# 高等代数概论

GAODENGDAISHUGAILUN

陈辉 著

杭州出版社
HANGZHOU PUBLISHING HOUSE

●杭州市重点学科经费资助

# 高等代数概论

陈 辉 著

杭州出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

高等代数概论 / 陈辉　著. —杭州:杭州出版社,
2006.11
ISBN 7-80633-922-1

Ⅰ.高...　Ⅱ.陈...　Ⅲ.高等代数-概论
Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 131667 号

| | |
|---|---|
| **责任编辑** | 应伯根 |
| **封面设计** | 祁睿一 |
| **出版发行** | 杭州出版社 |
| | (杭州市曙光路 133 号　邮政编码 310007) |
| | (E-mail:hzcbs306@hotmail.com) |
| **排　　版** | 浙江大学出版社电脑排版中心 |
| **印　　刷** | 浙江省邮电印刷厂 |
| **开　　本** | 880mm×1230mm　1/32 |
| **印　　张** | 13.25 |
| **字　　数** | 332 千字 |
| **版 印 次** | 2006 年 11 月第 1 版　2006 年 11 月第 1 次印刷 |
| **书　　号** | ISBN 7-80633-922-1/O·13 |
| **定　　价** | 28.00 元 |



**杭州出版社发行部邮购电话　(0571)87997719**

# 内容简介

高等代数是近代数学的一门重要基础课.随着科学的发展和实际应用的需要,高等代数的内容和方法都在不断地扩充和提高,为了适应新的形势,满足广大读者,特别是研究生报考者的需求,现把多年的积累编成此书.

本书既是一本高等代数问题集锦,又是一部高等代数方法汇编,它是以收集、整理近年来全国高校硕士研究生入学试题为主要题材,有选择地进行归纳分类.通过对问题的研究,阐述各种方法与技巧,将知识、问题与方法融于一体,是教材改革与建设的一次尝试.

本书不仅是大学数学系选修课的必备教材,而且是报考理、工科研究生的广大读者的复习指南.同时,本书还可做为高校相关专业教师的教学参考书.

# 序

高等代数是高等学校理、工科和经济学科有关专业的一门重要基础课.它不但是其他数学课程的基础,也是物理、力学、电路等课程的基础.另外,由于电子计算机的飞速发展和广泛应用,使得许多实际问题可以通过离散化的数值计算得到定量的解决,于是作为处理离散问题的代数理论,无疑是科学研究人员和科学技术人员必备的数学基础.

由于高等代数的理论比较严谨,概念比较抽象,所以初学者感到非常困难.其实学习高等代数的困难之处并不在于它的内容有多么艰深,主要在于初学者不习惯于牢固地掌握概念,并从概念出发,通过逻辑推理进行了论证的这套抽象的代数方法.

作者根据多年的教学经验,对本门课程的内容分门别类,进行了归纳整理,精心挑选了大量的例题和问题,帮助读者能较熟练地掌握代数的基本概念和方法,而且通过对大量有代表性的典型例题的分析和研究,揭示了高等代数的解题方法与技巧.在此基础上进一步引导读者提出猜想,进行探索.将知识、问题与方法融于一体.

相信本书对培养读者良好的数学思维,掌握数学的基本思想,提高解题能力及研究生入学应试等方面将起到推动作用.

于秀源

2006 年 10 月于杭州

# 前 言

随着科学的发展和实际应用的需要，高等代数的内容和方法都在不断地扩充和提高，特别是由于电子计算机的飞速发展和广泛应用，使许多实际问题可以通过离散化的数值计算得到定量的解决，这些都离不开代数理论.

高等代数是近代数学的一门重要基础课.不仅课程内容多、难度大，又很抽象，而且具有一套特有的理论体系、思维方法及解题技巧.但只要掌握了该门课程自身的规律，应用起来就会得心应手，而要想掌握规律，只有靠进行大量的有指导的练习才能达到目的.

为了适应新的形势，满足广大读者，特别是研究生报考者的需求，作者根据多年教学经验和积累编成此书.对本门课程的内容分门别类，按知识点归纳为一些专题，通过对大量有代表性的典型例题的研究和探讨，揭示了高等代数的解题方法与技巧，书中引入了大量新颖的题目，包括研究生入学考试的典型试题，国内外线性代数研究的新成果等.

本书的宗旨是在学完“近世代数”的基础上，对高等代数的基本概念、理论、方法及问题，进行系统归纳与总结，通过典型例题与问题分析解题思路与技巧，揭示方法，并用近世代数观点深化有关概念与理论，从而获得问题的解决，以便提高抽象思维能力，论证推理能力及计算技能.

本书既是一本高等代数问题集锦，又是一部高等代数方法汇编. 全书共 9 章，各章均由基础知识、基础理论、基本方法、问题的研究与探讨、习题和习题解答或提示六部分组成，其中问题的研究与探讨是全书内容的核心. 例题具有典型性，有一定深度与难度，特别在每一例题之后大多都提出一系列问题，促使读者进行合情推理，培养发散型思维，训练数学解题思路，提高论证推理能力.

由于作者水平所限，书中疏漏之处在所难免，恳请读者批评指正.

# 目　录

# 第 1 章

# 基本概念

本章讲述的是全书经常要用到的一些基本概念，将主要介绍集合与映射、数环与数域、整数的整除性质、等价关系等基本概念. 通过本章的学习，将对高等代数常用的方法有初步了解，为下面的学习奠定基础.

## 1.1　基础知识

在数学中，经常讨论的不是孤立的个体，也不是包罗万象的宇宙，而往往是对具有某些特性之个体的联合体进行研讨，这样就产生了集合的概念. 这是数学上一个不定义的原始概念，通常是用各种同义语来解释. 一般地，集合这个概念可以描述为：

**定义 1**　若干个(有限个或无限多个)确定事物的全体称为一个"集合"，或简称为"集".

通常用大写的拉丁字母 $A$、$B$、$C$ 来表示集合，用小写的拉丁字母 $a$、$b$、$c$…来表示集合中的元素.

把不含有任何元素的集合称为"空集"，记为$\varnothing$.

**定义 2**　一个集合若仅含有有限个元素，则称该集合为有限集；若集合含有无限多个元素，则称该集合为无限集.

特别地，空集是有限集. 通常用符号$|A|$表示有限集 $A$ 中元素的个数，或无限集 $A$ 的势.

**定义 3**　集合的相等：如果集合 $A$ 与集合 $B$ 含有完全相同的

元素，那么就称集 $A$ 与集 $B$ 相等，记为 $A=B$.

**定义 4** 如果集合 $B$ 的每个元素都属于集合 $A$，那么称 $B$ 为 $A$ 的子集，记为 $B\subseteq A$（或 $A\supseteq B$）.

如果集合 $B$ 是 $A$ 的子集，且 $B\neq A$，则称 $B$ 为 $A$ 的真子集，记为 $B\subset A$（或 $A\supset B$）.

空集“$\varnothing$”被认为是任意集合的子集，对于任意集 $A$，总有 $\varnothing\subseteq A$ · $A\subseteq A$ 并称其为 $A$ 的平凡子集；$A$ 的其他子集称为 $A$ 的真子集.

**定义 5** 设 $A$ 是一个给定的集合，由 $A$ 的所有子集组成的集合称为 $A$ 的幂集（power set），用符号 $2^A$ 表示.

**定义 6** 设 $A$、$B$ 是两个集合，由一切有序对 $(a,b)$，其中 $a\in A$，，$b\in B$ 组成的集合，称为 $A$ 与 $B$ 的乘积. 记为 $A\times B$，即

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,\ b\in B\}$$

并且规定，$(a_1,b_1)=(a_2,b_2)\Leftrightarrow a_1=a_2,b_1=b_2$.

**定义 7** 设 $A$、$B$ 是两个给定的集合，若存在一个 $A$ 到 $B$ 的对应关系 $f$，使得对 $A$ 中的每一个元素 $x$，都有 $B$ 中惟一确定的一个元素 $y$ 与之对应，则称 $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的一个映射，记作：$y=f(x)$.

$y$ 称为 $x$ 的象（image），$x$ 称为 $y$ 的原像（inverse image），$A$ 称为 $f$ 的定义域（domain），$B$ 称为 $f$ 的值域（codomain）.

**定义 8** 设 $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的一个映射，称 $f(A)=\{f(x)\mid\forall x\in A\}$ 为 $A$ 在 $f$ 下的象集（也记为 $\mathrm{Im}f$），显然 $f(A)$ 是 $B$ 的子集；

称 $f^{-1}(B)=\{x\in A\mid f(x)\in B\}$ 为 $B$ 在 $f$ 下的完全原象集，简称原象集. 显然 $f^{-1}(B)$ 是 $A$ 的子集.

**定义 9** 设 $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的一个映射，如果 $f(A)=B$，则称 $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的满射（surjection）.

**定义 10** 设 $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的一个映射，$\forall x_1,x_2\in A$ 且 $x_1\neq x_2$，则 $f(x_1)\neq f(x_2)$，称 $f$ 是 $A$ 到 $B$ 一个单射（injection）.

**定义 11** 如果 $f$ 是满射又是单射，则称 $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的一一

映射(bijection,或称为双射).

**定义 12**　设 $A,B,C$ 为集合,有两个映射:$f:A\to B$,$g:B\to C$,则由 $f,g$ 可确定一个 $A$ 到 $C$ 的映射 $h:h(x)=g(f(x))$,$\forall x\in A$,称 $h$ 是 $f$ 与 $g$ 的复合(或合成)(composite),记作:$h=g\cdot f$.

**定义 13**　设 $A,B$ 是两个任意集,若规定一种规则 $R$,对于 $\forall a\in A$ 与 $b\in B$,均可以确定 $a$ 和 $b$ 是否适合这个规则,若适合这个规则,就说 $a$ 和 $b$ 有关系 $R$,记作 $aRb$,否则记作 $aR'b$.

**定义 14**　设 $R$ 是集 $A$ 上的二元关系,如果 $R$ 具有下述性质:

1)反身性:$aRa$,对于 $\forall a\in A$;

2)对称性:如果 $aRb$,那么 $bRa$;

3)传递性:如果 $aRb$ 且 $bRc$,则 $aRc$. 则称 $R$ 是 $A$ 上的一个等价关系. 通常用符号"～"表示等价关系. 当 $a\sim b$ 时,就说 $a$ 与 $b$ 是等价的.

**定义 15**　设 $A$ 是任一非空集合,$A_i(i\in I)$ 为 $A$ 的非空子集组成的以 $I$ 为指标集的集合,$\sum=\{A_i\mid A_i\subseteq A,A_i\neq\varnothing,i\in I\}$,如果具有条件:

1)$\bigcup\limits_{i\in I}=A$;

2)$\forall i,j\in I$,若 $i\neq j$,则 $A_i\cap A_j=\varnothing$.

那么称$\{A_i\mid i\in I\}$是集合 $A$ 的一个分类. 每个 $A_i$ 称为 $A$ 的一个类.

**定义 16**　设"～"是 $A$ 上的等价关系,由"～"确定的一切等价类组成的集合,称为 $A$ 关于等价关系"～"的商集,记为 $A/\sim$.

**定义 17**　非空数集 $R$,对数的"+""－""×"封闭,即

$\forall a,b\in R,a+b\in R,a-b\in R,a\times b\in R$,则称 $R$ 是一个数环.

**定义 18**　至少含两个元的数环 $F$,对数的"÷"封闭,即

$\forall a,0\neq b\in F,a\div b(\frac{a}{b})\in F$,则称 $F$ 是一个数域.

## 1.2 基础理论

1. 集合的运算

设 $I$ 是一个集合，$A$、$B$、$C$ 都是 $I$ 的子集.

1)由一切属于 $A$ 或者属于 $B$ 的元素组成的集合称为 $A$ 与 $B$ 的并集，记为 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$.

2)由 $A$ 与 $B$ 的公共元组成的集合称为 $A$ 与 $B$ 的交集，记为 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$.

3)由一切属于 $A$ 但不属于 $B$ 的元素组成的集合称为 $A$ 与 $B$ 的差集，记为 $A-B$，即 $A-B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$.

4)由一切不属于 $A$(但属于 $I$)的元素组成的集合称为 $A$ 的余集，记为 $A'$，即 $A'=I-A$.

2. 集合运算满足以下运算规律

1)$A\cup A=A\cap A=A$.　　（幂等律）

2)$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$.　　（交换律）

3)$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；
$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.　　（结合律）

4)$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.　　（分配律）

5)$A\cap(A\cup B)=A\cup(A\cap B)=A$.　　（吸收律）

6)若 $A\subseteq C$，则 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap C$.　　（模律）

7)$(A\cup B)'=A'\cap B'$，$(A\cap B)'=A'\cup B'$.　　（摩根律）

8)$(A')'=A$.　　（对合律）

这些运算与运算规律可推广到多个子集的情形.

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 $n$ 个任意集合，它们的并集记为 $\cup A_i$，定义为：

$$\cup A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\{x\mid x\in A_i\text{，对于某一个 } i\}$$

这 $n$ 个集合的交集记为 $\bigcap A_i$，定义为：

$$\bigcap A_i = A_1 \bigcap A_2 \bigcap \cdots \bigcap A_n = \{x \mid x \in A_i, i=1, 2\cdots n\}.$$

集合的并、交、差、补这几种运算还可以用所谓的文氏图来形象地表示，以下图中的矩形表示一个确定的集合 $I$，圆代表 $I$ 的一些子集 $A$、$B$、$C$ 等等，在每一个图中所画阴影部分的含义写在图的下方.

3. 设有映射 $f:A\rightarrow B, g:B\rightarrow C, h:C\rightarrow D$，则有：

1) $h(gf)=(hg)f$；

2) $I_B f = f, I_A = f$.

4. 设 $f:A\rightarrow B$，则

1) $f$ 有左逆的充分必要条件为 $f$ 是单射；

2) $f$ 有右逆的充分必要条件为 $f$ 是满射；

3) $f$ 可逆的充分必要条件为 $f$ 是双射.

5. 关于逆映射有以下性质

1) $(f^{-1})^{-1}=f$；

2) 若 $f$ 是 $A\rightarrow B$ 的可逆映射，$g$ 是 $B\rightarrow C$ 的可逆映射，则 $gf$ 是 $A\rightarrow C$ 的可逆映射，且有 $(gf)^{-1}=f^{-1}g^{-1}$.

当 $A$ 是有限集时，$A$ 上的一个变换 $f$ 可逆的充分必要条件是 $f$ 是单射. 这是因为当且是有限集时，$f$ 是单射，意味着必是满射.

反之，只要 $f$ 是 $A$ 上的满射，则 $f$ 也是单射.

6. 非空集合 $A$ 中的任一等价关系都能确定 $A$ 的一个分类；反之 $A$ 的每一个分类也都能决定 $A$ 的一个等价关系.

7. 最小数原理

正整数集 $\mathbf{N}^*$ 的任意一个非空子集 $S$ 必含有一个最小数.

8. 整数的整除性质

1) $a|b, b|c$，则 $a|c$；

2) $a|b, a|c$，则 $a|(b+c)$；

3) $a|b, \forall c\in \mathbf{Z}$，则 $a|bc$；