新视角　同济大学《高等数学（第五版）》同步辅导

高等数学
同步辅导及习题精解

李心灿　主审　张建国　主编
邹杰涛　孙大宁　李冱岸　编著

北京航空航天大学出版社

新视角 同济大学《高等数学(第五版)》同步辅导

高等数学
同步辅导及习题精解

李心灿 主审 张建国 主编
邹杰涛 孙大宇 李泅岸 编著

北京航空航天大学出版社

内容简介

本书是编者在多年教学实践的基础上，根据教学和教材改革的新形势，为大学本科生学习高等数学课程编写的一本习题辅导书。该书紧密结合全国高校广泛使用的同济大学应用数学系主编的《高等数学(第五版)》教材内容，全书共分12章，通过预习导航、要点回顾、知识结构、重点难点等几个部分，引导学生采用正确的学习方法，省时省力地学好高等数学。书中内容详实，讲解精辟，实用性强。

本书可作为大学本科生高等数学课程辅导用书，也可供考研学生和高等数学自学者参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步辅导及习题精解/李心灿主审；张建国主编. —北京：北京航空航天大学出版社，2006.7

ISBN 7-81077-889-7

Ⅰ.高… Ⅱ.①李…②张… Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 086434 号

高等数学同步辅导及习题精解

李心灿 主审 张建国 主编

邹杰涛 孙大宁 李冱岸 编著

责任编辑 刘晓明

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路37号(100083) 发行部电话：010—82317024

http://www.buaapress.com.cn E-mail:bhpress@263.net

河北天普润印刷厂印装 各地书店经销

*

开本：850×1168 1/32 印张：21.75 字数：585千字

2006年7月第1版 2006年7月第1次印刷 印数：8 000册

ISBN 7-81077-889-7 定价：23.80元

前　言

很多学生进入大学后，常听说每年有不少人"高等数学"不及格，必须重修，否则无法毕业。重修不但费力、费时、费钱，而且无形中增加了很大的学习压力，必然影响到其他课程的学习。为了帮助同学们克服学习"高等数学"的畏惧情绪，循序渐进地掌握这门大学中最重要的基础课程，根据我们数十年的一线教学经验，结合同济大学《高等数学(第五版)》，编写了这本《高等数学同步辅导及习题精解》，希望帮助同学们考试时轻松过关。

本书依据"10 分钟课前预习，20 分钟课后回顾，轻轻松松学高等数学"的理念编写，按教材章节顺序编排，特设以下栏目：

1. 预习导航　以问题的形式引导学生有目的地进行课前预习，带着问题听课，有助于加深基本概念和基本定理的理解。

2. 要点回顾　提炼了每节的核心要点，针对每个要点，给出要点提示、常考点及应对策略，帮助同学们巩固所学，了解考查方向，做到考试时有的放矢，应对自如。

3. 知识结构　给出本章基本知识点的结构图，帮助同学们梳理思路，对本章内容有一个总体的了解。

4. 重点难点　列举本章的重点难点，这也是期末考试易考查的内容。

另外，本书按节给出了同济大学《高等数学（第五版）》的课后习题详解，对较难的习题给出思路分析，供同学们参考。

本书由数学教育家、北方工业大学工科数学教研室教授、原北京航空航天大学数学系系主任李心灿主审，北方工业大学工科数学教研室张建国教授主持编写，北方工业大学工科数学教研究室邹杰涛副教授、孙大宁副教授、李冱岸副教授参加编写。原兰州大学数学系主任牛培平教授和原吉林大学数学学院胡成栋教授审阅了全部书稿。

本书适合大一新生上课时同步学习，也可作为年轻教师的教学参考书。

对于本书中的错误之处，恳请读者和同仁给予指正。

编　者

2006 年 5 月

目　　录

1 函数与极限

1.1 映射与函数

预习导航

问题1：集合通常有哪些表示法？集合的基本运算有哪几种？集合基本运算的规律是什么？

问题2：区间分几种形式？区间和邻域有何关系？

问题3：什么叫一一映射？什么叫逆映射？什么叫复合映射？

问题4：函数的两个基本要素是什么？若两个函数对应法则相同，那么这两个函数是同一个函数么？

问题5：如果一个函数有上界但无下界，那么这个函数是否有界？

问题6：奇、偶函数的图形分别是关于什么对称的？

问题7：是否每个周期函数都有最小正周期？

问题8：什么样的函数存在反函数？

问题9：两个函数能构成复合函数的条件是什么？

问题10：基本初等函数包括哪五类函数？

问题11：基本初等函数经过四则运算或复合而成的函数都是初等函数么？

问题12：双曲正弦 $\operatorname{sh}x$、双曲余弦 $\operatorname{ch}x$ 是怎么定义的？它们的图形有哪些特征？

要点回顾

要点 1　函数的概念

提　示

① 构成函数的两个要素：对应法则 f（映射）和定义域 D_f。

② 函数的表示与所选用的字母无关，如 $y=f(x)$，$y=f(t)$ 表示同一函数。

考　点

① 求初等函数的自然定义域。

策略：求使函数表达式有意义的集合，如分母不能为零，偶次根式下函数非负，$\log_{f(x)} g(x)$ 中 $f(x)>0$ 且 $f(x)\neq 1$，$g(x)>0$ 等；对于有实际背景的函数，结果应有实际意义。

② 根据函数方程求函数表达式。

策略：利用变量替换及函数表示与变量无关的特性。

要点 2　函数的有界性、奇偶性、单调性和周期性

提　示

① 函数 $f(x)$ 在数集 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界。

② 奇函数和偶函数的定义域关于原点是对称的；奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称。

③ 并不是每个周期函数都有最小正周期。如狄拉克函数，任何正有理数都是它的周期，所以它没有最小周期。

④ 函数的有界性、奇偶性、单调性和周期性都是相对于定义域而言的，都是讨论函数的整体性质。

考　点

① 判别函数是否有界。

策略：利用定义或常见函数的有界性。

② 判别函数的奇偶性（即 $f(x)$ 和 $f(-x)$ 的关系）。

策略：利用定义证明 $f(-x)=-f(x)$ 是判别函数是奇函数

的常用方法。另外还可利用两个奇函数相加是奇函数、奇函数与偶函数的乘积是奇函数、奇函数与奇函数的乘积是偶函数的结论。偶函数也可类似地讨论。

③ 一个函数如何表示为奇函数与偶函数的和?

策略：$f(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}+\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$。

④ 判别函数的单调性。

策略：利用定义。在第 2 章学了导数后,用导数的符号判别函数的单调性较简便。

⑤ 判别函数的周期性。

策略：利用定义。

要点 3　反函数与复合函数

❖ 提　示

① 对应法则是一一映射的函数才有反函数,函数与它的反函数的图形关于直线 $y=x$ 对称。

② 一个函数的反函数与其单调性相同,即这个函数在定义域内单调递增,则它的反函数也是单调递增的。

③ 函数 $f(x)$与函数 $g(x)$能复合成函数 $f[g(x)]$的条件是 $g(x)$的值域与 $f(x)$的定义域 D_f 的交集非空。

❖ 考　点

① 求函数的反函数。

策略：对函数 $y=f(x)$,将 x 与 y 位置互换后,由 $x=f(y)$解出的 $y=\varphi(x)$即为 $y=f(x)$的反函数。注意:最后须标明所求反函数的定义域。

② 求几个函数的复合函数。

策略：一般用代入法和分析法,分析法要求内部函数的值域与外部函数的定义域的交集非空。

☞ 习题精解

1. $A\cup B=(-\infty,3)\cup(5,+\infty)$,$A\cap B=[-10,-5)$;

$A\backslash B=(-\infty,-10)\cup(5,+\infty)$，$A\backslash(A\backslash B)=[-10,-5)$。

2. 因为 $x\in(A\cap B)^c\Rightarrow x\notin A\cap B\Rightarrow x\notin A$，或 $x\notin B\Rightarrow x\in A^c$，或 $x\in B^c\Rightarrow x\in A^c\cup B^c$，所以

$$(A\cap B)^c\subset A^c\cup B^c \qquad ①$$

反之，因为 $x\in A^c\cup B^c\Rightarrow x\in A^c$，或 $x\in B^c\Rightarrow x\notin A$，或 $x\notin B\Rightarrow x\notin A\cap B\Rightarrow x\in(A\cap B)^c$，所以

$$A^c\cup B^c\subset(A\cap B)^c$$

则由式①和式②得 $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$。

3. (1) $y=f(x_0)\in f(A\cup B)=\{f(x)\mid x\in A\cup B\}\Leftrightarrow x_0\in A$，或 $x_0\in B\Leftrightarrow f(x_0)\in f(A)$，或 $f(x_0)\in f(B)\Leftrightarrow f(x_0)\in f(A)\cup f(B)$，所以 $f(A\cup B)\subset f(A)\cup f(B)$ 且 $f(A)\cup f(B)\subset f(A\cup B)$。故 $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$。

(2) $f(A\cap B)=\{f(x)\mid x\in A\cap B\}$，$y\in f(A\cap B)$，则 $\exists x_0\in A\cap B$，有 $y=f(x_0)$，则 $x_0\in A$ 且 $x_0\in B$，即 $f(x_0)\in f(A)$ 且 $f(x_0)\in f(B)$，$y=f(x_0)\in f(A)\cap f(B)$。故 $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$。

4. 首先证明 f 是双射。

$\forall y\in Y$，$\exists x\in X$，使得 $x=g(x)$，$f(x)=f[g(y)]=y$。

对于 X 中任意两个元素 x_1,x_2，$x_1\neq x_2$，要证明 $f(x_1)\neq f(x_2)$，用反证法。如果 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $g[f(x_1)]=g[f(x_2)]$，即 $x_1=x_2$，矛盾，所以 f 是双射，根据定义 g 是 f 的逆映射。

5. (1) $\forall x\in A$，则 $y=f(x)\in f(A)$，$f^{-1}(y)=x\in\{f^{-1}(y)\mid y\in f(A)\}=f^{-1}(f(A))$，即 $A\subset f^{-1}[f(A)]$。

(2) 如果 f 是单射，$\forall x\in f^{-1}[f(A)]$，$\exists y\in f(A)$，有 $f^{-1}(y)=x$，即 $f(x)=y$。

若 $x'\in A$，$f(x')=y$，由于是单射，则 $x=x'\in A$，所以 $f^{-1}[f(A)]\subset A$，$f^{-1}[f(A)]=A$。

6. (1)要使函数有意义，当且仅当 $3x+2\geqslant 0$，即 $x\geqslant -\frac{2}{3}$，所以函数 $y=\sqrt{3x+2}$ 的定义域为 $\left[-\frac{2}{3},+\infty\right)$。

(2) 要使函数有意义，当且仅当 $1-x^2\neq 0$，即 $x\neq\pm 1$，所以函数 $y=\frac{1}{1-x^2}$ 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$。

(3) 要使函数有意义，则要求 $x\neq 0$ 且 $1-x^2\geqslant 0$，即 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 且 $x\neq 0$。所以函数 $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为 $[-1,0)\cup(0,1]$。

(4) 要使函数有意义，当且仅当 $4-x^2>0$，即 $-2<x<2$，所以原函数的定义域为 $(-2,2)$。

(5) $[0,+\infty)$。

(6) $\left\{x\,\middle|\,x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}-1,k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\right\}$。

(7) $[2,4]$。

(8) $(-\infty,0)\cup(0,3]$。

(9) $(-1,+\infty)$。

(10) $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$。

注：由解析式子表示的函数，其定义域就是使运算有意义的实变量值的集合。

7. (1) 不同。因为定义域不同，$f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$。

(2) 不同。因为对应法则不同，$f(x)=x$，而 $g(x)=|x|$。

(3) 相同。因为定义域、对应法则均相同。

(4) 不同。因为定义域不同。

注：两个函数当且仅当其定义域和对应法则完全相同时，才表示同一个函数，否则表示两个不同的函数。

8. $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{6}\right|=\frac{1}{2}$，$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$。

因为$|-2|>\frac{\pi}{3}$，所以$\varphi(-2)=0$。$y=\varphi(x)$的图形如图 1-1 所示。

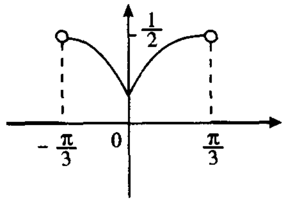

图 1-1

9. (1) 设$x_1,x_2\in(-\infty,1)$且$x_1\leqslant x_2$，则

$$y(x_2)-y(x_1)=\frac{x_2}{1-x_2}-\frac{x_1}{1-x_1}$$

$$=\frac{x_2-x_1}{(1-x_2)(1-x_1)}$$

所以$y(x_2)-y(x_1)\geqslant 0$，$y=\frac{x}{1-x}$在$(-\infty,1)$内单调增加。

(2) 设$x_1,x_2\in(0,+\infty)$且$x_1\leqslant x_2$，则

$$y(x_2)-y(x_1)=x_2+\ln x_2-(x_1+\ln x_1)$$

$$=(x_2-x_1)+\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

因为$x_1x_2\in(0,+\infty)$且$x_1\leqslant x_2$，所以$\frac{x_2}{x_1}\geqslant 1$，$\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\geqslant 0$，$y(x_2)-y(x_1)\geqslant 0$，$y=x+\ln x$在$(0,+\infty)$上单调增加。

注：较简单函数单调性的判别可用定义，但一般地若$f(x)$在区间I上可导，利用导数判别更方便(将在第 3 章介绍)。

10. 设$x_1,x_2\in(-l,0)$且$x_1<x_2$，则

$$f(x_2)-f(x_1)=f[-(-x_2)]-f[-(-x_1)]\xlongequal{\text{奇函数}}-f(-x_2)+f(-x_1)$$

又$-x_2,-x_1\in(0,l)$且$-x_1>-x_2$，故由$f(x)$在$(0,l)$内的单增性知：

$$f(x_2)-f(x_1)=f(-x_1)-f(-x_2)>0$$

从而$f(x)$在$(-l,0)$内也是单调增加的。

11. (1) 设$f_1(x)$，$f_2(x)$为两个任意的偶函数，令$F(x)=f_1(x)+f_2(x)$，则

$$F(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)=f_1(x)+f_2(x)=F(x)$$

故$F(x)$为偶函数。

设 $g_1(x)$，$g_2(x)$ 为两个任意的奇函数，令 $G(x)=g_1(x)+g_2(x)$，则

$$G(-x)=g_1(-x)+g_2(-x)=-g_1(x)-g_2(x)=-G(x)$$

故 $G(x)$ 为奇函数。

(2) 设 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 为任意两个偶函数，令 $F(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$，则

$$F(-x)=f_1(-x)f_2(-x)=f_1(x)f_2(x)=F(x)$$

故 $F(x)$ 为偶函数。

设 $g_1(x)$，$g_2(x)$ 为任意两个奇函数，令 $G(x)=g_1(x)g_2(x)$，则

$$\begin{aligned}G(-x)&=g_1(-x)g_2(-x)=[-g_1(x)][-g_2(x)]\\&=g_1(x)g_2(x)=G(x)\end{aligned}$$

故 $G(x)$ 为偶函数。

设 $f(x)$ 为任一偶函数，而 $g(x)$ 为任一奇函数，令 $T(x)=f(x)g(x)$，则

$$\begin{aligned}T(-x)&=f(-x)g(-x)=f(x)[-g(x)]\\&=-f(x)g(x)=-T(x)\end{aligned}$$

故 $T(x)$ 为奇函数。

12. (1) 因为 $f(-x)=(-x)^2[1-(-x)^2]=x^2(1-x^2)=f(x)$，所以 $y=x^2(1-x^2)$ 为偶函数。

(2) 因为 $f(-x)=3(-x)^2-(-x)^3=3x^2+x^3$，所以 $f(-x)\neq f(x)$ 且 $f(-x)\neq -f(x)$，即 $f(x)$ 既非奇函数又非偶函数。

(3) 因为 $f(-x)=\dfrac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数。

(4) 因为 $f(-x)=(-x)[(-x)-1][(-x)+1]=-x(x-1)(x+1)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数。

(5) 因为 $f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1$，所以 $f(-x)\neq -f(x)$ 且 $f(-x)\neq f(x)$，即 $f(x)$ 既非奇函数又非偶函数。

(6) 因为 $f(-x)=\frac{a^{(-x)}+a^{-(-x)}}{2}=\frac{a^{x}+a^{-x}}{2}=f(x)$,所以 $f(x)$是偶函数。

13. (1) 是周期函数,$T=2\pi$。

(2) 是周期函数,$T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$。

(3) 是周期函数,$T=\frac{2\pi}{\pi}=2$。

(4) 不是周期函数。

(5) 是周期函数。因为 $y=\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$,所以周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$。

14. (1) 因为 $y=\sqrt[3]{x+1}$,所以 $x=y^3-1$,从而 $y=\sqrt[3]{x+1}$的反函数为 $y=x^3-1$。

(2) 因为 $y=\frac{1-x}{1+x}$,所以 $x=\frac{1-y}{1+y}$,从而 $y=\frac{1-x}{1+x}$的反函数为 $y=\frac{1-x}{1+x}$。

(3) 因为 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$,所以 $x=\frac{-dx+b}{cy-a}$。

故 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$的反函数为 $y=\frac{-dx+b}{cx-a},\left(x\neq\frac{a}{c}\right)$。

(4) 由 $y=2\sin 3x$ 得 $x=\frac{1}{3}\arcsin\frac{y}{2}$,所以 $y=2\sin 3x$ 的反函数为 $y=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{2},(x\in R)$。

(5) 由 $y=1+\ln(x+2)$得 $x=\frac{e^y}{e}-2$,所以,所求反函数为 $y=e^{x-1}-2,(x\in R)$。

(6) 由 $y=\frac{2^x}{2^x+1}$ 得 $x=\operatorname{lb}\frac{y}{1-y}$,所以,所求反函数为 $y=$