

高等代数概论

陈辉 著

GAOJINGDASHUGAILUN



杭州出版社

HANGZHOU PUBLISHING HOUSE

● 杭州市重点学科经费资助

高等代数概论

陈 辉 著

杭州出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等代数概论 / 陈辉 著. —杭州: 杭州出版社,
2006. 11
ISBN 7-80633-922-1

I. 高... II. 陈... III. 高等代数-概论
IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 131667 号

责任编辑 应伯根

封面设计 祁睿一

出版发行 杭州出版社

(杭州市曙光路 133 号 邮政编码 310007)

(E-mail: hzcbs306@hotmail.com)

排 版 浙江大学出版社电脑排版中心

印 刷 浙江省邮电印刷厂

开 本 880mm×1230mm 1/32

印 张 13.25

字 数 332 千字

版 印 次 2006 年 11 月第 1 版 2006 年 11 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 7-80633-922-1/O · 13

定 价 28.00 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换
杭州出版社发行部邮购电话 (0571)87997719

内 容 简 介

高等代数是近代数学的一门重要基础课. 随着科学的发展和实际应用的需要, 高等代数的内容和方法都在不断地扩充和提高, 为了适应新的形势, 满足广大读者, 特别是研究生报考者的需求, 现把多年的积累编成此书.

本书既是一本高等代数问题集锦, 又是一部高等代数方法汇编, 它是以收集、整理近年来全国高校硕士研究生入学试题为主要题材, 有选择地进行归纳分类. 通过对问题的研究, 阐述各种方法与技巧, 将知识、问题与方法融于一体, 是教材改革与建设的一次尝试.

本书不仅是大学数学系选修课的必备教材, 而且是报考理、工科研究生的广大读者的复习指南. 同时, 本书还可做为高校相关专业教师的教学参考书.

序

高等代数是高等学校理、工科和经济学科有关专业的一门重要基础课. 它不但是其他数学课程的基础, 也是物理、力学、电路等课程的基础. 另外, 由于电子计算机的飞速发展和广泛应用, 使得许多实际问题可以通过离散化的数值计算得到定量的解决, 于是作为处理离散问题的代数理论, 无疑是科学研究人员和科学技术人员必备的数学基础.

由于高等代数的理论比较严谨, 概念比较抽象, 所以初学者感到非常困难. 其实学习高等代数的困难之处并不在于它的内容有多么艰深, 主要在于初学者不习惯于牢固地掌握概念, 并从概念出发, 通过逻辑推理进行了论证的这套抽象的代数方法.

作者根据多年的教学经验, 对本门课程的内容分门别类, 进行了归纳整理, 精心挑选了大量的例题和问题, 帮助读者能较熟练地掌握代数的基本概念和方法, 而且通过对大量有代表性的典型例题的分析和研究, 揭示了高等代数的解题方法与技巧. 在此基础上进一步引导读者提出猜想, 进行探索. 将知识、问题与方法融于一体.

相信本书对培养读者良好的数学思维, 掌握数学的基本思想, 提高解题能力及研究生入学应试等方面将起到推动作用.

于秀源

2006 年 10 月于杭州

前 言

随着科学的发展和实际应用的需要,高等代数的内容和方法都在不断地扩充和提高,特别是由于电子计算机的飞速发展和广泛应用,使许多实际问题可以通过离散化的数值计算得到定量的解决,这些都离不开代数理论.

高等代数是近代数学的一门重要基础课. 不仅课程内容多、难度大,又很抽象,而且具有一套特有的理论体系、思维方法及解题技巧. 但只要掌握了该门课程自身的规律,应用起来就会得心应手,而要想掌握规律,只有靠进行大量的有指导的练习才能达到目的.

为了适应新的形势,满足广大读者,特别是研究生报考者的需求,作者根据多年教学经验和积累编成此书. 对本门课程的内容分门别类,按知识点归纳为一些专题,通过对大量有代表性的典型例题的研究和探讨,揭示了高等代数的解题方法与技巧,书中引入了大量新颖的题目,包括研究生入学考试的典型试题,国内外线性代数研究的新成果等.

本书的宗旨是在学完“近世代数”的基础上,对高等代数的基本概念、理论、方法及问题,进行系统归纳与总结,通过典型例题与问题分析解题思路与技巧,揭示方法,并用近世代数观点深化有关概念与理论,从而获得问题的解决,以便提高抽象思维能力,论证推理能力及计算技能.

本书既是一本高等代数问题集锦,又是一部高等代数方法汇编.全书共9章,各章均由基础知识、基础理论、基本方法、问题的研究与探讨、习题和习题解答或提示六部分组成,其中问题的研究与探讨是全书内容的核心.例题具有典型性,有一定深度与难度,特别在每一例题之后大多都提出一系列问题,促使读者进行合情推理,培养发散型思维,训练数学解题思路,提高论证推理能力.

由于作者水平所限,书中疏漏之处在所难免,恳请读者批评指正.

目 录

第 1 章 基本概念	1
1.1 基础知识	1
1.2 基础理论	4
1.3 基本方法	6
1.4 问题的研究与探讨	7
1.5 习 题	14
1.6 习题解答或提示	16
第 2 章 多项式理论	19
2.1 基础知识	19
2.2 基础理论	22
2.3 基本方法	27
2.4 问题的研究与探讨	30
2.4.1 多项式相等的问题	30
2.4.2 多项式的整除性质	33
2.4.3 多项式的最大公因式	38
2.4.4 不可约多项式	43
2.4.5 多项式的重因式与重根	49
2.5 习 题	56

2.6 习题解答或提示	61
第3章 行列式式的计算	66
3.1 基础知识	66
3.2 基础理论	68
3.3 基本方法	71
3.4 问题的研究与探讨	74
3.4.1 利用行列式的定义	74
3.4.2 利用行列式的性质	75
3.4.3 化为箭形行列式	76
3.4.4 递推法	77
3.4.5 归纳法	81
3.4.6 降阶法	83
3.4.7 升阶法	84
3.4.8 分解之和法	85
3.4.9 分解之积法	86
3.4.10 换元法	87
3.4.11 应用典型行列式法	88
3.4.12 利用 n 阶循环行列式	89
3.5 习 题	91
3.6 习题解答或提示	98
第4章 线性方程组理论	103
4.1 基础知识	103
4.2 基础理论	106
4.3 基本方法	109
4.4 问题的研究与探讨	112

4.4.1	关于矩阵的秩	112
4.4.2	向量的线性相关性	114
4.4.3	矩阵的秩与向量的线性相关性	118
4.4.4	线性方程组有解的判别	120
4.4.5	矩阵秩的关系式	122
4.4.6	矩阵方程	126
4.5	习 题	133
4.7	习题解答或提示	138
第 5 章	矩阵理论	146
5.1	基础知识	146
5.2	基础理论	154
5.3	基本方法	158
5.4	问题的研究与探讨	159
5.4.1	矩阵分解之和的问题	159
5.4.2	矩阵分解之积的问题	162
5.4.3	矩阵的特征根	169
5.4.4	方阵高次幂的计算	174
5.4.5	可逆矩阵	178
5.4.6	广义初等变换的应用	185
5.4.7	矩阵各种标准形的应用	187
5.5	习 题	190
5.6	习题解答或提示	194
第 6 章	向量空间	207
6.1	基础知识	207
6.2	基础理论	210

6.3	基本方法	212
6.4	问题的研究与探讨	214
6.4.1	向量空间和子空间	214
6.4.2	向量空间的基和维数	218
6.4.3	有关过渡阵的问题	221
6.4.4	与线性方程组有关的问题	224
6.4.5	子空间的直和分解	228
6.4.6	向量空间的同构	233
6.5	习 题	236
6.6	习题解答或提示	240
第 7 章	线性变换	247
7.1	基础知识	247
7.2	基础理论	249
7.3	基本方法	252
7.4	问题的研究与探讨	255
7.4.1	线性变换的运算	255
7.4.2	线性变换的结构	258
7.4.3	子空间的维数与直和	264
7.4.4	不变子空间	269
7.4.5	特征根与特征向量	275
7.4.6	线性变换可对角化问题	283
7.5	习 题	292
7.6	习题解答或提示	297
第 8 章	欧氏空间与酉空间	309
8.1	基础知识	309

8.2 基础理论	311
8.3 基本方法	313
8.4 问题的研究与探讨	317
8.4.1 内积与度量矩阵	317
8.4.2 正交变换	324
8.4.3 对称变换	330
8.4.4 正交补空间	335
8.4.5 欧氏空间的同构	337
8.4.6 酉空间	340
8.5 习 题	344
8.6 习题解答或提示	348
第 9 章 双线性函数与二次型	358
9.1 基础知识	358
9.2 基础理论	361
9.3 基本方法	364
9.4 问题的研究与探讨	365
9.4.1 线性函数	365
9.4.2 双线性函数	368
9.4.3 二次型与矩阵合同	372
9.4.4 正定二次型	376
9.4.5 实二次型的进一步讨论	384
9.5 习 题	389
9.6 习题解答或提示	392
附 录 矩阵初等变换的应用	405
参考书目	410

第1章

基本概念

本章讲述的是全书经常要用到的一些基本概念,将主要介绍集合与映射、数环与数域、整数的整除性质、等价关系等基本概念.通过本章的学习,将对高等代数常用的方法有初步了解,为下面的学习奠定基础.

1.1 基础知识

在数学中,经常讨论的不是孤立的个体,也不是包罗万象的宇宙,而往往是对具有某些特性之个体的联合体进行研讨,这样就产生了集合的概念.这是数学上一个不定义的原始概念,通常是用各种同义语来解释.一般地,集合这个概念可以描述为:

定义1 若干个(有限个或无限多个)确定事物的全体称为一个“集合”,或简称为“集”.

通常用大写的拉丁字母 A, B, C 来表示集合,用小写的拉丁字母 $a, b, c, \dots$ 来表示集合中的元素.

把不含有任何元素的集合称为“空集”,记为 $\emptyset$.

定义2 一个集合若仅含有有限个元素,则称该集合为有限集;若集合含有无限多个元素,则称该集合为无限集.

特别地,空集是有限集.通常用符号 $|A|$ 表示有限集 A 中元素的个数,或无限集 A 的势.

定义3 集合的相等:如果集合 A 与集合 B 含有完全相同的

元素,那么就称集 A 与集 B 相等,记为 $A=B$.

定义 4 如果集合 B 的每个元素都属于集合 A ,那么称 B 为 A 的子集,记为 $B \subseteq A$ (或 $A \supseteq B$).

如果集合 B 是 A 的子集,且 $B \neq A$,则称 B 为 A 的真子集,记为 $B \subset A$ (或 $A \supset B$).

空集“ $\emptyset$ ”被认为是任意集合的子集,对于任意集 A ,总有 $\emptyset \subseteq A$. $A \subseteq A$ 并称其为 A 的平凡子集; A 的其他子集称为 A 的真子集.

定义 5 设 A 是一个给定的集合,由 A 的所有子集组成的集合称为 A 的幂集(power set),用符号 2^A 表示.

定义 6 设 A, B 是两个集合,由一切有序对 (a, b) , 其中 $a \in A, b \in B$ 组成的集合,称为 A 与 B 的乘积. 记为 $A \times B$, 即

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

并且规定, $(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$.

定义 7 设 A, B 是两个给定的集合,若存在一个 A 到 B 的对应关系 f ,使得对 A 中的每一个元素 x ,都有 B 中惟一确定的一个元素 y 与之对应,则称 f 是 A 到 B 的一个映射,记作: $y = f(x)$.

y 称为 x 的象(image), x 称为 y 的原像(inverse image), A 称为 f 的定义域(domain), B 称为 f 的值域(codomain).

定义 8 设 f 是 A 到 B 的一个映射,称 $f(A) = \{f(x) | \forall x \in A\}$ 为 A 在 f 下的象集(也记为 $\text{Im}f$),显然 $f(A)$ 是 B 的子集;

称 $f^{-1}(B) = \{x \in A | f(x) \in B\}$ 为 B 在 f 下的完全原象集,简称原象集. 显然 $f^{-1}(B)$ 是 A 的子集.

定义 9 设 f 是 A 到 B 的一个映射,如果 $f(A) = B$,则称 f 是 A 到 B 的满射(surjection).

定义 10 设 f 是 A 到 B 的一个映射, $\forall x_1, x_2 \in A$ 且 $x_1 \neq x_2$, 则 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 称 f 是 A 到 B 一个单射(injection).

定义 11 如果 f 是满射又是单射,则称 f 是 A 到 B 的一一

映射(bijection,或称为双射).

定义 12 设 A, B, C 为集合, 有两个映射: $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$, 则由 f, g 可确定一个 A 到 C 的映射 $h: h(x) = g(f(x)), \forall x \in A$, 称 h 是 f 与 g 的复合(或合成)(composite), 记作: $h = g \circ f$.

定义 13 设 A, B 是两个任意集, 若规定一种规则 R , 对于 $\forall a \in A$ 与 $b \in B$, 均可以确定 a 和 b 是否适合这个规则, 若适合这个规则, 就说 a 和 b 有关系 R , 记作 aRb , 否则记作 $aR'b$.

定义 14 设 R 是集 A 上的二元关系, 如果 R 具有下述性质:

- 1) 反身性: aRa , 对于 $\forall a \in A$;
- 2) 对称性: 如果 aRb , 那么 bRa ;
- 3) 传递性: 如果 aRb 且 bRc , 则 aRc . 则称 R 是 A 上的一个等价关系. 通常用符号“ $\sim$ ”表示等价关系. 当 $a \sim b$ 时, 就说 a 与 b 是等价的.

定义 15 设 A 是任一非空集合, $A_i (i \in I)$ 为 A 的非空子集组成的以 I 为指标集的集合, $\sum = \{A_i | A_i \subseteq A, A_i \neq \emptyset, i \in I\}$, 如果具有条件:

- 1) $\bigcup_{i \in I} A_i = A$;
- 2) $\forall i, j \in I$, 若 $i \neq j$, 则 $A_i \cap A_j = \emptyset$.

那么称 $\{A_i | i \in I\}$ 是集合 A 的一个分类. 每个 A_i 称为 A 的一个类.

定义 16 设“ $\sim$ ”是 A 上的等价关系, 由“ $\sim$ ”确定的一切等价类组成的集合, 称为 A 关于等价关系“ $\sim$ ”的商集, 记为 $A/\sim$.

定义 17 非空数集 R , 对数的“+”“-”“ $\times$ ”封闭, 即 $\forall a, b \in R, a+b \in R, a-b \in R, a \times b \in R$, 则称 R 是一个数环.

定义 18 至少含两个元的数环 F , 对数的“ $\div$ ”封闭, 即 $\forall a, 0 \neq b \in F, a \div b (\frac{a}{b}) \in F$, 则称 F 是一个数域.

1.2 基础理论

1. 集合的运算

设 I 是一个集合, A, B, C 都是 I 的子集.

1) 由一切属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的并集, 记为 $A \cup B$, 即 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.

2) 由 A 与 B 的公共元组成的集合称为 A 与 B 的交集, 记为 $A \cap B$, 即 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$.

3) 由一切属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的差集, 记为 $A - B$, 即 $A - B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$.

4) 由一切不属于 A (但属于 I) 的元素组成的集合称为 A 的余集, 记为 A' , 即 $A' = I - A$.

2. 集合运算满足以下运算规律

$$1) A \cup A = A \cap A = A. \quad (\text{幂等律})$$

$$2) A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A. \quad (\text{交换律})$$

$$3) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C;$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C. \quad (\text{结合律})$$

$$4) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \quad (\text{分配律})$$

$$5) A \cap (A \cup B) = A \cup (A \cap B) = A. \quad (\text{吸收律})$$

$$6) \text{若 } A \subseteq C, \text{ 则 } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C. \quad (\text{模律})$$

$$7) (A \cup B)' = A' \cap B', (A \cap B)' = A' \cup B'. \quad (\text{摩根律})$$

$$8) (A')' = A. \quad (\text{对合律})$$

这些运算与运算规律可推广到多个子集的情形.

设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是 n 个任意集合, 它们的并集记为 $\bigcup A_i$, 定义为:

$$\bigcup A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{x | x \in A_i, \text{ 对于某一个 } i\}$$

这 n 个集合的交集记为 $\cap A_i$, 定义为:

$$\cap A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{x | x \in A_i, i=1, 2, \cdots, n\}.$$

集合的并、交、差、补这几种运算还可以用所谓的文氏图来形象地表示, 以下图中的矩形表示一个确定的集合 I , 圆代表 I 的一些子集 A 、 B 、 C 等等, 在每一个图中所画阴影部分的含义写在图的下方.

3. 设有映射 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C, h: C \rightarrow D$, 则有:

$$1) h(gf) = (hg)f;$$

$$2) I_B f = f, I_A = f.$$

4. 设 $f: A \rightarrow B$, 则

1) f 有左逆的充分必要条件为 f 是单射;

2) f 有右逆的充分必要条件为 f 是满射;

3) f 可逆的充分必要条件为 f 是双射.

5. 关于逆映射有以下性质

$$1) (f^{-1})^{-1} = f;$$

2) 若 f 是 $A \rightarrow B$ 的可逆映射, g 是 $B \rightarrow C$ 的可逆映射, 则 gf 是 $A \rightarrow C$ 的可逆映射, 且有 $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$.

当 A 是有限集时, A 上的一个变换 f 可逆的充分必要条件是 f 是单射. 这是因为当 A 是有限集时, f 是单射, 意味着必是满射.

反之, 只要 f 是 A 上的满射, 则 f 也是单射.

6. 非空集合 A 中的任一等价关系都能确定 A 的一个分类; 反之 A 的每一个分类也都能决定 A 的一个等价关系.

7. 最小数原理

正整数集 $\mathbf{N}^+$ 的任意一个非空子集 S 必含有一个最小数.

8. 整数的整除性质

$$1) a|b, b|c, \text{ 则 } a|c;$$

$$2) a|b, a|c, \text{ 则 } a|(b+c);$$

$$3) a|b, \forall c \in \mathbf{Z}, \text{ 则 } a|bc;$$