电大·成人高教自考辅导丛书⑤

經济数学解题指导

（线性代数与线性规划部分）

徐志明　编

四川省社会科学院出版社

电大·成人高教自考辅导丛书之五

经济数学解题指导

（线性代数与线性规划部分）

徐志明　编

四川省社会科学院出版社

一九八八·四·成都

责任编辑：张理智
封面、版式设计：明 鉴

经济数学解题指导（线性代数与线性规划部分）
JINGJI SHUXUE JIE TI ZHI DAO

徐志明 编　　四川省社会科学院出版社出版发行
四川省新华书店经销　　成都百花潭中学印刷厂印刷

开本：787×1092毫米　1/16　印张：10　字数：234千
1988年4月第1版成都第1次印刷　　印数1—10,000册

ISBN7—80524—045—0/F·13　　定价：2.40元

前　　言

本书主要是为配合电大及成人高教自考学员日常学习经济应用数学（线性代数与线性规划）及考前复习而编写的。本书对于职大、夜大、函大经济类各专业的学员及自学者学好该门课程、掌握解题技巧也有一定的帮助，还可供教师教学时参考。

本书编写时参照了中央电大经济系基础理论教研室所编《经济应用数学（二）线性代数与线性规划》及该课程的教学大纲．以及“经济应用数学”成人高教自学考试大纲。在忠实于大纲和教材的基础上，对教材内容进行综合、归纳，编写了基本内容提要。力求简明扼要，易懂易记，便于读者掌握本课程基础知识。

为适应目前数学考试中标准化命题的趋势，本书在选编计算题、证明题的同时，也注意选编了一定数量的填空题、判断题、选择题。书中习题具有一定的典型性和代表性，习题按题型分类编目。所有习题，均给出了较详细的解答，着重分析解题思路，突出运算技巧，一些题目后还进行了说明，以便读者在使用本书后，能灵活掌握本课程的基础知识和解题的基本技巧。

书中带*号的内容，是编者认为比较重要，但又超出大纲要求的，供读者参考。书中带Δ号的习题，具有一定的难度，读者可根据自己的实际情况决定取舍。

由于编者水平所限，兼之时间仓促，所选素材难免挂一漏万，不当和错误之处，恳请读者不吝赐教。

编　者

1988年2月

目　　录

一、基本内容提要

第一篇　线性代数

（一）　行列式

一、行列式的基本概念

n阶行列式
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1, j_2 \cdots, j_n)} (-1)^{[j_1, j_2, \cdots, j_n]} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

这里j_1，j_2，…，j_n表示数字1，2，…，n的一个排列．$\sum\limits_{(j_1, j_2, \cdots, j_n)}$表示对数字1，2，…，$n$的所有排列$j_1$，$j_2$，…$j_n$求和．

二、行列式的性质：

1．某一行（列）的公因子，可以提到行列式符号的外面．

2．若第i行的每一个元素都可以写成两项之和：$a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}$，$j=1$，2，…，n，则此行列式等于两个行列式的和，这两个行列式的第i行的元素分别是b_{i1}，b_{i2}，…，b_{in}和c_{i1}，c_{i2}，…，c_{in}，其余各行与原来行列式相同．

3．两行（列）互换，行列式的值只改变符号．

4．两行（列）相同，行列式的值为零．

推论：两行（列）成比例，行列式的值为零．

5．把某一行（列）的若干倍加到另一行（列）后，行列式的值不变．

6．行列式与它的转置行列式相等．

三、行列式（列）展开定理

定理．n阶行列式D等于它的任一行（列）中所有元素与它们所对应的代数余子式的乘积之和，即
$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$
或
$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

四、克莱姆法则

定理（克莱姆法则），含有n元n个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n, \end{cases}$$

如果它的系数行列式$D\neq 0$，那么这个方程组有解，并且解是唯一的，这个解是

$$x_1=\frac{D_1}{D},\qquad x_2=\frac{D_2}{D},\ \cdots,\qquad x_n=\frac{D_n}{D}.$$

其中D_j（$j=1,2,\cdots,n$）是把D中的第j列的元素a_{1j}，a_{2j}，$\cdots$，a_{nj}换成常数项b_1，b_2，$\cdots$，b_n所得的行列式。

定理　如果n元n个方程的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

有非零解，则它的系数行列式D等于0．

五、行列式的基本计算方法：

1．“降阶法”，利用性质把行列式某行（列）化成只剩一个非零元素，再利用展开定理对该行（列）展开，将行列式化为低阶的行列式；

2．化为上（下）三角形行列式，再利用

$$\begin{vmatrix} a_{11} & * & \cdots & * & * \\ 0 & a_{22} & \cdots & * & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ * & * & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ * & * & \cdots & * & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn},$$

3．利用性质，将一个行列式表示为若干个行列式之和；

4．利用公式：$\begin{vmatrix} A & 0 \\ * & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A||B|$

（二）矩　　阵

一、矩阵的基本概念

由$m\times n$个数a_{ij}排成的一个m行n列的矩形阵表 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

称为$m\times n$矩阵．a_{ij}称为这个矩阵的元素．

二、矩阵的运算

1．矩阵加法、减法：两个$m\times n$矩阵相加（减）就是对应元素相加（减）．

适合以下算律：（1）加法交换律　$A+B=B+A$（2）加法结合律$(A+B)+C=A+(B+C)$　　（3）$A-B=A+(-B)$

2．数乘矩阵，数k乘矩阵A就是以数k乘矩阵A的每一个元素．

适合以下算律：

（1）　分配律　$K_1(A\pm B)=K_1A\pm K_1B$　　$(k_1\pm k_2)B=k_1B\pm k_2B$

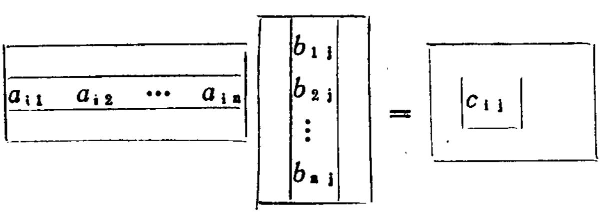
（2）　$K_1(K_2A)=K_2(K_1A)=(K_1K_2)A$．其中，$K_1$，$K_2$为数，$A=(a_{ij})mn$，$B=(b_{ij})mn$．

3 矩阵乘法：矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$　与$B=(b_{ij})_{n\times s}$的乘积AB指的是这样一个$m\times s$矩阵$C=(c_{ij})_{m\times s}$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\cdots+a_{in}\cdot b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{iK}b_{Kj}\qquad (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,s)$$

记作　$AB=C$．（注意：矩阵A的列数必须与矩阵B的行数相等，A与B才能相乘）．

乘法可以图式如下：



适合以下算律：（1）结合律　$(AB)C=A(BC)$　（2）分配律　$A(B+C)=AB+AC$　$(B+C)A=BA+CA$　（3）$K(AB)=(KA)B=A(KB)$　K为数

注意：矩阵的乘法不适合交换律；矩阵的乘法不适合消去律；两个非零矩阵相乘可能是零矩阵，

特殊情况：如果两个矩阵A、B满足　$AB=BA$

则称A，B是可交换的。

4．转置矩阵：把矩阵A的行与列互换，不改变它们的前后顺序所得到的矩阵称为A的转置矩阵，记作A^T。

适合以下算律：（1）$(A^T)^T=A$；　（2）$(A+B)^T=A^T+B^T$；

（3）$(AB)^T=B^TA^T$；　（4）$(KA)^T=KA^T$（其中K是数）

5．逆矩阵：若$AB=BA=E$，则称A为可逆矩阵，B为A的逆矩阵，记作A^{-1}．E是单位矩阵。

性质：$(A^{-1})^{-1}=A$；$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$；$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$.

定理：A可逆$\Longleftrightarrow |A|\neq 0$.

定理：设A，B为两个n阶方阵，有　$|AB|=|A||B|$

即两个方阵乘积的行列式等于它们的行列式的乘积。

逆阵求法之一，伴随矩阵法：

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*,\text{其中}A^*\text{为}A\text{的伴随矩阵，}A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

6．分块矩阵：以子矩阵为元素的矩阵称为分块矩阵。

分块矩阵的一些有用公式：

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_m \end{pmatrix}$$

其中A_1，A_2，…，A_m皆为方阵，则

$$|A|=|A_1||A_2|A_m|$$

$$A^k=\begin{pmatrix} A_1^K & & & \\ & A_2^K & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m^K \end{pmatrix}\quad A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m^{-1} \end{pmatrix}$$

当A_i可逆时，

三、常用的几种特殊矩阵

1．单位矩阵

$$E_n=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

性质：$EA=AE=A$，$E^T=E$，$E^{-1}=E$.

2．数量矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a & & & & \\ & a & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & a \end{bmatrix}$$ a是一个常数．性质：A^T，$A^{-1}=\begin{bmatrix} a^{-1} & & & \\ & a^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a^{-1} \end{bmatrix}$（当$a\neq 0$时）

仍是数量矩阵．

3．对角矩阵：

形如$A=\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$，则$A$为对角矩阵．

设A，B为同阶对角矩阵，K为数，有如下的性质：$A\pm B$，KA，AB 仍是对角矩阵，

$$A^T,\ A^{-1}=\begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & & & \\ & a_{22}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix}$$（$a_{ii}\neq 0$时）也是对角矩阵．且有$AB=BA$

4．三角矩阵：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \cdots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

前者为上三角矩阵，后者为下三角矩阵．

性质：两个同阶上（下）三角矩阵的和、差、积以及数乘上（下）三角矩阵仍然是同阶的上（下）三角矩阵．

5．对称矩阵、反对称矩阵．如果 $A^T=A$则A称为对称矩阵；如果 $A^T=-A$则A称为反对称矩阵．

性质：对称（反对称）矩阵的和、差以及数乘对称（反对称）矩阵仍是对称（反对称）矩阵．

注意：（1）若矩阵$A=(a_{ij})$是对称矩阵，那末所有元素均满足$a_{ij}=a_{ji}$；若矩阵$A=(a_{ij})$是反对称矩阵，那么所有元素均满足$a_{ij}=-a_{ji}$，主对角线上所有元素一定为零．

（2）两个对称（反对称）矩阵的乘积，不一定是对称（反对称）矩阵．

6．正交矩阵：如果方阵A满足$AA^T=A^TA=E$则称A为正交矩阵．

性质：A，B为n阶正交矩阵，则AB也是n阶正交矩阵

（三）线性方程组

一、线性相关和线性无关

1．概念：对向量组α_1，α_2，…，α_m，若有不全为零 的m个数K_1，K_2，…，K_m存在，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

成立，那么称向量组α_1，α_2，…，α_m线性相关．如只有全为零的数，即$k_1=k_2=\cdots=k_m=0$时，才使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$成立，则称向量组$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_m$线性无关。

2．重要结论

（1）α_1，α_2，…，α_n线性相关$\Longleftrightarrow$至少有一个向量可被其余向量线性表出．

（2）设$\alpha_1=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})$，$\alpha_2=(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n})$，…，$\alpha_m=(a_{m1},a_{m2},\cdots,a_{mn})$，则

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关（线性无关）

$\Longleftrightarrow x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0$有非零解（只有零解）．

$\Longleftrightarrow$下面齐次线性方程组有非零解（只有零解）．

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{m1}x_m=0\\a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{m2}x_m=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+a_{mn}x_m=0\end{cases}$$

（3）任意$n+1$个n维向量必线性相关．

二、向量组的秩和矩阵的秩．

1．概念：向量组α_1，α_2，…，α_m的极大无关组所含向量的个数称为向量组的秩．矩阵A的行（列）向量组的秩称为A的行（列）秩；矩阵$A=(a_{ij})$的所有不等于零的子式的最高阶数称为A的行列式秩．

2．性质：（1）初等变换不改变矩阵的秩．

（2）矩阵A的列秩$=A$的行秩$=A$的行列式秩$=$秩（A）．

由于性质（2），我们把矩阵的行秩、列秩和行列式秩统称矩阵的秩记作秩（A）．

（3）阶梯形矩阵的秩＝它的非零的行数．

3．求矩阵秩的方法：

方法一、求矩阵行列式秩——行列式法；

方法二、求矩阵行秩——初等行变换法．

三、线性方程组　AX=b

1．$AX=b$有解$\Longleftrightarrow$秩$A=$秩$(\bar{A})$

2．如果$AX=b$有解，那么

当秩（A）$=r=$未知量的个数n时，有唯一解；当秩（A）$=r<$未知量的个数n时，有无穷多解．

3．$AX=0$有非零解$\Longleftrightarrow$秩（A）$=r<$未知量的个数n．$\Longleftrightarrow |A|=0$（当$m=n$时）

$AX=0$只有零解$\Longleftrightarrow$秩（A）$=r=$未知量的个数n．$\Longleftrightarrow |A|\neq 0$（当$m=n$时）

4．$AX=0$的基础解系．

（1）概念：如果$AX=0$的有限个解向量η_1，η_2，…，η_s满足：i）η_1，η_2，…，η_s线性无关；ii）$AX=0$的任一解向量η都可被这s个解向量线性表出．则η_1，η_2，…，η_s称为方程组$AX=0$的一个基础解系．

（2）性质：i）如果$AX=0$有非零解，那么它一定有基础解系，并且基础解系所含解向量的一个数等于$n-r$．这里r是系数矩阵A的秩，n是未知量的个数．

ii）如果η_1，η_2，…，η_{n-r}是$AX=0$的一个基础解系，那么$\eta=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}$．（$k_1$，$k_2$，…，$k_{n-r}$是任意数）是$AX=0$的全部解．

iii）X_1是$AX=b$的一个解，η_1，…η_2，…，η_{n-r}是导出组$AX=0$的一个基础解系，那么

$X=X_1+k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}$．（$k_1$，$k_2$，…，$k_{n-r}$是任意数）

是$AX=b$的全部解．

（3）基础解系的求法：先求出$AX=0$的一般解，设有$n-r$个自由未知量，然后对$n-r$个自由未知量取适当的$n-r$组数值，使解向量组

$$\eta_1,\ \eta_2,\ \cdots,\ \eta_{n-r}$$

线性无关，那么解向量组η_1，η_2，…，η_{n-r}就是要求的齐次线性方程组$AX=0$的一个基础解系．

5．消元法解线性方程组，步骤如下

（1）对方程组（增广矩阵）作行初等变换，化成阶梯形方程组（矩阵），进一步化成行简化阶梯形方程组（矩阵）

（2）由行简化阶梯形方程组（矩阵）可判断方程组是否有解，有解时可直接写出其一般解．

四、逆阵求法之二，初等行变换法

$$(A,\ E)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\cdots\longrightarrow(E,\ A^{-1})$$

（四）矩阵特征值

一、特征值和特征向量

1．基本概念．

（1）$A=(a_{ij})$是一个n阶方阵，λ_0是一个数，如果存在非零向量$X=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)^T$，使得　$AX=\lambda_0 X$

成立，那么λ_0称为A的一个特征值，非零向量X称为A的属于λ_0的一个特征向量，或简称A的特征向量.

（2）$A=(a_{ij})$是一个n阶矩阵，λ是一个文字，那么n阶矩阵 $\lambda E-A$ 称为A的特征矩阵，特征矩阵的行列式 $|\lambda E-A|$ 称为A的特征多项式（注意：它是一个关于λ的n次多项式），行列式方程 $|\lambda E-A|=0$ 称为A的特征方程.

2．A的特征值及特征向量的求法.

定理．数λ_0是n阶方阵A的特征值的充分必要条件是λ_0是特征方程$|\lambda E-A|=0$的根，X是A的属于特征值λ_0的特征向量的充分必要条件是X是齐次线性方程组$(\lambda_0 E-A)X=0$的非零解.

根据上面定理，可得

（1）解特征方程$|\lambda E-A|=0$，求出的n个根λ_1，λ_2，…，λ_n（重根按重数计），即为A的全部特征值，

（2）对于于A的每一个特征值λ_0，求出齐次线性方程组（$\lambda_0 E-A)X=0$的一个基础解系η_1，η_2，…，η_s，那么

$k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s$ （k_1，k_2，…，k_s是不全为零的任意数）

为A的属于λ_0的全部特征向量.

3．特征值和特征向量的基本性质：

（1）n阶矩阵A与它的转置矩阵A^T有相同的特征值.

（2）如果n阶矩阵A的每一行（或每一列）元素的模之和都小于1，即$\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|<1$

$(i=1,2,\cdots,n)$（或 $\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|<1$，$j=1,2,\cdots,n$）则$A$的每一个特征值的模都小于1.

*二、线性方程组简单迭代法

将n元n个方程的线性方程组$CX=D$ （1） 改写成 $X=AX+b$ （2）

则（2）称为（1）的迭代形式 $X^{(k)}=AX^{(k-1)}+b$（$k=1,2,3,\cdots$） （3）

其中$X^{(k)}$是（1）的第k次近似值.两次近似值之间的关系（3）称为（2）的简单迭代公式.

如果第k次近似值与第$k-1$次近似值之间差很小，并满足实际问题要求程度，则可把第k次近似值$X^{(k)}$作为近似解.

如果已给允许误差ε，当 $|x_i^{(K)}-x_i^{(K-1)}|<\varepsilon$ $(i=1,2,\cdots,n)$

时，则迭代停止，把$X^{(k)}=(x_1^{(K)},\ x_2^{(K)},\ \cdots,\ x_n^{(K)})^T$作为近似解.

注意：（1）在简单迭代法中，如果近似值越来越接近精确解，则称迭代形式（或迭代法）是收敛的，只有迭代形式（或迭代法）是收敛时才能应用.

（2）如果迭代形式$X=AX+b$中的n阶矩阵$A=(a_{ij})$所有特征值λ的模$|\lambda|<1$，则迭代法收敛.

（3）如果迭代形式$X=AX+b$中的n阶矩阵$A=(a_{ij})$满足条件：

$$1^\circ \quad \sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|<1 \ (i=1,2,\cdots,n) \text{或} \ 2^\circ \sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|<1 \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

则迭代法收敛.

***三、矩阵级数**

定义1．设矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$，矩阵序列$\{A_K\}$：A_1，A_2，…，A_K，…

其中$A_K=(a_{ij}^{(K)})_{m\times n}$（$k=1,2,\cdots$），如果$\lim\limits_{k\to\infty} a_{ij}^{(K)}=a_{ij}$（$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$）　则称矩阵$A$为矩阵序列$\{A_K\}$的极限，记作$\lim\limits_{k\to\infty}A_K=A$或$A_K\to A$（$k\to\infty$）

这时，称矩阵序列$\{A_K\}$收敛于A．不收敛的矩阵序列称为发散的．

定义2．设A_1，A_2，…，A_K，…　（A_K为$m\times n$矩阵，$k=1$，2，…）为矩阵序列．和式

$$\sum_{k=1}^{\infty}A_K=A_1+A_2+\cdots+A_K+\cdots$$

称为矩阵级数．部分和　$S_N=\sum\limits_{k=1}^{N}A_K$

如果矩阵序列$\{S_N\}$收敛且有极限S（即$\lim\limits_{N\to\infty}S_N=S$），则称级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_K$是收敛的，且其和为$S$，可表示为

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}A_K$$

不收敛的矩阵级数称为发散的．

定理1．设A为n阶方阵，当$m\to\infty$时$A^m\to 0$的充要条件是A的所有特征值λ的模小于1．

定理2．设n阶矩阵$A=(a_{ij})$，如果

$\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|<1$（$i=1$，2，…，$n$）或$\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|<1$（$j=1$，2，…，$n$），那末$A_m\to 0$（当$m\to\infty$时）

定理3．设$A=(a_{ij})$为n阶矩阵，矩阵级数　$\sum\limits_{k=0}^{\infty}A^k=E+A+A^2+\cdots+A^k+\cdots$

收敛的充要条件是$A^k\to 0$　（$k\to\infty$），并且有　$\sum\limits_{k=0}^{\infty}A^k=(E-A)^{-1}$

四、两个有用结论

1．设n阶矩阵$A=(a_{ij})\neq 0$，若 $\sum\limits_{i\neq j}^{n}|a_{ij}|<|a_{jj}|$，（$j=1, 2, \cdots, n$）

则A是非退化矩阵．

2．设$A=(a_{ij})$为n阶矩阵，若$a_{ij}\geqslant 0$ （$i, j=1, 2, \cdots, n$）

并且 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}<1$ （$j=1, 2, \cdots, n$） 则矩阵$E-A$是非退化矩阵．

（五）投入产出数学模型

投入——是指从事一项经济活动的各种消耗．

产出——是指从事一项经济活动的结果．

投入产出表——把所研究的某一经济系统中各部门之间的数量依存关系反映在一张平衡表上，这张表称为投入产出表．将经济系统中各部门之间的数量依存关系用数学式子来表示，这式子称为数学模型．

投入产出模型——投入产出表以及由它所得到的数学模型称为投入产出模型．

一、价值型投入产出模型

1．价值型投入产出表．如表1.1．表1.1中，$x_i(i=1, 2, \cdots, n)$表示第i个生产部门的总产值；x_{ij}表示第j部门在生产过程中消耗第i部门的产品数量（叫做部门间的流量）；$y_i(i=1, 2, \cdots, n)$表示第i部门最终产品量；d_j、v_j、$m_j(j=1, 2, \cdots, n)$分别表示第j部门的固定资产折旧、劳动报酬、纯收入数值；$z_j(j=1, 2, \cdots, n)$表示第j部门的新创造价值，即 $z_j=v_j+m_j$ （$j=1, 2, \cdots, n$）

表中用双线将表分成四部分，按照左上、右上、左下、右下的顺序分别称为Ⅰ、Ⅱ、ⅢⅣ部分．第Ⅰ部分反映了各部门之间相互提供产品供生产过程消耗的情况；第Ⅱ部分为各生产部门的最终产品分配情况；第Ⅲ部分为各生产部门收入的初次分配情况．第Ⅳ部分反映国民收入的再分配情况．

2．模型的两个平衡方程组

（1）分配平衡方程组：

$$\begin{cases} x_1=x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1n}+y_1 \\ x_2=x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2n}+y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n=x_{n1}+x_{n2}+\cdots+x_{nn}+y_n \end{cases}$$

或简写为： $$x_i=\sum_{j=1}^{n}x_{ij}+y_i \quad (i=1,2,\cdots n)$$

分配平衡方程组的经济意义是：每一个生产部门分配给各部门作为生产的投入产品数量

与作为最终产品使用的产品数量之和等于该部门的总产品数量。

表1·1　价值型投入产出表

投入＼产出		中间产品					最终产品				总产值
		1	2	…	n	小计	消费	积累	出口	小计	
生产资料补偿价值	1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	$\sum_{j=1}^{n} x_{1j}$				y_1	x_1
	2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	$\sum_{j=1}^{n} x_{2j}$				y_2	x_2
	⋮	…	…	…	…	…				⋮	⋮
	n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nn}	$\sum_{j=1}^{n} x_{nj}$				y_n	x_n
	小计	$\sum_{i=1}^{n} x_{i1}$	$\sum_{i=1}^{n} x_{i2}$	…	$\sum_{j=1}^{n} x_{in}$						
	固定资产折旧	d_1	d_2	…	d_n						
新创造价值	劳动报酬	U_1	U_2	…	U_n						
	纯收入	m_1	m_2	…	m_n						
	小计	z_1	z_2	…	z_n						
总投入		x_1	x_2	…	x_n						

（2）消耗平衡方程组：

$$
\begin{cases}
x_1 = x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{n1} + d_1 + z_1 \\
x_2 = x_{12} + x_{22} + \cdots + x_{n2} + d_2 + z_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n = x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{nn} + dn + z_n
\end{cases}
$$

或简写成：$x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + d_j + z_j$

$(j=1,2,\cdots,n)$

消耗平衡方程组的经济意义是：在某一生产部门中，各部门对它投入的产品数量与该部门的固定资产折旧、新创造价值之和等于它的总产品数值，并有

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{j=1}^{n} d_j + \sum_{j=1}^{n} z_j$$

其经济意义是各部门的最终产品价值之和等于它们的固定资产折旧价值与新创造价值之和。

二、直接消耗系数

1．直接消耗系数a_{ij}的定义及计算．

定义．第j部门生产单位产品直接消耗第i部门的产品量，称为第j部门对第i部门的直接消耗系数，记作a_{ij}．

矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ 称为直接消耗系数矩阵．

直接消耗系数a_{ij}的计算公式：$a_{ij}=\dfrac{x_{ij}}{x_j}$ $(i,\ j=1,2,\cdots,n)$

其中x_{ij}是第j部在生产总产品x_j的过程中消耗第i部门的产品数量，x_j是第j部门的总产量．

直接消耗矩阵$A=(a_{ij})$的计算方法：

（1）用$a_{ij}=\dfrac{x_{ij}}{x_j}$（$i,j=1,2,\cdots,n$)算出$a_{ij}$从而得$A$；

（2）利用矩阵运算计算A的公式如下：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{x_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{x_n} \end{bmatrix}$$

矩阵$A=(a_{ij})$具有以下性质：（1）所有元素非负，且$0\leqslant a_{ij}<1$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$

（2）各列元素的绝对值之和小于1，即 $\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|<1$ $(j=1,2,\cdots,n)$

2．平衡方程组的矩阵表示：由$x_{ij}=a_{ij}x_j$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$

分配平衡方程组 $x_i=\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}+y_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$可以写成：$x_i=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+y_i$

$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

即

$$\begin{cases} x_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+y_1 \\ x_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n+y_n \end{cases}$$

消耗平衡方程组，$x_j=\sum\limits_{i=1}^{n}x_{ij}+d_j+z_j(j=1,2,\cdots,n)$可以写成：$x_j=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}x_j+$