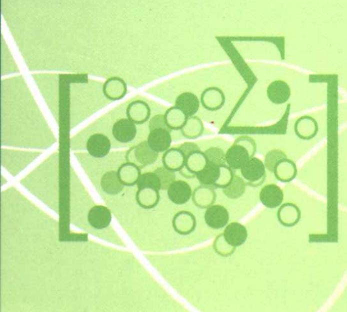
# 高等代数辅导及习题全解

北大第三版

主编○北京大学 王勇

GAODENG DAISHU FUDAO JI XITI QUANJIE



科学技术文献出版社

# 高等代数辅导及习题全解

## 北大第三版


主　编　北京大学数学科学学院　王　勇

编　者　胡东华　周振东　黄　阔　张　祥
李国军　孙海波　张英英　韩雨澜
邵承宗　朱林海　王东兆　刘宝杰
李岭南　唐晓燕　于　盼　张志强
孙文生　张学斌　郭宏洁　刘睿杰
刘　玉　贺志平　赵　亮　彭　凯
谭　利　陈　乐　胡　杏　刘　格
王卫平　王有德　陈　友　谢　瑶
王　锐　黄　溪　熊　姿　黄　熙
蔡　妍　刘　星　杨伟姣　刘晓兰
王　利　刘美平　刘美华　彭德华
蒋玉奇　周良玉　刘玉田　谭　希
吴　维　阳湘崇　胡孝辉　周　耀



科学技术文献出版社

Scientific and Technical Documents Publishing House

·北京·

**图书在版编目(CIP)数据**

高等代数辅导及习题全解/王勇主编.-北京:科学技术文献出版社,2007.1

ISBN 978-7-5023-5544-9

Ⅰ.高… Ⅱ.王… Ⅲ.高等代数-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 158485 号

出版者 科学技术文献出版社
地址 北京市海淀区西郊板井农林科学院农科大厦 A 座 8 层/100089
图书编务部电话 (010)51501739
图书发行部电话 (010)51501720,(010)68514035(传真)
邮购部电话 (010)51501729
网址 http://www.stdph.com
E-mail:stdph@istic.ac.cn
策划编辑 科 文
责任编辑 丁坤善
责任出版 王杰馨
发行者 科学技术文献出版社发行 全国各地新华书店经销
印刷者 利森达印务有限公司
版(印)次 2007 年 1 月第 1 版第 1 次印刷
开本 850×1168 32 开
字数 351 千
印张 10.25
印数 1~6000 册
定价 15.00 元

# 前　言

高等代数是数学学科中一门重要的基础课程，也是数学专业硕士研究生入学考试的必考科目，它对学生的抽象思维能力、逻辑推理能力的培养，以及后续课程的学习起着非常重要的作用。但是，大多数学生在学习过程中，存在对基本概念以及定理结论理解不透，解题缺乏思路等问题。

为帮助学生消化课堂讲授内容，掌握高等代数的基本理论和基本方法，提高解题的技巧和方法，我们根据北京大学数学科学学院编写、王萼芳、石明生修订并由高等教育出版社出版的《高等代数》教材（第三版）编写了本辅导书。

本书可供大、中、专院校学生学习高等代数课程的参考用书，也可供报考研究生的读者作为复习参考用书使用。

对于本书的不足之处，恳请读者予以批评指正，使其日臻完善。

# 目 录

# 第一章　多项式

## 内容大纲

- 多项式
  - 数域(§1)
  - 一元多项式(§2)
    - 整除(§3)
    - 最大公因式(§4)
    - 因式分解
      - 唯一性定理(§5)
      - 重因式(§6)
      - 多项式函数(§7)
      - 复系数与实系数多项式的因式分解(§8)
      - 有理系数多项式的因式分解(§9)
  - 多元多项式(§10)—— 对称多项式(§11)

## 主要知识点

| | |
|---|---|
| **数域** | **定义**:设 $P$ 是由一些复数组成的集合,其中包括 0 与 1. 如果 $P$ 中任意两个数(这两个数可以相同)的和、差、积、商(除数不为零)仍然是 $P$ 中的数(即对上述代数运算封闭),那么 $P$ 就称为一个**数域**. |
| | **说明**:有理数集 $\boldsymbol{Q}$、实数集 $\boldsymbol{R}$、复数集 $\boldsymbol{C}$ 都是数域,所有的数域 $P$ 都包含有理数域 $Q$ 作为它的一部分. |
| **一元多项式** | **定义**:设 $x$ 是一个符号(或称文字),$n$ 是一个非负整数,形式表达式 $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$($a_0,a_1,\cdots,a_n$ 属于数域 $P$)称为**系数在数域 $P$ 中的一元多项式**,或简称为**数域 $P$ 上的一元多项式**. |
| | **多项式相等**:如果在多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 中,除去系数为零的项外,同次项的系数全相等,那 $f(x)$ 与 $g(x)$ 就称为**相等**,记为　$f(x) = g(x)$. |
| | **性质 1**:多项式可进行加、减、乘运算,并满足加法交换律、加法结合律、乘法交换律、乘法结合律、乘法对加法的分配律和乘法消去律. |
| | **性质 2**:当 $f(x) \pm g(x) \neq 0$ 时<br>$\partial(f(x) \pm g(x)) \leqslant \max\{\partial(f(x)),\partial(g(x))\}$. |
| | **性质 3**:当 $f(x)g(x) \neq 0$ 时,$\partial(f(x)g(x)) = \partial(f(x)) + \partial(g(x))$. |
| | **一元多项式环**:所有系数在数域 $P$ 中的一元多项式的全体,称为数域 $P$ 上的**一元多项式环**,记为 $P[x]$,$P$ 称为 $P[x]$ 的系数域. |

<table>
<tr>
<td rowspan="3">带余除法</td>
<td>带余除法:对于 $P[x]$ 中任意两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$,其中 $g(x)\neq 0$,一定有 $P[x]$ 中的多项式 $q(x)$,$r(x)$ 存在,使 $$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$$ 成立,其中 $\partial(r(x))<\partial(g(x))$ 或者 $r(x)=0$,并且这样的 $q(x)$,$r(x)$ 是唯一决定的,所得 $q(x)$ 称为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商,称 $r(x)$ 为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式.</td>
</tr>
<tr>
<td>带余除法的计算格式 1—普通除法或长除法: $$\begin{array}{rl} & \text{商 } q(x) \\ \text{除式 } g(x) & \overline{\big)\ \text{被除式 } f(x)} \\ & \underline{-)\,q(x)g(x)} \\ & \text{余式}\quad r(x) \end{array}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>带余除法的计算格式 2—竖式除法: $$\begin{array}{l|c|l} \text{除式 } g(x) & \text{被除式 } f(x) & \text{商 } q(x) \\ & \underline{-)\,q(x)g(x)} & \\ & \text{余式 } r(x) & \end{array} \quad \text{或} \quad \begin{array}{l|c|l} \text{商 } q(x) & \text{被除式 } f(x) & \text{除式 } g(x) \\ & \underline{-)\,q(x)g(x)} & \\ & \text{余式 } r(x) & \end{array}$$</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="3">整除</td>
<td>定义:数域 $P$ 上的多项式 $g(x)$ 称为整除 $f(x)$,如果有数域 $P$ 上的多项式 $h(x)$,使 $f(x)=g(x)h(x)$ 成立. $g(x)\mid f(x)$ 表示 $g(x)$ 整除 $f(x)$,$g(x)\nmid f(x)$ 表示 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$.</td>
</tr>
<tr>
<td>整除的充要条件:对于数域 $P$ 上任意两个多项式 $f(x)$,$g(x)$,其中 $g(x)\neq 0$,$g(x)\mid f(x)$ 的充要条件是 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式 $r(x)=0$.</td>
</tr>
<tr>
<td>性质:(1) 若 $f(x)\mid g(x)$,$g(x)\mid f(x)$,则 $f(x)=cg(x)$($c$ 为非零常数).<br>(2) 若 $f(x)\mid g(x)$,$g(x)\mid h(x)$,则 $f(x)\mid h(x)$(传递性).<br>(3) 若 $f(x)\mid g_i(x)$,$i=1,2,\cdots,r$,则 $f(x)$ 整除 $g_i(x)$ 的组合,即 $$f(x)\mid(u_1(x)g_1(x)+u_2(x)g_2(x)+\cdots u_r(x)g_r(x))$$ 其中 $u_i(x)(i=1,2,\cdots,r)$ 是数域 $P$ 上的任意多项式.</td>
</tr>
</table>

| | |
|---|---|
| 最大公因式 | **定义**:设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是 $P[x]$ 中两个多项式,$P[x]$ 中多项式 $d(x)$ 称为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的**最大公因式**,如果它满足下面两个条件:<br>1) $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式;<br>2) $f(x)$,$g(x)$ 的公因式全是 $d(x)$ 的因式.<br>$(f(x),g(x))$ 表示首项系数为 1 的那个最大公因式. |
| | **定理 1**:如果有等式 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$<br>成立,那么 $f(x)$,$g(x)$ 与 $g(x)$,$r(x)$ 有相同的公因式. |
| | **定理 2**:对于 $P[x]$ 中任意两个多项式 $f(x)$,$g(x)$,在 $P[x]$ 中存在一个最大公因式 $d(x)$,且 $d(x)$ 可表成 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的组合,即有 $P[x]$ 中的多项式 $u(x)$,$v(x)$,使得 $d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$. |
| | **求最大公因式的方法—辗转相除法**:<br>如果 $f(x),g(x)\in P[x]$,$g(x)\neq 0$,且有 $q_i(x),r(x)\in P[x]$,使<br>$f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x)$<br>$g(x)=q_2(x)r_1(x)+r_2(x)$<br>$r_1(x)=q_3(x)r_2(x)+r_3(x)$<br>………………<br>$r_{s-2}(x)=q_s(x)r_{s-1}(x)+r_s(x)$<br>$r_{s-1}(x)=q_{s+1}(x)r_s(x)+0$<br>其中 $\partial(r_i(x))\geqslant 0$,则 $r_s(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式. |
| | **说明**:对于任意多项式 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)(s\geqslant 2)$,同样也可以定义最大公因式.<br>$(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x))$ 表示首项系数为 1 的最大公因式,且有类似于定理 2 的结论. |
| 互素 | **定义**:$P[x]$ 中两个多项式 $f(x)$,$g(x)$ 称为**互素**(也称互质)的,如果 $f(x)$,$g(x)$ 的最大公因式 $(f(x),g(x))=1$. |
| | **定理 1**:$P[x]$ 中两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素的充要条件是 $P[x]$ 中有多项式 $u(x)$,$v(x)$,使 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$. |
| | **定理 2**:若 $(f(x),g(x))=1$,且 $f(x)\mid g(x)h(x)$,则 $f(x)\mid h(x)$. |
| | **定理 3**:若 $f_1(x)\mid g(x)$,$f_2(x)\mid g(x)$,且 $(f_1(x),f_2(x))=1$,则 $f_1(x)f_2(x)\mid g(x)$. |
| | **说明**:对于任意多个多项式 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)(s\geqslant 2)$,如果 $(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x))=1$,那么 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$ 就称为互素的,且有类似于定理 1 的结论. |
| 不可约多项式 | **定义**:数域 $P$ 上次数 $\geqslant 1$ 的多项式 $p(x)$ 称为数域 $P$ 上的**不可约多项式**,如果它不能表示成数域 $P$ 上的两个次数比 $p(x)$ 的次数低的多项式的乘积. |
| | **说明**:一次多项式总是不可约多项式,一个多项式是否不可约是依赖于系数域 $P$ 的. |
| | **性质**:如果 $p(x)$ 是不可约多项式,那么于任意两个多项式 $f(x)$,$g(x)$,由 $p(x)\mid f(x)g(x)$ 一定推出 $p(x)\mid f(x)$ 或者 $p(x)\mid g(x)$. |

| | |
|---|---|
| 因式分解 | **因式分解及唯一性定理**:数域 $P$ 上每一个次数 $\geqslant 1$ 的多项式 $f(x)$ 都可以唯一地分解成数域 $P$ 上一些不可约多项式的乘积.所谓唯一性是说,如果有两个分解式 $f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)=q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x)$.<br>那么必有 $s=t$,并且适当排列因式的次序后有 $p_i(x)=c_iq_i(x),i=1,2,\cdots,s$,其中 $c_i$ 是一些非零常数. |
| | **标准分解式**:$f(x)=cp_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$<br>其中 $c$ 是 $f(x)$ 的首项系数,$p_i(x)(i=1,2,\cdots,s)$ 是不同的首项系数为1的不可约多项式,$r_i(i=1,2,\cdots,s)$ 是正整数. |
| 重因式 | **定义**:不可约多项式 $p(x)$ 称为多项式 $f(x)$ 的 $k$ **重因式**,如果 $p^k(x)\mid f(x)$,而 $p^{k+1}(x)\nmid f(x)$. 其中 $k$ 为正整数,当 $k=1$ 时为单因式,当 $k>1$ 时为重因式. |
| | **定理 1**:如果不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 $k$ 重因式($k\geqslant 1$),那么它是微商 $f'(x)$ 的($k-1$)重因式. |
| | **定理 2**:如果不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 $k$ 重因式($k\geqslant 1$),那么 $p(x)$ 是 $f(x)$,$f'(x),\cdots,f^{(k-1)}(x)$ 的因式,但不是 $f^{(k)}(x)$ 的因式. |
| | **定理 3**:不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的重因式的充分必要条件为 $p(x)$ 是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的公因式. |
| | **定理 4**:多项式 $f(x)$ 没有重因式的充要条件是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 互素. |
| 多项式函数 | **定义**:在 $P[x]$ 中的多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$<br>中,令 $x$ 取数 $\alpha\in P$,得到 $f(\alpha)=a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0$,<br>称 $f(\alpha)$ 为 $f(x)$ 当 $x=\alpha$ 的值,这样由 $f(x)$ 定义的数域 $P$ 上的函数称为 $P$ 上的**多项式函数**. |
| | **定理 1(余数定理)**:用一次多项式 $x-\alpha$ 去除多项式 $f(x)$,所得余式是一个常数 $f(\alpha)$. |
| | **根的定义**:若 $f(\alpha)=0$,则 $\alpha$ 为 $f(x)$ 的根或零点. |
| | **定理 2**:$\alpha$ 是 $f(x)$ 的根 $\Leftrightarrow (x-\alpha)\mid f(x)$. |
| | **重根的定义**:如果($x-\alpha$)是 $f(x)$ 的 $k(\geqslant 1)$ 重因式,称 $\alpha$ 为 $f(x)$ 的 $k$ **重根**. $k=1$ 时 $\alpha$ 为单根,$k>1$ 时 $\alpha$ 为重根. |
| | **定理 3**:$P[x]$ 中 $n$ 次多项式($n\geqslant 0$)在数域 $P$ 中的根不可能多于 $n$ 个(重根按重数计算). |
| | **定理 4**:如果多项式 $f(x),g(x)$ 的次数都不超过 $n$,而它们对 $n+1$ 个不同的数 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,n+1)$ 有相同的值,即 $f(\alpha_i)=g(\alpha_i)(i=1,2,\cdots,n+1)$,则 $f(x)\equiv g(x)$. |

| | |
|---|---|
| **复系数多项式的因式分解** | **代数基本定理**:每个次数 $\geqslant 1$ 的复系数多项式在复数域中有一根. |
| | **因式分解定理**:每个次数 $\geqslant 1$ 的复系数多项式在复数域上都可以唯一地分解成一次因式的乘积. |
| | **标准分解式**:$f(x)=a_n(x-\alpha_1)^{l_1}(x-\alpha_2)^{l_2}\cdots(x-\alpha_s)^{l_s}$ 其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是不同的复数,$l_1,l_2,\cdots,l_s$ 是正整数. |
| **实系数多项式的因式分解** | **因式分解定理**:每个次数 $\geqslant 1$ 的实系数多项式在实数域上都可以唯一地分解成一次因式与二次不可约因式的乘积. |
| | **标准分解式**:$f(x)=a_n(x-c_1)^{l_1}\cdots(x-c_s)^{l_s}(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{k_r}$ 其中对 $i=1,2,\cdots,r,j=1,2,\cdots,s,p_i^2-4q_i<0,p_i,q_i,c_j$ 是实数,$l_j,k_i$ 是正整数. |
| **有理系数多项式的因式分解** | **因式分解定理**:每个系数 $\geqslant 1$ 的有理系数多项式都能唯一地分解成不可约的有理系数多项式的乘积. |
| | **本原多项式**:如果一个非零的整系数多项式 $g(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$ 的各系数 $b_i(i=0,1,\cdots,n)$ 没有异于 $\pm 1$ 的公因数,即各系数互数,就称它为一个**本原多项式**. |
| | **定理 1(高斯 Gauss 引理)**:两个本原多项式的乘积还是本原多项式. |
| | **定理 2**:如果一非零整系数多项式能分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积,那么它一定能分解成两个次数较低的整系数多项式的乘积. |
| | **定理 3**:设 $f(x),g(x)$ 是整系数多项式,且 $g(x)$ 是本原的,如果 $f(x)=g(x)h(x)$,其中 $h(x)$ 是有理系数多项式,那么 $h(x)$ 一定是整系数. |
| | **定理 4**:设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ 是一个 $n$ 次整系数多项式,而 $\frac{r}{s}$ 是它的一个有理根,其中 $r,s$ 互素,那么必有 $s\mid a_n,r\mid a_0$.特别地,若 $a_n=1$,那么 $f(x)$ 的有理根都是整根,且是 $a_0$ 的因子 |
| | **定理 5(艾森斯坦 Eisenstein 判别法)**:设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是整系数多项式,如果有一个素数 $p$,使得<br>1)$p\nmid a_n$;<br>2)$p\mid a_i,i=0,1,\cdots,n-1$;<br>3)$p^2\nmid a_0$.<br>那么项 $f(x)$ 在有理数域上是不可约的. |

| | |
|---|---|
| 多*元多项式 | **单项式**:设 $P$ 是一个数域,$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 $n$ 个文字,形式为 $ax_1^{k_1}x_2^{k_2},\cdots,x_n^{k_n}$ 的式子,其中 $a$ 属于 $P$,$k_1,k_2,\cdots,k_n$ 是非负整数,称为一个**单项式**. |
| | **多项式**:一些单项式的和 $\sum\limits_{k_1,k_2,\cdots,k_n} a_{k_1,k_2\cdots k_n}x_1^{k_1}x_2^{k_2},\cdots,x_n^{k_n}$ 就称为 **$n$ 元多项式**,或者简称**多项式** |
| | **$n$ 元多项式环**:所有系数在数域 $P$ 中的 $n$ 元多项式的全体,称为数域 $P$ 上的 $n$ 元多项式环,记为 $P[x_1,x_2,\cdots,x_n]$. |
| | **次数**:$k_1+k_2+\cdots+k_n$ 称为单项式 $ax_1^{k_1}x_2^{k_2},\cdots,x_n^{k_n}$ 的**次数**. 当一个多项式表成一些不同类的单项式的和之后,其中系数不为零的单项式的最高次数就称为这个多项式的**次数**. |
| | **字典排列法**:将每一类单项式 $ax_1^{k_1}x_2^{k_2},\cdots,x_n^{k_n}$ 对应的 $n$ 元数组 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 进行排序,相应地,单项式之间就有了一个先后顺序,这种多元多项式排列顺序的方法称为**字典排列法**. 按字典排列法写出来的第一个系数不为零的单项式称为多项式的**首项**. |
| | **说明**:$n$ 元多项式也可以定义相等、相加、相减、相乘. 首项不一定具有最大的次数. |
| 对*称多项式 | **对称多项式**:$n$ 元多项式 $f(x_1,\cdots,x_n)$,如果对于任意的 $i,j,1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$ 都有 $f(x_1,\cdots,x_i,\cdots x_j,\cdots,x_n)=f(x_1,\cdots,x_j,\cdots x_i,\cdots,x_n)$,那么这个多项式就称为**对称多项式**. |
| | **初等对称式项式**:<br>$n$ 元多项式 $\begin{cases}\sigma_1=x_1+x_2+\cdots+x_n\\ \sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sigma_n=x_1x_2\cdots x_n\end{cases}$<br>是对称多项式,称为**初等对称多项式**. |
| | **对称多项式基本定理**:对于任意一个 $n$ 元对称多项式 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 都有唯一一个 $n$ 元多项式 $\varphi(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,使得 $f(x_1,\cdots,x_n)=\varphi(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$. |
| | **把对称多项式 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 表为初等对称多项式的多项式的过程**:设多项式 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的首项(按字典排列法)为:$ax_1^{l_1}x_2^{l_2},\cdots,x_n^{l_n}(a\neq 0)$,作对称多项式 $\varphi_1=a\sigma_1^{l_1-l_2}\sigma_2^{l_2-l_3}\cdots\sigma_n^{l_n}$. 记多项式 $f_1(x_1,\cdots,x_n)=f(x_1,\cdots,x_n)-\varphi_1$,对 $f_1(x_1,\cdots,x_n)$ 重复上面的作法得到 $f_2=f_1-\varphi_2$. 继续作下去直到 $f_m=0$. 于是 $f(x_1,\cdots,x_n)=\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_m$. |
| | **一元多项式 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 的判别式 $D(a_1,a_2,\cdots,a_n)$**:假设 $f(x)=0$ 的根为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,由根与系数的关系(韦达定理)知,$a_1=-(x_1+x_2+\cdots+x_n)=-\sigma_1$,$a_2=x_1x_2+x_1x_3+\cdots x_{n-1}x_n)=\sigma_2,\cdots,a_k=(-1)^k\sigma_k,\cdots,a_n=(-1)^nx_1x_2\cdots x_n=(-1)^n\sigma_n$,作这 $n$ 个根差积的平方 $D=\prod\limits_{i<j}(x_i-x_j)^2$,按基本定理 $D$ 可以表示成 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的多项式 $D(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,称其为 $f(x)$ 的**判别式**. |

## 习题解析

1. 用 $g(x)$ 除 $f(x)$，求商 $q(x)$ 与余式 $r(x)$：

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1, g(x) = 3x^2 - 2x + 1$；

(2) $f(x) = x^4 - 2x + 5, g(x) = x^2 - x + 2$.

[分析] 用带余除法的计算格式 1(普通除法或长除法) 或计算格式 2(竖式除法) 进行计算，即可求得用多项式 $g(x) \neq 0$ 除多项式 $f(x)$ 所得的商 $q(x)$ 和余式 $r(x)$.

[解题]

(1) 用竖式除法得

$$
\begin{array}{r|r|l}
3x^2 - 2x + 1 & x^3 - 3x^2 \quad - x - 1 & \frac{1}{3}x - \frac{7}{9} \\
 & x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x & \\
\cline{2-2}
 & -\frac{7}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 1 & \\
 & -\frac{7}{3}x^2 + \frac{14}{9}x - \frac{7}{9} & \\
\cline{2-2}
 & -\frac{26}{9}x - \frac{2}{9} &
\end{array}
$$

因此

$$x^3 - 3x^2 - x - 1 = \left(\frac{1}{3}x - \frac{7}{9}\right)(3x^2 - 2x + 1) - \left(\frac{26}{9}x + \frac{2}{9}\right)$$

即用 $g(x)$ 去除 $f(x)$，商式 $\quad q(x) = \frac{1}{3}x - \frac{7}{9}$，余式 $r(x) = -\frac{26}{9}x - \frac{2}{9}$

(2)

$$
\begin{array}{r|r|l}
x^2 - x + 2 & x^4 \qquad\qquad - 2x + 5 & x^2 + x - 1 \\
 & x^4 - x^3 + 2x^2 \qquad\qquad & \\
\cline{2-2}
 & x^3 - 2x^2 - 2x + 5 & \\
 & x^3 - x^2 + 2x \quad & \\
\cline{2-2}
 & -x^2 - 4x + 5 & \\
 & -x^2 + x - 2 & \\
\cline{2-2}
 & -5x + 7 &
\end{array}
$$

因此

$$x^4 - 2x + 5 = (x^2 + x - 1)(x^2 - x + 2) + (7 - 5x)$$

即用 $g(x)$ 去除 $f(x)$ 商式 $\quad q(x) = x^2 + x - 1$，余式 $r(x) = -5x + 7$.

[小结]　带余除法就是要逐步利用除式 $g(x)$ 确定商 $q(x)$ 中由高次到低次的项来消去被除式的首项，以得到次数低于 $g(x)$ 的多项式或零多项式 $r(x)$.

2. $m,p,q$ 适合什么条件时，有

(1) $x^2+mx-1 \mid x^3+px+q$

(2) $x^2+mx+1 \mid x^4+px^2+q$

[分析]　根据多项式整除的充要条件可知

$$g(x) \mid f(x) \Leftrightarrow f(x)=q(x)\cdot g(x)+r(x) \text{ 且 } r(x)=0$$

因此，求解本题时先利用第1题中的方法得到余式 $r(x)$，然后令 $r(x)=0$，即可得到各系数之间的关系.

[解题]　(1)

$$\begin{array}{r|l|l}
x^2+mx-1 & x^3 \qquad\quad +px \qquad +q & x-m \\
 & x^3+mx^2-x & \\
\hline
 & \quad -mx^2+(p+1)x+q & \\
 & \quad -mx^2-m^2x \qquad +m & \\
\hline
 & \quad (p+m^2+1)x+(q-m) &
\end{array}$$

因此

$$x^3+px+q=(x^2+mx-1)(x-m)+[(p+m^2+1)x+q-m]$$

令 $(p+m^2+1)x+q-m=0$，则有

$$\begin{cases} p+m^2+1=0 \\ q-m=0 \end{cases}$$

所以 $p=-m^2-1, q=m$

(2) $x^4+px^2+q=(x^2+mx+1)(x^2-mx+m^2+p-1)+(2m-pm-m^3)x+(q-p-m^2+1)$

令 $(2m-pm-m^3)x+(q-p-m^2+1)=0$，有

$$\begin{cases} 2m-pm-m^3=0 \\ q-p-m^2+1=0 \end{cases}$$

当 $m=0$ 时，$q+1-p=0$，得 $p=q+1$；

当 $m\neq 0$ 时，得

$$\begin{cases} 2-p-m^2=0 \\ q-m^2+1-p=0 \end{cases}$$

即 $p=2-m^2, q=1$

所以 $\begin{cases} m=0 \\ p=q+1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m\neq 0 \\ p=2-m^2 \\ q=1 \end{cases}$

［小结］ 这一充要条件实际上给出了多项式整除的一个判别法.

3. 求 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商 $q(x)$ 与余式 $r(x)$：

(1) $f(x)=2x^5-5x^3-8x, g(x)=x+3$；

(2) $f(x)=x^3-x^2-x, g(x)=x-1+2i$.

［分析］ 此题可仿照第 1 题用带余除法求解，具体求解过程不再详述. 这里介绍另外一种多项式除法 —— 综合除法.

设以 $g(x)=x-a$ 除 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 时，所得的商 $q(x)=b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$ 及余式 $r(x)=c_0$，则比较 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$ 两端同次幂的系数得

$b_{n-1}=a_n, b_{n-2}=a_{n-1}+ab_{n-1}, \cdots, b_0=a_1+ab_1, c_0=a_0+ab_0$,

这种计算可以排成以下格式进行：

$$
\begin{array}{cccccc|l}
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots\cdots & a_1 & a_0 & a \\
+) & ab_{n-1} & +)ab_{n-2} & \cdots\cdots & +)ab_1 & +)ab_0 & \\
\hline
b_{n-1}\ (=a_n) & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots\cdots & b_0 & \vdots\ C_0 &
\end{array}
$$

用这种方法求商和余式(的系数) 称为综合除法

［解题］ 用综合除法.

(1) 因为

$$
\begin{array}{cccccc|l}
2 & 0 & -5 & 0 & -8 & 0 & -3 \\
 & -6 & 18 & -39 & 117 & -327 & \\
\hline
2 & -6 & 13 & -39 & 109 & \vdots -327 &
\end{array}
$$

所以 $q(x)=2x^4-6x^3+13x^2-39x+109, r(x)=-327$

(2) 因为

$$
\begin{array}{cccc|l}
1 & -1 & -1 & 0 & 1-2i \\
 & 1-2i & -4-2i & -9+8i & \\
\hline
1 & -2i & -5-2i & \vdots -9+8i &
\end{array}
$$

所以 $q(x)=x^2-2ix-5-2i, r(x)=-9+8i$

［小结］ 当除式为一次式时，用综合除法要比用带余除法方便，但是使用综合除法进行计算时，一定注意在被除式中所缺的项处补上零，否则就会出错.

4. 把 $f(x)$ 表成 $x-x_0$ 的方幂和，即表成

$$c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\cdots$$

的形式

(1) $f(x)=x^5, x_0=1$；

(2) $f(x)=x^4-2x^2+3, x_0=-2$；

(3) $f(x)=x^4+2ix^3-(1+i)x^2-3x+7+i, x_0=-i.$

**[分析]** 首先根据余数定理知 $c_0=f(x_0)$，然后当 $f(x)$ 表示成 $f(x)=f(x_0)+c_1(x-x_0)+\cdots+c_n(x-x_0)^n$ 的时候，进行简单地运算得到

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=c_1+c_2(x-x_0)+\cdots+c_n(x-x_0)^{n-1}$$

再次利用余数定理有 $c_1=\left.\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|_{x=x_0}$. 以此类推，可得 $c_2, c_3, \cdots$.

所以求解此题需要将 $x-x_0$ 反复地作为除式进行运算，用综合除法会更方便些.

**[解题]** 用综合除法和余数定理.

(1) 因为

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | |
| | 1 | 3 | 6 | | | |
| 1 | 3 | 6 | 10 | | | |
| | 1 | 4 | | | | |
| 1 | 4 | 10 | | | | |
| | 1 | | | | | |
| 1 | 5 | | | | | |

所以 $f(x)=(x-1)^5+5(x-1)^4+10(x-1)^3+10(x-1)^2+5(x-1)+1$

(2) 因为

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | $-2$ | 0 | 3 | $-2$ |
| | $-2$ | 4 | $-4$ | 8 | |
| 1 | $-2$ | 2 | $-4$ | 11 | |
| | $-2$ | 8 | $-20$ | | |
| 1 | $-4$ | 10 | $-24$ | | |
| | $-2$ | 12 | | | |
| 1 | $-6$ | 22 | | | |
| | $-2$ | | | | |
| 1 | $-8$ | | | | |

所以 $f(x)=(x+2)^4-8(x+2)^3+22(x+2)^2-24(x+2)+11$

(3) 因为

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $1$ | $2i$ | $-(1+i)$ | $-3$ | $7+i$ | $-i$ |
| | $-i$ | $1$ | $-1$ | $4i$ | |
| $1$ | $i$ | $-i$ | $-4$ | $7+5i$ | |
| | $-i$ | $0$ | $-1$ | | |
| $1$ | $0$ | $-i$ | $-5$ | | |
| | $-i$ | $-1$ | | | |
| $1$ | $-i$ | $-(1+i)$ | | | |
| | $-i$ | | | | |
| $1$ | $-2i$ | | | | |

所以 $f(x)=(x+i)^4-2i(x+i)^3-(1+i)(x+i)^2-5(x+i)+7+5i$

**[小结]** 此题仍是多项式除法的一个运用，因为需要多次以一次多项式作为除式的运算，所以综合除法更显示出它的作用.

5. 求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式：

(1) $f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1$, $g(x)=x^3+x^2-x-1$;

(2) $f(x)=x^4-4x^3+1$, $g(x)=x^3-3x^2+1$;

(3) $f(x)=x^4-10x^2+1$, $g(x)=x^4-4\sqrt{2}x^3+6x^2+4\sqrt{2}x+1$.

**[分析]** 利用辗转相除法来求最大公因式，在计算时常采用竖式除法的格式.

**[解题]** (1) 用辗转相除法，得

| | | | |
|---|---|---|---|
| $q_2(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$ | $g(x)=x^3+x^2-x-1$ | $f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1$ | $x=q_1(x)$ |
| | $x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x$ | $x^4+x^3-x^2-x$ | |
| | $-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-1$ | $r_1(x)=-2x^2-3x-1$ | $\frac{8}{3}x+\frac{4}{3}=q_3(x)$ |
| | $-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$ | $-2x^2-2x$ | |
| | $r_2(x)=-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$ | $-x-1$ | |
| | | $-x-1$ | |
| | | $0$ | |

用等式表示即

$$f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x)=xg(x)+(-2x^2-3x-1)$$

$$g(x)=q_2(x)r_1(x)+r_2(x)=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)r_1(x)+\left(-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}\right)$$

$$r_1(x)=q_3(x)r_2(x)=\left(\frac{8}{3}x+\frac{4}{3}\right)r_2(x)$$