；每节后的习题教师可处理为学生的课后作业；每章后的复习题可作为学生的全章的复习使用。这样设置的目的是希望学生学有所得，将知识点落到实处，体现数学学科的基础性。

3. 突出学法教育、体现人文关怀

教材注重让学生参与实现教学目标的过程，突出对学生学习方法的培养，寓教学方法于教材之中。教材十分重视让学生经历认识过程和探索过程，语言叙述通俗易懂，符合学生的年龄特征，同时精选了很多励志的阅读内容。

(1) 在概念、定理、公式、例题后，安排“想一想”、“议一议”等内容，提出具有启发性的问题，让学生进行思考，讨论。

(2) 让学生根据要求自己编制题目的内容可以把课堂教学变成师生共同活动的过程。

(3) 教材中的例题中除了给出解答，还在解法前安排分析，解法后安排说明或小结，为学生自学创造条件。

(4) 部分章后的“归纳与总结”，在本章知识要点部分有些是采用填空式，目的是提高学生在复习过程中的主动参与性；章末的“阅读空间”更是希望结合学习内容，提高学生数学文化修养，激励他们主动学习的热情。

4. 注重现实性与科学性

在教材的编写中，我们以科学的教育理论为依据，紧密结合职业教育的实际需求，

走创新之路，努力编出职教特色，编出自己的特色。

针对职业学校文化课课时安排的特点，本套教材的整体教学任务控制在一学年完成。其中基本教材使用时间为第一学期，课时约需 64 课时；专业模块使用时间为第二学期，其中文科、财经及服务类专业模块课时约需 64 课时，理工科专业模块约需 96 课时。

参加本套教材编写的有北京市现代职业学校张秋立，浙江省温州市教育教学研究院陈继泽，黑龙江省教育学院高广志，浙江省温州职业中专学校徐承潮、黄伟伟，浙江省乐清市教育局教研室沈宗玖，浙江省乐清职业中专学校曹学清等。

本书在编写过程中得到了青岛、广西等省市、自治区的职教教研部门和部分中等职业学校的大力支持，在此向他们表示诚挚的谢意。

另外，北京理工大学的葛渭高教授，首都师范大学的张景斌教授对本书进行了认真的审阅，提出了许多宝贵的意见，在此表示衷心的感谢。

本册教材主编是高广志，责任编辑是张程。

由于编写时间仓促和编写水平有限，对教材中不妥之处，欢迎从事职业教育的教师、专家和读者批评指正。

语文出版社

2006 年 1 月

目　录

第七章
三角函数的计算与应用

回顾与思考

我们在第五章任意角的三角函数中，学习了正弦函数、余弦函数及正切函数的定义，学习了同角关系公式及简化公式，解决了同一个角的三角函数之间的计算问题，那么对于任意两个角 α 与 β，$\alpha+\beta$ 的三角函数如何计算？$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$ 成立吗？这一章将学习这种类型的三角计算问题．同时还将学习正弦函数、余弦函数及正切函数的图像与性质，学习解斜三角形的方法，以便能应用三角函数的知识解决一些实际问题．

§7.1　和角公式

一、两角和与差的正弦

我们首先回答对于任意两个角 α 与 β，$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$ 能否成立的问题. 为了得到问题的结论，设 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，$\beta=\frac{\pi}{3}$，则 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$，而 $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{3}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$，显然 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\neq\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{3}$. 因此，我们说，一般地，两个角和的正弦不等于这两个角正弦的和.

想一想

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha-\sin\beta$ 成立吗?

显然，对于任意两个角 α 与 β，这也是不能成立的. 那么，任意两个角和与差的正弦等于什么呢?

和角正弦公式

$\boldsymbol{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$　简记为 $S_{\alpha+\beta}$.

差角正弦公式

$\boldsymbol{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}$　简记为 $S_{\alpha-\beta}$.

为了正确应用公式，首先需要准确记忆公式，掌握公式的结构特征，请同学们从下述三个方面归纳这两个公式的结构特征：

(1) 函数名称及顺序；

(2) 角在公式中的顺序；

(3) 运算符号的前后关系.

例 1　不用计算器，求 $\sin75^\circ$ 与 $\sin15^\circ$ 的值.

解：
$$\begin{aligned}\sin75^\circ&=\sin(45^\circ+30^\circ)\\&=\sin45^\circ\cos30^\circ+\cos45^\circ\sin30^\circ\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\\&=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin15^\circ&=\sin(45^\circ-30^\circ)\\&=\sin45^\circ\cos30^\circ-\cos45^\circ\sin30^\circ\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

例 2 已知 $\sin\alpha=\frac{3}{5},\alpha\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$,求 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$的值.

解:由 $\sin\alpha=\frac{3}{5},\alpha\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$,得 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$.

于是
$$\begin{aligned}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)&=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{6}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{6}\\&=\frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{1}{2}\\&=\frac{3\sqrt{3}-4}{10}.\end{aligned}$$

例 3 不用计算器,求下式的值:

$\sin70^\circ\cos40^\circ-\cos70^\circ\sin40^\circ$.

解:原式$=\sin(70^\circ-40^\circ)=\sin30^\circ=\frac{1}{2}$.

随堂练习 1

1. 不用计算器,求下列各式的值:

(1) $\sin105^\circ$;

(2) $\sin50^\circ\cos10^\circ+\cos50^\circ\sin10^\circ$.

2. 已知 $\cos\alpha=-\frac{3}{5},\alpha\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$,求 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$的值.

二、两角和与差的余弦

对于任意两个角和与差的余弦,我们有

和角余弦公式

$\boldsymbol{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$ 简记为 $C_{\alpha+\beta}$.

差角余弦公式

$\boldsymbol{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$ 简记为 $C_{\alpha-\beta}$.

想一想 1

和正弦公式对照一下,它们的结构有哪些相同点与不同点?

例 4 已知 $\cos\alpha=-\frac{12}{13},\alpha\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$,求 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$的值.

解:由 $\cos\alpha=-\frac{12}{13},\alpha\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$,得 $\sin\alpha=-\frac{5}{13}$.

于是 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{3}+\sin\alpha\sin\frac{\pi}{3}$

$$=\left(-\frac{12}{13}\right)\cdot\frac{1}{2}+\left(-\frac{5}{13}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=-\frac{12+5\sqrt{3}}{26}.$$

例 5 将下列各式化成一个余弦函数的形式：

(1) $\cos x\cos\frac{\pi}{6}-\sin x\sin\frac{\pi}{6}$；

(2) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x$；

(3) $\sqrt{3}\cos x-\sin x$.

解：(1) 原式 $=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$；

(2) 原式 $=\cos\frac{\pi}{6}\cos x-\sin\frac{\pi}{6}\sin x$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right);$$

(3) 原式 $=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x-\sin\frac{\pi}{6}\sin x\right)$$

$$=2\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right).$$

练一练

请你将上述各式化成一个正弦函数的形式.

随堂练习

1. 不用计算器，求下列各式的值：

(1) $\cos 75°$；

(2) $\cos 50°\cos 20°+\sin 50°\sin 20°$.

2. 已知 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$90°<\alpha<180°$，求 $\cos(\alpha+60°)$ 的值.

3. 将下列各式化成一个余弦函数的形式：

(1) $\cos\frac{\pi}{4}\cos x+\sin\frac{\pi}{4}\sin x$；

(2) $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x$；

(3) $\cos x+\sin x$.

三、两角和与差的正切

和角正切公式

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\qquad \text{简记为 } T_{\alpha+\beta}.$$

差角正切公式

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\qquad \text{简记为 } T_{\alpha-\beta}.$$

应该注意，这两个公式中的 α 与 β 是必须使 α，β，$\alpha+\beta$，$\alpha-\beta$ 的正切都有意义的角，即 α，β，$\alpha\pm\beta$ 都不能取 $\frac{\pi}{2}+k\pi$，($k\in\mathbf{Z}$).

例 6 不用计算器，求 $\tan15°$ 的值.

解：
$$\begin{aligned}\tan15°&=\tan(60°-45°)\\&=\frac{\tan60°-\tan45°}{1+\tan60°\tan45°}\\&=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}\\&=\frac{(\sqrt{3}-1)(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}\\&=\frac{-4+2\sqrt{3}}{-2}\\&=\frac{-2(2-\sqrt{3})}{-2}\\&=2-\sqrt{3}.\end{aligned}$$

例 7 计算：$\frac{1-\tan15°}{1+\tan15°}$.

解：
$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{\tan45°-\tan15°}{1+\tan45°\tan15°}\\&=\tan(45°-15°)\\&=\tan30°\\&=\frac{\sqrt{3}}{3}.\end{aligned}$$

随堂练习 3

1. 不用计算器，求下列各式的值：
   (1) $\tan 75°$；　　(2) $\tan 105°$.
2. 已知 $\tan\alpha=5$，$\tan\beta=2$，求 $\tan(\alpha-\beta)$ 的值.
3. 不用计算器，求下列各式的值：
   (1) $\dfrac{1+\tan 15°}{1-\tan 15°}$；　　(2) $\dfrac{\sqrt{3}-\tan 15°}{1+\sqrt{3}\tan 15°}$.

习题 7.1

1. 化简：
   (1) $\sin(45°+\alpha)+\sin(45°-\alpha)$；
   (2) $\sin(30°+\alpha)+\sin(30°-\alpha)$；
   (3) $\sin 5°\cos 55°+\cos 5°\sin 55°$；
   (4) $\sin 40°\cos 10°-\cos 40°\sin 10°$.
2. 不用计算器，求下列各式的值：
   (1) $\cos 105°$；　　(2) $\cos 15°$；
   (3) $\sin\dfrac{5\pi}{12}$；　　(4) $\tan\dfrac{\pi}{12}$.
3. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，求 $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的值.
4. 已知 $\cos\alpha=-\dfrac{12}{13}$，$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，求 $\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的值.
5. 已知 $\tan\alpha=2$，求 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的值.
6. 化简：
   (1) $\cos(75°+\alpha)\cos(15°+\alpha)+\sin(75°+\alpha)\sin(15°+\alpha)$；
   (2) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$.
7. 不用计算器，求下列各式的值：
   (1) $\dfrac{\tan 23°+\tan 22°}{1-\tan 23°\tan 22°}$；　　(2) $\dfrac{\tan 75°-1}{\tan 75°+1}$.

§7.2 倍角公式

如果 α 是任意角，等式 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha$ 成立吗？我们设 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$，发现 $\sin\left(2\times\dfrac{\pi}{6}\right)=$

$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，而 $2\sin\frac{\pi}{6}=2\times\frac{1}{2}=1$．可见，一般地，$\sin2\alpha\neq2\sin\alpha$．同样地，当 α 为任意角时，$\cos2\alpha\neq2\cos\alpha$，$\tan2\alpha\neq2\tan\alpha$．

下面我们来学习倍角公式．

一、二倍角的正弦

我们在和角正弦公式 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ 中，设 $\beta=\alpha$，就可以得到：

二倍角正弦公式

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha.$$

例 1 已知 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，求 $\sin2\alpha$ 的值．

解：由 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，得 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$．

于是 $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$$=2\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{24}{25}.$$

例 2 不用计算器，求 $\sin15^\circ\cos15^\circ$ 的值．

解：原式 $=\frac{1}{2}\times2\sin15^\circ\cos15^\circ$

$$=\frac{1}{2}\sin(2\times15^\circ)$$

$$=\frac{1}{2}\sin30^\circ=\frac{1}{4}.$$

例 3 化简：$\sin\alpha\cos\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha$．

解：原式 $=\frac{1}{2}(2\sin\alpha\cos\alpha)\cos2\alpha\cos4\alpha$

$$=\frac{1}{2}\sin2\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha$$

$$=\frac{1}{4}(2\sin2\alpha\cos2\alpha)\cos4\alpha$$

$$=\frac{1}{4}\sin4\alpha\cos4\alpha$$

$$=\frac{1}{8}(2\sin4\alpha\cos4\alpha)$$

$$=\frac{1}{8}\sin8\alpha.$$

通过这道例题，不难看出，二倍角公式表示了一个角的三角函数与它的二倍的角的三角函数间的关系，它不仅适用于 2α 与 α，其他如 4α 与 2α，α 与 $\frac{\alpha}{2}$，$\alpha+\beta$ 与 $\frac{\alpha+\beta}{2}$ 等也都适用．即二倍角正弦公式，在应用时，也可写做下列形式：

$\sin4\alpha=2\sin2\alpha\cos2\alpha$；

$\sin\alpha=2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$；

$\sin(\alpha+\beta)=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$，等等.

随堂练习 1

1. 已知 $\cos\alpha=\dfrac{5}{13}$，$\alpha\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，求 $\sin2\alpha$ 的值.

2. 不用计算器，求 $\sin\dfrac{\pi}{8}\cos\dfrac{\pi}{8}$ 的值.

3. 化简：$\cos2\alpha\cos\alpha\cos\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

二、二倍角的余弦

我们用同样的方法，在和角余弦公式 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ 中，设 $\beta=\alpha$，就可以得到：

二倍角余弦公式

$$\boldsymbol{\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.}$$

如果利用同角关系公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，将 $\sin^2\alpha$ 换成 $1-\cos^2\alpha$，或将 $\cos^2\alpha$ 换成 $1-\sin^2\alpha$，那么二倍角余弦公式还有下面两种形式：

$$\boldsymbol{\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1;}$$

$$\boldsymbol{\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha.}$$

例 4 根据下列条件，分别求出 $\cos2\alpha$ 的值：

(1) $\sin\alpha=\dfrac{12}{13}$；

(2) $\cos\alpha=-\dfrac{7}{25}$；

(3) $\tan\alpha=\dfrac{3}{4}$，$\left(\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

解：(1) ∵ $\sin\alpha=\dfrac{12}{13}$，

∴ $\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\times\left(\dfrac{12}{13}\right)^2=-\dfrac{119}{169}$；

(2) ∵ $\cos\alpha=-\dfrac{7}{25}$，

∴ $\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\times\left(-\dfrac{7}{25}\right)^2-1=-\dfrac{527}{625}$；

(3) ∵ $\tan\alpha=\frac{3}{4}$,$\left(\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}\right)$,

∴ $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$,$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$,

∴ $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\left(-\frac{4}{5}\right)^2-\left(-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{7}{25}$.

从这个例题可以看出，在求 $\cos2\alpha$ 时，需根据不同的条件来选择二倍角的余弦公式.

例 5 已知 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，求 $\cos^2\frac{\alpha}{2}$ 的值.

解： ∵ $\cos\alpha=\frac{3}{5}$,

由公式 $\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1$,

得 $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$,

于是 $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\frac{3}{5}}{2}=\frac{4}{5}$.

随堂练习 2

1. 已知 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$,$\alpha\in(90°,180°)$,求 $\cos2\alpha$ 及 $\sin2\alpha$ 的值.
2. 不用计算器，求 $\sin^2 22.5°$ 的值.
3. 化简：$(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)$.

三、二倍角的正切

在和角正切公式 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$中，设 $\beta=\alpha$，就可以得到

二倍角正切公式

$$\boldsymbol{\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}}\text{(其中 }\alpha,2\alpha\text{ 都不等于 }k\pi+\frac{\pi}{2}\text{,即 }\alpha\neq\frac{1}{2}k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\text{)}.$$

例 6 已知 $\tan\alpha=2$，求 $\tan2\alpha$ 的值.

解： ∵ $\tan\alpha=2$,

∴ $\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times2}{1-2^2}=-\frac{4}{3}$.

例 7 已知 $\tan2\alpha=\frac{3}{4}$，求 $\tan\alpha$ 的值.

解： ∵ $\tan2\alpha=\frac{3}{4}$,