



普通高等教育“十一五”国家级规划教材



新世纪高等学校教材

数学及应用数学专业主干课程系列教材

严士健 刘秀芳 编著

北京师范大学数学科学学院 组编

测度与概率

第二版

CE DU
YU
GAILÜ



$$\mu\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$



北京师范大学出版社
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

0174.12

11

2003

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

新世纪高等学校教材

数学及应用数学专业主干课程系列教材

测 度 与 概 率

第二版

C E D U Y U G A I L Ü

严士健 刘秀芳 编著

北京师范大学出版社

BEIJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

北京

内 容 简 介

本书论述测度论和以测度为基础的概率论的基本知识和方法,包括集及其势、距离空间、测度与概率、可测函数与随机变量、积分与数学期望、乘积测度与独立、Radon-Nikodym 定理与条件期望、概率极限理论等. 本书的特点是读者不必学习实变函数论而学习测度论;测度论与概率论的基本内容紧密结合而更有利于理解二者的关系及其实质;在本书的基本目标下,尽可能使内容现代化;本书文字通畅、条理清楚、论述严谨、便于学习;每节后都配有较多的不同要求的习题,以便加深对内容的理解和掌握.

本书可以作为有关专业的高年级学生或研究生的测度论(或实变函数论)、概率论或两者的教材或参考书,也可供有关教师和科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

测度与概率/严士健,刘秀芳著.-北京:北京师范大学出版社,
1994.11
ISBN 7-303-03790-X

I. 测... II. ①严...②刘... III. ①测度论-基本知识 ②概率论-基本知识 IV. ①O174.12 ②O211.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(94)第 15129 号

北京师范大学出版社出版发行
(北京新街口外大街 19 号 邮政编码:100875)

<http://www.bnup.com.cn>

出版人:赖德胜

北京新丰印刷厂印刷 全国新华书店经销

开本:170 mm×230 mm 印张:19.25 字数:340 千字

2003 年 4 月第 2 版 2006 年 9 月第 2 次印刷

印数:3 001~6 000 册 定价:27.00 元

第一版编者的话

这是一本为统计与概率专业而写作的教材. 考察概率论与数理统计发展过程, 测度论不但已经成为概率论(特别是随机过程论)的基础, 而且对于数理统计来说, 很多基本概念和问题, 离开了测度论很难说清楚. 这与 30 年前的情况大不相同, 从发展看, 这种依赖测度论的趋势将在未来的世纪中大大加强. 因此, 我们认为在统计与概率专业中应该学习以测度论为基础的概率论基础. 为此只学经典的实变函数论是不够的, 需要学习测度论. 而在讲授测度论时, 如果充分以经典的“长度”和概率概念为背景, 是可以不必先修实变函数论的. 本书就是在这种认识下编写的, 其目的是希望它能够作为在不先修实变函数论的条件下, 学习测度论基础和以测度论为基础的概率论的教材. 所以我们在测度论的内容之前, 编写了集合、势以及距离空间等内容.

介绍距离空间, 更重要的是由于现代概率论以及某些数理统计的题材更适宜于以距离可测空间上的概率测度为框架. 介绍这方面的必要知识, 可以使测度和概率的一些性质在距离空间的基础上讲授, 以使学生具有更广泛的基础, 便于以后的学习和应用. 当然, 如果学生在学习本书之前, 已经学习过距离空间的知识, 自然就可以越过这一段或作简单的复习. 这种想法来自一个更广泛的考虑, 即教材要适应学生的水平, 同时也应该适应学科的现代发展. 本书除了将测度与概率尽量建立在距离空间的框架上外, 对于有关的题材也向这方面作了一些努力. 例如, 在书中介绍了 Hausdorff 维数的概念; 证明了完备可分距离空间的无穷维乘积空间上的 Колмогоров 相容性定理等.

实际情况告诉我们: 测度论虽然是概率论理论的必要基础, 但是有时出现了前者而不能很好地应用于后者的情况. 因此我们认为在统计与概率专业的教学中, 将二者结合讲授是适宜的. 这种看法也许得到概率统计的许多同行的赞同, 因为我们和王隽骧教授合著的《概率论基础》[YWL]^①曾经得到广泛的传播. 本书仍然按照这种观点设计. 但是上述著作有其不便之处, 例如费了很多篇

① [YWL]表示参考文献中作者姓氏(或姓氏拼音)的字头.

幅讲解多维分布的情形,作为参考材料可以,作为教材则一些技术细节容易分散学生理解方法的实质的努力.因此本书在分布函数决定测度、L-S积分、特征函数等题材上,讲解一维情形,但注意方法的一般性.希望能收到举一反三的效果.

本书虽然是为统计与概率专业而写,但是如果只采用第一至第五章以及第六、七、八章的前一部分,也可作为其他专业的测度论或实变函数论课的教材或参考书.将有关概率的一些概念作为一般测度的具体例子,也许对学生理解测度论的作用有帮助,而且还可以扩大学生的知识面.

本书先后在北京师范大学数学系的统计与概率专业试用四次.栗演兵和张余辉两位先后帮助整理了部分笔记,录入软盘,指出错误,对此我们表示深深的感谢.我们还要感谢那些对讲课提出意见的同学,他们的意见使得本书有可能更加适用;感谢潘淑琴、何青和韩丽娟对编辑工作的指导.最后我们要特别提出,没有北京师范大学原自然科学处、出版委员会和出版社的支持和慷慨资助,本书将难以出版.对此我们表示衷心地感谢!

作 者

1994年11月于

北京师范大学数学系

第二版前言

1915年北京高等师范学校成立数理部,1922年成立数学系.2005年适逢数理部诞辰90周年,也是北京师范大学数学科学学院建院1周年.经过90年的风风雨雨,数学科学学院在学科建设、人才培养和教学实践中积累了丰富的经验.将这些经验落实并贯彻到教材编著中去是大有益处的.

1980年,北京师范大学出版社成立,给教材的出版提供了一个很好的契机.我院教师编著的数十种教材已先后在这里出版.除了北京师范大学现代数学丛书外,就大学教材而言,共有五种版本.第一种是列出编委会的高等学校教学用书,这是在20世纪80年代初期,由北京师范大学出版社王文湧先生约请北京师范大学数学与数学教育研究所所长严士健教授等组成编委会,研究编写出版一套数学系本科生教材和非数学专业高等数学教材.在出版社的大力支持下,这一计划完全实现,满足了当时教学的需要.第二种是标注高等学校教学用书,但未列编委会的教材.第三种是(北京师范大学)面向21世纪课程教材.第四种是北京师范大学现代数学课程教材.第五种是未标注高等学校教学用书,但实际上是高等学校教学用书.在这些教材中,除再次印刷外,已经有五部教材进行了修订或出版了第二版.

前一段时间,王建华老师和王琦老师分别搜集了我院本科生的所有教材和研究生12门基础课教材的使用情况,李仲来教授汇总了我院教师在北京师范大学出版社出版的全部著作,由李仲来教授和北京师范大学出版社理科编辑部王松浦主任进行了沟通和协商,准备对数学科学学院教师目前使用或眷印(出版社已经没有存书的教材)的北京师范大学出版社出版的部分教材进行修订后再版.计划用几年时间,出版数学和应用数学、数学教育、数学学科硕士研究生三个系列的主要课程教材.

本套教材可供高等院校本科生、教育学院数学系、函授(数学专业)和在职中学教师等使用和参考.

北京师范大学数学科学学院

2005年8月8日

第二版编者的话

本书自 1994 年正式出版以后,北京师范大学数学系及概率统计系一直以它作为本科生教材,还有不少兄弟院校使用它作为教材和主要参考书.一些同行指出了本书的一些印刷错误,并提出一些修改意见.特别是北京师范大学数学科学学院张余辉在多年教学的基础上提供了全面的修改意见,本书在此次修订中充分地采纳了这些意见.吕建生同志对本书在体例和内容上都做了很多工作,特此表示感谢.

作 者

2003 年 2 月于

北京师范大学数学系

目 录

第一章 集合、映射与势	(1)
§ 1.1 集合及其运算	(1)
习题 1.1	(5)
§ 1.2 映射与势	(6)
习题 1.2	(9)
§ 1.3 可数集	(10)
习题 1.3	(13)
§ 1.4 不可数集	(14)
习题 1.4	(16)
第二章 距离空间	(17)
§ 2.1 定义及例	(17)
习题 2.1	(21)
§ 2.2 开集、闭集	(23)
习题 2.2	(27)
§ 2.3 完备性	(28)
习题 2.3	(32)
§ 2.4 可分性、列紧性与紧性	(34)
习题 2.4	(40)
§ 2.5 距离空间上的映射与函数	(42)
习题 2.5	(45)
第三章 测度空间与概率空间	(46)
§ 3.1 集类	(46)
习题 3.1	(52)
§ 3.2 单调函数与测度的构造	(54)
习题 3.2	(68)
§ 3.3 测度空间的一些性质	(72)

习题 3.3	(78)
第四章 可测函数与随机变量	(79)
§ 4.1 可测函数与分布	(79)
习题 4.1	(86)
§ 4.2 可测函数的构造性质	(88)
习题 4.2	(93)
第五章 积分与数学期望	(94)
§ 5.1 积分的定义	(94)
习题 5.1	(99)
§ 5.2 积分的性质	(100)
习题 5.2	(106)
§ 5.3 期望的性质及 L-S 积分表示	(107)
习题 5.3	(120)
§ 5.4 积分收敛定理	(123)
习题 5.4	(130)
第六章 乘积测度与无穷乘积概率空间	(131)
§ 6.1 乘积测度与转移测度	(131)
习题 6.1	(144)
§ 6.2 Fubini 定理及其应用	(147)
习题 6.2	(153)
§ 6.3 无穷维乘积概率	(154)
习题 6.3	(165)
第七章 不定积分与条件期望	(166)
§ 7.1 符号测度的分解	(166)
习题 7.1	(172)
§ 7.2 Lebesgue 分解定理与 Radon-Nikodym 定理	(174)
习题 7.2	(182)
§ 7.3 条件期望的概念	(184)
习题 7.3	(189)
§ 7.4 条件期望的性质	(190)
习题 7.4	(193)
§ 7.5 条件概率分布	(194)
习题 7.5	(203)

第八章 收敛概念	(204)
§ 8.1 几乎处处收敛	(204)
习题 8.1	(210)
§ 8.2 依测度收敛	(211)
习题 8.2	(215)
§ 8.3 L^r 收敛	(216)
习题 8.3	(223)
§ 8.4 条件期望的进一步性质	(224)
§ 8.5 概率测度的收敛	(228)
习题 8.5	(235)
§ 8.6 几个收敛之间的关系的注记	(236)
第九章 大数定律、随机级数	(237)
§ 9.1 简单的极限定理及其应用	(237)
习题 9.1	(243)
§ 9.2 弱大数定律	(244)
习题 9.2	(249)
§ 9.3 随机级数的收敛	(250)
习题 9.3	(256)
§ 9.4 强大数律	(257)
习题 9.4	(260)
§ 9.5 应用	(261)
第十章 特征函数和中心极限定理	(267)
§ 10.1 特征函数的定义及简单性质	(267)
习题 10.1	(272)
§ 10.2 逆转公式及连续性定理	(273)
习题 10.2	(277)
§ 10.3 中心极限定理	(278)
习题 10.3	(287)
参考文献	(288)
名词索引	(291)

第一章 集合、映射与势

§ 1.1 集合及其运算

1.1.1 定义 一个给定的**集合**(或称为**集**),是指具有某种性质的事物的全体.组成集合的每个事物称为该集合的**元素**(或称为**元**).

设 A 是一个集合, a 是 A 的元素,则记作 $a \in A$ (读作“ a 属于 A ”)或 $A \ni a$ (读作“ A 包含 a ”).若 a 不是 A 的元素,则记成 $a \notin A$.

给出集合时,一定要有明确的规则用来判定一个事物是否是它的元素.事实上,这不算是定义,“元素”和“集合”是不定义的名词,还有一个不定义的关系——“属于”.这些是集合论的公理化问题.有些拓扑方面的书都设一附录说明,这里就不再仔细推敲.

一般地,用大写字母 A, B, C, \dots 表示集合,用小写字母 a, b, c, \dots 表示元素,不够用时可加各种足码.

有时用描述法给出集合,即用 $\{\dots; \dots\}$ (或 $\{\dots | \dots\}$)表示集合.括号中“:”(或“|”)号之前表示元的记法,之后表示该集合的元所具有的性质.例如,设 \mathbf{R} 为实数集, $\{x: x \in \mathbf{R}, 1 < |x| \leq 2\}$ 或 $\{x \in \mathbf{R}: 1 < |x| \leq 2\}$ 表示绝对值大于 1 而不超过 2 的全体实数作成的集合.又例如,设 \mathbf{C} 表示复数集, $\{x \in \mathbf{C}: 1 < |x| \leq 2\}$ 表示模大于 1 而不超过 2 的全体复数.

有时,用列举法即用 $\{\dots\}$ 表示集.括号中“ \dots ”列出了该集合的所有元.例如: $\{2, 3, 4, 5, 8\}$ 表示由 2, 3, 4, 5, 8 组成的集合, $\{u, v\}$ 表示由 u, v 组成的集合.

若集合 A 的元只有有限多个,则称 A 为**有限集**,否则称为**无限集**.不含任何元素的集合称为**空集**.例如 $\{x \in \mathbf{R}: |x| < 0\}$, $\{x \in \mathbf{R}: x^2 + 1 = 0\}$ 都是空集.

以下用逻辑符号“ \exists ”表示存在,“ \forall ”表示“对一切”(或“对任何”).自然数集 $\{0, 1, 2, \dots\}$ 通常记为 \mathbf{N} , 如果没有特殊声明,本书中的 \mathbf{N} 表示非零的自然数集.

整数集为 \mathbf{Z} , 非负整数集为 \mathbf{Z}_+ .

1.1.2 定义 设 A, B 是两个集合:

(1) 集合 A 包含集合 B (记作 $B \subset A$ 或 $A \supset B$) 是指对一切 $x \in B$ 必有 $x \in A$.

(2) 集合 A, B 相等 (记作 $A = B$) 是指: $A \subset B$ 且 $B \subset A$.

若 $A \subset B$, 则称 A 为 B 的子集; 若还有 $A \neq B$ (即存在 $y \in B$ 使 $y \notin A$), 则称 A 为 B 的真子集, 记作 $A \subsetneq B$. 约定空集 \emptyset 是任何集合的子集.

关系“ \subset ”具有:

(i) 自反性: 对任何集合 $A \subset A$;

(ii) 传递性: 若 $A \subset B, B \subset C$, 则 $A \subset C$;

(iii) 反对称性: 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则 $A = B$.

(i)(ii)(iii) 表明集类对关系“ \subset ”作成是一个偏序集.

1.1.3 定义 (集合的运算) 为了以后书写方便, 我们采用符号 $A := B$ 表示 A 用 B 定义.

设 A, B 是两个给定的集合, 定义

$A \cup B := \{x: x \in A \text{ 或 } x \in B\}$, 称为 A, B 的并集;

$A \cap B := \{x: x \in A \text{ 且 } x \in B\}$, 称为 A, B 的交集;

$A \setminus B := \{x: x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$, 称为 A, B 的差集,

当 $B \subset A$ 时, $A \setminus B$ 也称为 B 对 A 的余集; 如果只考虑某固定集合 Ω 的子集时, 将 $\Omega \setminus B = \{x \in \Omega: x \notin B\}$ 称为 B 的余集, 记作 B^c .

$A \Delta B := \{x: x \in A \text{ 且 } x \notin B, \text{ 或 } x \in B \text{ 且 } x \notin A\}$, 称为 A, B 的对称差. 实际上, $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha := \{x: \exists \alpha \in I, \text{ 使 } x \in A_\alpha\};$$

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha := \{x: \forall \alpha \in I, \text{ 均有 } x \in A_\alpha\},$$

其中 I 为一指标集.

例 1 若 $A_n := (n, n+1], B_n := (0, n], C_n := (n, n+1), n = 0, 1, 2, \dots$, 则

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = (0, \infty), \quad \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n = (0, \infty), \quad \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n = (0, \infty) \setminus \mathbf{N}.$$

例 2 若 $A_n := \left(0, 1 + \frac{1}{n}\right), B_n := \left(0, 1 - \frac{1}{n}\right), n = 1, 2, 3, \dots$, 则

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = (0, 1], \quad \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n = (0, 1).$$

① 如无特别声明本书“ ∞ ”均指“ $+\infty$ ”.

下列各定理的证明是容易的(请读者作为习题自证).

1.1.4 定理 集合的交、并运算具有下列性质:

$$(1) A \cup A = A, \quad A \cap A = A; \quad (\text{幂等性})$$

$$(2) A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A; \quad (\text{交换律})$$

$$(3) (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C); \quad (\text{结合律})$$

$$(4) (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \\ (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C). \quad (\text{分配律})$$

1.1.5 定理 集合的差运算具有下列性质:

$$(1) (A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C);$$

$$(2) (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C);$$

$$(3) \text{若 } A, B \subset \Omega, \text{ 则 } A \setminus B = A \cap B^c;$$

(4) 设 Ω 是任意一个集合, $\{A_\alpha: \alpha \in I\}$ 是 Ω 的一族子集, 则有

$$\Omega \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (\Omega \setminus A_\alpha),$$

$$\Omega \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (\Omega \setminus A_\alpha),$$

这个性质称为 **de Morgan 法则**.

1.1.6 定义 设 $\{A_n: n \in \mathbf{N}\}$ 为一集序列. 称 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n := \{x: x \text{ 属于 } A_n, n \in \mathbf{N}, \text{ 中的无穷多个}\}$ 为此集序列的**上极限**. 称 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n := \{x: x \text{ 不属于 } A_n, n \in \mathbf{N}, \text{ 中的有限多个}\}$ 为此集序列的**下极限**. 若 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$, 则称 $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ 的极限存在, 而上式中的共同集合称为此集序列的**极限**, 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

若 $A_n \subset A_{n+1}, n \in \mathbf{N}$, 则称 $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ **单调增**, 记作 $A_n \uparrow$; 若 $A_n \supset A_{n+1}, n \in \mathbf{N}$, 则称 $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ **单调减**, 记作 $A_n \downarrow$. 单调增和单调减集序列统称为**单调集列**.

1.1.7 定理 设 $\{A_n: n \in \mathbf{N}\}$ 为任一集序列.

$$(1) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

(2) 若 $\{A_n\}$ 单调, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ 存在, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \begin{cases} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, & \text{若 } \{A_n\} \text{ 单调增,} \\ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, & \text{若 } \{A_n\} \text{ 单调减.} \end{cases}$$

只需注意:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \{x: \forall n \in \mathbf{N}, \exists k \geq n, \text{使 } x \in A_k\},$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \{x: \exists n \in \mathbf{N}, \text{使 } \forall k \geq n, x \in A_k\}.$$

详细证明留作习题.

1.1.8 例 设

$$A_n = \begin{cases} B, & \text{当 } n \text{ 是偶数,} \\ C, & \text{当 } n \text{ 是奇数,} \end{cases}$$

则由定理 1.1.7 知

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = B \cup C, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = B \cap C.$$

1.1.9 定义 设 Ω 是一给定的非空集, $A \subset \Omega$, 则称函数

$$I_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

为 A 的示性函数, 有时也记成 χ_A .

对于 Ω 的一切子集来说, I_A 完全刻画 A , I_A 与 A 之间一一对应, 它是联系集合与函数的一个重要工具, 需要熟练掌握并会灵活运用, 它与集合的关系为下述定理所述.

1.1.10 定理 给定非空集合 Ω , 下述集合都是 Ω 的子集, 则 $\forall x \in \Omega$,

$$(1) A = \Omega \Leftrightarrow I_A(x) \equiv 1;$$

$$(2) A = \emptyset \Leftrightarrow I_A(x) \equiv 0;$$

$$(3) A \subset B \Leftrightarrow I_A(x) \leq I_B(x), \quad \forall x \in \Omega;$$

$$(4) I_{\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha}(x) = \max_{\alpha \in J} I_{A_\alpha}(x), \quad I_{\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha}(x) = \min_{\alpha \in J} I_{A_\alpha}(x);$$

$$(5) I_{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n}(x) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} I_{A_n}(x), \quad I_{\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n}(x) = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} I_{A_n}(x).$$

因而 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ 存在 $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} I_{A_n}$ 存在 (即 $\forall x \in \Omega$, $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{A_n}(x)$ 存在), 且 $I_{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} I_{A_n}$.

证明 (1)(2)(3)(4) 留作习题, 我们只证(5).

$$\begin{aligned} I_{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n}(x) &= I_{\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k}(x) = \min_{n \geq 1} I_{\bigcup_{k \geq n} A_k}(x) \\ &= \min_{n \geq 1} \max_{k \geq n} I_{A_k}(x) = \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} I_{A_k}(x) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} I_{A_n}(x), \end{aligned}$$

$$I_{\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n}(x) = I_{\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq n} A_k}(x) = \max_{n \geq 1} \min_{k \geq n} I_{A_k}(x) = \sup_{n \geq 1} \inf_{k \geq n} I_{A_k}(x) = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} I_{A_n}(x).$$

习题 1.1

1. 证明: $(A \cup B) \setminus B = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.

2. 证明: $(A \setminus B) \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$.

3. $(A \setminus B) \cup C = A \setminus (B \setminus C)$ 成立的充分必要条件是什么?

4. 证明下述等式:

$$(1) A \cap B = A \setminus (A \setminus B);$$

$$(2) A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C);$$

$$(3) A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C);$$

$$(4) A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C);$$

$$(5) (A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D);$$

$$(6) (A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C);$$

$$(7) (A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C);$$

$$(8) B \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (B \cap A_\alpha);$$

$$(9) B \cap \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (B \cap A_\alpha).$$

5. 下列等式是否成立? 若不成立, 有怎样的包含关系?

$$(1) A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C);$$

$$(2) A \cup (B \Delta C) = (A \cup B) \Delta (A \cup C);$$

$$(3) A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C);$$

$$(4) (A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus B.$$

6. 试化简集合 $(A \cup B^c \cup C^c) \cap (A \cup (B \cup C^c))$.

7. 设 $\{A_n; n = 1, 2, \dots\}$ 为单调减集序列, 则有 $A_1 = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus A_{n+1}) \right)$,

且右端各项互不相交.

8. 设 R 为 Ω 的一切子集组成的集类, 则 R 对集合的交(看成乘法)、对称差(看成加法)运算作成环. Ω 是单位元, \emptyset 是零元.

9. 设 $\{A_n; n = 1, 2, \dots\}$ 是一集序列, 令 $B_1 = A_1, B_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \right)$, 则 $B_n, n = 1, 2, \dots$ 两两不

交, 且 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

10. 试证明定理 1.1.7.

11. 试举例说明: $\{A_n; n = 1, 2, \dots\}$ 不单调, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ 存在.

12. 设 $\forall k = 1, 2, \dots$, 定义 $A_{2k+1} = \left[0, 2 - \frac{1}{2k+1} \right], A_{2k} = \left[0, 1 + \frac{1}{2k} \right]$,

试求 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$.

13. 给定非零自然数 m 及 m 个集合 B_0, B_1, \dots, B_{m-1} , 设 $A_n = B_k$, 当 m 整除 $n - k$ 时, 试求

$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$.

14. 试证定理 1.1.10 的(1)(2)(3)(4).

15. 设 $A, B \subset \Omega$, 试将 $I_{A \setminus B}, I_{A^c}, I_{A \Delta B}$ 用 I_A, I_B 表示出来.

§ 1.2 映射与势

1.2.1 定义 映射 $f: A \rightarrow B$ 是指对一切 $x \in A$, 存在唯一的 $y \in B$, 使得 $f(x) = y$. 称 A 为 f 的**定义域**; 对 $F \subset A$, 称 $f(F) := \{y \in B: \exists x \in F, \text{使得 } f(x) = y\}$ 为 F 在 f 之下的**象**, 而称 $f(A)$ 为 f 的**值域** (显然应有 $f(A) \subset B$). 若有 $f(A) = B$, 则称 f 是**满射**; 若由 $f(x_1) = f(x_2)$ 必得 $x_1 = x_2$, 则称 f 是**单射**; 若 f 既是单射又是满射, 则称 f 是 A 到 B 上的**一一映射 (双射)**.

设 f 是 A 到 B 的映射, g 是 B 到 C 的映射, 则把由等式

$$g \circ f(x) := g(f(x)), \quad \forall x \in A,$$

定义的映射 $g \circ f: A \rightarrow C$ 称为 g, f 的**复合映射**.

注意: $g \circ f$ 与 $f \circ g$ 不同, 且在上述情形 $f \circ g$ 未必有定义.

设 $f: A \rightarrow B$, 则

$$f^{-1}(\{y\}) := \{x \in A: f(x) = y\}, \quad y \in B;$$

$$f^{-1}(F) := \{x \in A: f(x) \in F\}, \quad F \subset B,$$

且称 $f^{-1}(F)$ 为 F 在 f 之下的**逆象**.

下面给出象与逆象的一些性质.

设 $A_0, A_1, A_2 \subset A, B_1, B_2 \subset B$.

- (1) $A_1 \subset A_2 \rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$;
- (2) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$;
- (3) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$;
- (4) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;
- (5) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$;
- (6) $f^{-1}(f(A_0)) \supset A_0$.

若 f 为 A 到 B 的单射, 则可定义 $f(A) (\subset B)$ 到 A 上的**逆映射** f^{-1} : $f^{-1}(y) := x$, 若 $f(x) = y, \forall y \in f(A)$.

注意此时 $f^{-1}(y)$ 与上面的 $f^{-1}(\{y\})$ 的意义不同.

1.2.2 定义 给定集合 A, B , 若存在 A 到 B 的一一映射, 则称 A 与 B 对等, 记作 $A \sim B$.

例 1 $\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N} := \{2n: n \in \mathbb{N}\}$.

对等关系“ \sim ”满足:

- (i) 自反性: 对任何集合 A 有 $A \sim A$;
- (ii) 传递性: 若 $A \sim B, B \sim C$, 则 $A \sim C$;
- (iii) 对称性: 若 $A \sim B$, 则 $B \sim A$.

因此, 对等关系是一个等价关系. 如果两个集合对等, 称它们具有相同的势. 对等集组成的类中集合的势相同. 集合 A 的势记作 \bar{A} . 设 $n \in \mathbf{N}$, 则具有 n 个元素的集合作成的类是一个等价类, 这类集合的共同标志是有 n 个元素, 因此可以认为此类集合的势为 n . 对于无限集的情形则不同, 请看下例.

例 2 $(-1, 1) \sim \mathbf{R}$. 取映射 $f(x) = \frac{x}{1-x^2}, x \in (-1, 1)$, 则 f 是 $(-1, 1)$ 到 \mathbf{R} 的一一映射.

例 3 $(-1, 1] \sim (-1, 1)$.

注意到

$$(-1, 1] \setminus \left(\left\{ 1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N} \right\} \cup \{1\} \right) = (-1, 1) \setminus \left\{ 1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N} \right\},$$

而

$$\left\{ 1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N} \right\} \cup \{1\} \sim \left\{ 1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N} \right\}.$$

这是因为可取一一映射

$$f: f(1) = 0, f\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}, n \geq 1.$$

实际上, 无限集能和它的真子集对等, 而有限集则不行. 有些集合论的专著就是利用这一事实定义有限集和无限集, 再用自然数表示有限集的势.

由上述例 2 可以看出: 有时很容易从直观上看出是对等的集合, 如 $(-1, 1]$ 和 $(-1, 1)$, 但是证明其对等却并不容易. 为此我们证明下面的定理.

1.2.3 定理 (Bernstein) 给定集合 A, B , 若存在 $A_1 \subset A, B_1 \subset B$, 且 $A_1 \sim B, B_1 \sim A$, 则 $A \sim B$.

证明 (i) 首先给出一个事实 (证明留作习题): 设 $\{A_\alpha : \alpha \in I\}, \{B_\alpha : \alpha \in I\}$ 是两个集类, $\forall \alpha \in I, A_\alpha \sim B_\alpha$, 且 $A_\alpha, \alpha \in I$ 两两不交, $B_\alpha, \alpha \in I$ 两两不交, 则

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \sim \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha.$$

(ii) 设 φ_1 是 A 到 B_1 的一一映射, φ_2 是 B 到 A_1 的一一映射. 令 $A_2 := \varphi_2(B_1)$, 则 $A \xrightarrow{\varphi_1} B_1 \xrightarrow{\varphi_2} A_2$. 由 $B_1 \subset B$ 知 $A_2 = \varphi_2(B_1) \subset \varphi_2(B) = A_1$, 且 φ_2 也是 B_1 到 A_2 的一一映射, 即 $B_1 \sim A_2$, 所以有