

专转本

总主编 杨林
本册主编 史汉生
廖洪林

数学考试必读

专转本考试命题研究中心 审定



2

南京大学出版社

青 青 木

第 1 卷 第 1 期
2008 年 1 月

数学考试四例谈

华中师范大学数学教育研究中心 编著



专转本 数学考试必读

专转本考试命题研究中心 审定

总主编 杨 林
本册主编 史汉生 廖洪林
编 委 史汉生 史顺文 张 亮 廖洪林
策 划 杨约翰 凌 达

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

专转本数学考试必读/杨林主编. —南京:南京大学出版社,2004.12

ISBN 7-305-04385-0

I. 专... II. 杨... III. 高等数学-高等学校-自学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 124139 号

书 名 专转本数学考试必读
总 主 编 杨 林
本册主编 史汉生 廖洪林
出版发行 南京大学出版社
社 址 南京市汉口路 22 号 邮编 210093
电 话 025-83596923 025-83592317 传真 025-83328362
网 址 <http://press.nju.edu.cn>
电子邮件 editor990@hotmail.com(编辑部)
sales@press.nju.edu.cn(销售部)
印 刷 阜宁人民印刷有限公司
开 本 787×1092 1/16 印张 10.75 字数 241 千
版 次 2005 年 1 月第 1 版 2005 年 1 月第 1 次印刷
ISBN 7-305-04385-0/O·294
定 价 18.00 元

* 版权所有,侵权必究

* 凡购买南大版图书,如有印装质量问题,请与所购图书销售部门联系调换

前 言

专科教育和本科教育是完全不同的两个教育平台。

本科生不仅在接受教育的系统性方面优于专科生,而且在缔造人生未来的舞台空间方面,也往往有着专科生不可企及的优势。正因为如此,许多在校的专科生渴望能实现人生的跳跃,成为全日制高校的本科生。现在开通的“专转本”考试则为全日制普通高等专科学校的学生提供了实现跳跃的平台。

人生的路漫长,但关键的就几步!

为了帮助广大考生应战“专转本”考试,我们特别约请了江苏高校近几年来一直参与“专转本”考试辅导的资深老师,撰写了这一套“专转本”考试辅导系列:

《专转本英语考试必读》

《专转本英语考试核心密卷》

《专转本数学考试必读》

《专转本数学考试核心密卷》

“必读”主要是梳理考试必须准备的知识体系,突出重点,讲授难点;“必读”配备了相关练习,是针对各个知识单元的;知识单元后,有综合练习,是强调知识的综合运用能力,这也是多数学生的薄弱环节。

“核心密卷”是针对近年来“专转本”考试的命题趋势和规律,为考生最后冲刺考试而提供的核心模拟试卷,是由单元练习到综合练习后的一次整体演练。

专转本,人生大决战
成与败,英数定乾坤

由于英语、数学特别容易拉开分数档次,我们衷心希望这套书能够为考生朋友拿高分做出贡献!

我们也特别希望大家多提宝贵意见,并请 Email 到南京大学出版社编辑部 editor990@hotmail.com,由编辑部统一转发给我们。

本书得以出版,感谢南京大学出版社总编室胡豪先生,书稿运作部薛志红女士。对责任编辑也可所付出的艰辛劳动,编者一并表示深深的谢意。

编 者

2004年12月于南京大学北园

目 录

第一章 准备知识	1
本章主要知识点	1
一、函数表达式的推演	1
二、整理表达式的几个基本技巧	1
三、基本概念:奇偶性、有界性	3
四、常用公式	3
单元练习题 1	4
第二章 极限、连续与间断	5
本章主要知识点	5
一、求极限的七类题型	5
二、连续性分析	8
三、间断点识别及分类	9
四、连续函数的介值定理.....	10
单元练习题 2	11
第三章 导数计算及应用	14
本章主要知识点	14
一、导数定义.....	14
二、复合函数求导、高阶导数、微分.....	15
三、隐函数、参数方程求导	19
四、导数应用.....	21
单元练习题 3	30
第四章 不定积分	41
本章主要知识点	41
一、不定积分的意义、基本公式	41
二、不定积分的三种基本方法.....	41
三、不定积分的四类杂例.....	49
单元练习题 4	51
第五章 定积分	56
本章主要知识点	56
一、定积分计算.....	56
二、特殊类函数的定积分计算.....	57
三、变限积分.....	58

四、有关定积分的证明题	59
五、广义积分的敛散性	60
六、定积分应用	61
单元练习题 5	65
第六章 常微分方程(简记 ODE)	72
本章主要知识点	72
一、可分离变量的 ODE	72
二、一阶线性非齐次方程 ODE	73
三、二阶常系数线性 ODE	75
四、特殊类方程	76
单元练习题 6	77
第七章 级数	80
本章主要知识点	80
一、级数收敛的定义及性质	80
二、正项级数敛散性判别法	80
三、一般项级数敛散性判别法	82
四、幂级数	83
单元练习题 7	85
第八章 向量与解析几何	88
本章主要知识点	88
一、向量运算	88
二、平面方程	89
三、直线方程	89
四、常见曲面及方程	91
单元练习题 8	92
第九章 多元函数微积分	95
本章主要知识点	95
一、一阶偏导数计算	95
二、全微分	97
三、二阶偏导数	98
四、累次积分	99
五、直角坐标系下的二重积分	99
六、极坐标系下的二重积分	103
单元练习题 9	104
综合练习题	107
2004 年普通高校“专转本”统一考试全真题	126
习题与全真试题详解	129

第一章 准备知识

本章主要知识点

- 函数表达式的推演
- 整理表达式的几个基本技巧
- 基本概念:奇偶性、有界性
- 常用公式

一、函数表达式的推演

函数求值及函数解析表达式推演是其中两个基本问题,它可以结合导数、积分等内容进行考查.

例 1.1 已知 $f(x) = x^2 + 1$, 求 $f(-1)$, $f(2x)$, $f(-x)$, $f(\frac{1}{x})$.

解: $f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$;

$$f(2x) = (2x)^2 + 1 = 4x^2 + 1;$$

$$f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1;$$

$$f(\frac{1}{x}) = (\frac{1}{x})^2 + 1 = \frac{1}{x^2} + 1.$$

例 1.2 已知 $f(2x) = x^2 + x + 1$, 求 $f(x)$, $f(4x)$.

解: 令 $u = 2x$, 即 $x = \frac{u}{2}$, 故

$$f(u) = (\frac{u}{2})^2 + \frac{u}{2} + 1 = \frac{u^2}{4} + \frac{u}{2} + 1; \text{ 于是,}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + 1,$$

$$f(4x) = \frac{(4x)^2}{4} + \frac{4x}{2} + 1 = 4x^2 + 2x + 1.$$

例 1.3 已知 $f(e^x + 1) = 2\ln x + x + 1$, 求 $f(x)$.

解: 令 $e^x + 1 = u$, 即 $x = \ln(u - 1)$, 故

$$f(e^x + 1) = f(u) = 2\ln(\ln(u - 1)) + \ln(u - 1) + 1,$$

$$\text{所以, } f(x) = 2\ln \ln(x - 1) + \ln(x - 1) + 1.$$

二、整理表达式的几个基本技巧

下面介绍的整理表达式的几个基本技巧,对极限、积分计算等内容都是非常重要的.

(1) 技巧一:根式变型 $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

例 1.4 $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$.

解: $f(x) = \frac{(x+1) - (x-1)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$.

例 1.5 $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} - x$.

解: $f(x) = \frac{x^2 - x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x} = \frac{-x + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x}$.

注: 这一技巧在某种极限计算中有重要作用.

(2) 技巧二: 拆分

$$\frac{1}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{1}{bc-ad} \cdot \frac{c(ax+b) - a(cx+d)}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{1}{bc-ad} \left(\frac{c}{cx+d} - \frac{a}{ax+b} \right)$$

例 1.6 拆分 $\frac{1}{(x+1)(x-3)}$.

解: 原式 = $\frac{1}{4} \frac{(x+1) - (x-3)}{(x+1)(x-3)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1} \right)$.

例 1.7 拆分 $\frac{1}{(2x+1)(3x-1)}$.

解: 原式 = $\frac{1}{5} \frac{3(2x+1) - 2(3x-1)}{(2x+1)(3x-1)} = \frac{1}{5} \left(\frac{3}{3x-1} - \frac{2}{2x+1} \right)$.

注: 这一技巧在积分计算、幂级数展开中尤为重要.

(3) 技巧三: $\frac{p_m(x)}{p_n(x)} (m \geq n)$ 综合除法

其中, $p_m(x)$ 表示 m 次多项式, 则 $\frac{p_m(x)}{p_n(x)} = \text{商} + \frac{\text{余数}}{p_n(x)}$.

例 1.8 将 $\frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 + 1}$ 化为真分式.

解:

$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \ \leftarrow \text{商} \\ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ -2 \ 1 \\ \hline 1 \ 0 \ 1 \\ \hline -3 \ 1 \ \leftarrow \text{余数} \end{array}$$

\therefore 原式 = $x + \frac{-3x+1}{x^2+1}$.

注: 竖式中多项式缺项补 0.

例 1.9 将 $\frac{x^5 - x^4 + x^2 + x - 1}{x^3 + x + 1}$ 化为真分式.

解:

$$\begin{array}{r} 1 \ -1 \ -1 \\ 1011 \) \ 1 \ -1 \ 0 \ 1 \ 1 \ -1 \\ \hline 1 \ 0 \ 1 \ 1 \\ \hline -1 \ -1 \ 0 \ 1 \\ \hline -1 \ 0 \ -1 \ -1 \\ \hline -1 \ 1 \ 2 \ -1 \\ \hline -1 \ 0 \ -1 \ -1 \\ \hline 1 \ 3 \ 0 \end{array}$$

$$\therefore \text{原式} = x^2 - x - 1 + \frac{x^2 + 3x}{x^3 + x + 1}.$$

注:这一技巧在分式积分中经常用到.

三、基本概念:奇偶性、有界性

(1) 奇偶性

定义:如果 $f(-x) = -f(x)$, 则 $f(x)$ 称为奇函数; 如果 $f(-x) = f(x)$, 则 $f(x)$ 称为偶函数.

上述定义即为判断函数奇偶性的方法.

例 1.10 $f(x) = x^2 + x$, 判断其奇偶性.

解: $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$, $\therefore f(x)$ 非奇非偶.

例 1.11 $f(x) = \sin^3(x)e^{x^2}$, 判断其奇偶性.

解: $f(x) = \sin^3(-x)e^{(-x)^2} = -\sin^3 x e^{x^2} = -f(x)$, $\therefore f(x)$ 为奇函数.

例 1.12 如果 $f(x) = g(x) + g(-x)$, $g(x)$ 为已知函数, 判断其奇偶性.

解: $f(-x) = g(-x) + g(-(-x)) = g(-x) + g(x) = f(x)$, $\therefore f(x)$ 为偶函数.

(2) 有界性

定义:存在常数 $M > 0$, 使得 $|f(x)| \leq M$, 其中 $x \in I$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上有界. $\sin x, \cos x, \arcsin x, \arctan x, \operatorname{arccot} x$ 均有界.

例 1.13 判断 $y(x) = \frac{4x}{x^2+1} \sin^2 x$ 是否有界.

解: $\therefore |y(x)| = \left| \frac{4x}{x^2+1} \right| \sin^2 x \leq \frac{4|x|}{2|x|} \sin^2 x \leq 2$, $\therefore y(x)$ 有界.

例 1.14 证明 $y(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1} \arctan^2(x^2+1)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有界.

解: $|y(x)| \leq \frac{\sqrt{x}}{x+1} \cdot \frac{\pi^2}{4} \leq \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{8}$.

例 1.15 判断 $y(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)} \sin x$ 是否有界.

解: $\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$, $\therefore y(x)$ 在其定义域内无界.

四、常用公式

三角函数的公式很繁杂, 要重点熟练掌握以下几个常用公式:

(1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;

(2) $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$;

(3) $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$, $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$.

单元练习题 1

1. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, 则 $f(f(x)) =$ _____.

2. 将函数的分子有理化, $y(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1}} =$ _____.

3. 函数 $y(x) = \frac{1}{(2x+1)(5x+1)}$ 可拆分为 _____.

4. 综合除法: $y(x) = \frac{x^4 - x^3 + 2x^2 + 3x + 1}{x^2 + 1} =$ _____.

5. 下列函数为奇函数的是 ()

A. $\sin^2 x \cos x$

B. $\arctan x \cdot \arcsin x$

C. $\frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}}$

D. $x^2 - x + 1$

6. 下列函数为有界函数的是 ()

A. $1 + x \sin x$

B. $\frac{1}{\arctan x}$

C. $\frac{x^2}{x^4 + 1} \cdot \sin(x^2 + 1)$

D. $\frac{\tan x}{(x+1)(x+2)}$

7. 已知 $y(2x+1) = e^x + x$, 求 $y(x)$.

8. $y(\ln x) = x + 1$, 求 $y(x)$.

9. 将函数 $\sin^4 x, \tan^4 x$ 应用倍角公式进行转化.

第二章 极限、连续与间断

本章主要知识点

- ◎ 求极限的七类题型
- ◎ 连续性分析
- ◎ 间断点识别及分类
- ◎ 连续函数的介值定理

一、求极限的七类题型

求极限问题归纳为七类主要题型,这里介绍前五类,后两类在相应的章节(洛必达法则,变限积分)再作介绍.

(1) 题型 I $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)}$

方法:上下同除以 x 的最高次幂.

例 2.1 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + 1}{x^2 + 1}$.

解:原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^5}}{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5}} = \infty$.

例 2.2 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2(2x+1)^2}{3x^4+1}$.

解:原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{(x+1)^2(2x+1)^2}{x^2}}{3 + \frac{1}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{1}{x})^2(2 + \frac{1}{x})^2}{3 + \frac{1}{x^4}} = \frac{4}{3}$.

例 2.3 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$.

解:原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2 + \frac{1}{x}} + \sqrt{2 - \frac{1}{x}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = \sqrt{2}$.

例 2.4 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - x)$.

解:原式 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - x + 1 - x^2)}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x}$.

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + 1}} = -\frac{1}{2}.$$

例 2.5 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + 2^x}{3^x - 2^x}$.

解: 原式 = $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + (\frac{2}{3})^x}{1 - (\frac{2}{3})^x} = 1.$

(2) 题型 II $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P_m(x)}{P_n(x)}$

$$\text{原式} = \begin{cases} \frac{P_m(a)}{P_n(a)}, P_n(a) \neq 0 \\ \infty, P_n(a) = 0, P_m(a) \neq 0 \end{cases}$$

上下分解因式并代值(用洛必达法则亦可), $P_n(a) = P_m(a) = 0$

例 2.6 求 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 1}{x + 1}$.

解: 原式 = 2.

例 2.7 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 2x + 1}$.

解: 原式 = ∞ .

例 2.8 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^2 + 2x - 3}$.

解: 原式 = $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x+3} = \frac{1}{4}.$

例 2.9 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$.

解: 原式 = $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)}{(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)(\sqrt{x} + 1)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)}{(x-1)(\sqrt{x} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{(\sqrt{x} + 1)} = \frac{3}{2}.$$

(3) 题型 III 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, g(x)$ 有界, 则 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$

例 2.10 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+1} \sin(x^2 + 1)$.

解: $\because \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+1} = 0$, 而 $\sin(x^2 + 1)$ 有界,

\therefore 原式 = 0.

例 2.11 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \tan x \cos^2(\frac{2}{x})$.

解: $\because \tan x \rightarrow 0 (x \rightarrow 0), \cos^2(\frac{2}{x})$ 有界,

∴ 原式 = 0.

例 2.12 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x+1} \sin^{2004}(\sin(2004x))$.

解: ∵ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}}{1 + \frac{1}{x}} = 0$, $\sin^{2004}(\sin(2004x))$ 有界,

∴ 原式 = 0.

(4) 题型 IV $\lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = e$

识别此类题型尤为重要, 主要特征为 1^∞ 未定式. 步骤如下:

- ① 1^∞ 识别;
- ② 先得内, 再得外;
- ③ 内一翻, 再还原.

$$\lim(1+u)^v = \lim\{(1+u)^{\frac{1}{u}}\}^{uv} = e^{\lim uv}$$

例 2.13 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2x-1}$.

解: 原式 = $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{x+1}\right)^{(2x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-2}} \right\}^{\frac{-2}{x+1}(2x-1)}$
 $= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2(2x-1)}{x+1}} = e^{-4}$.

例 2.14 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-x+1}{x^2-2x+3}\right)^{x+1}$.

解: 原式 = $\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{x-2}{x^2-2x+3}\right)^{\frac{x^2-2x+3}{x-2}} \right\}^{\frac{x-2}{x^2-2x+3}(x+1)}$
 $= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-2)(x+1)}{x^2-2x+3}} = e$

例 2.15 求 $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

解: $\lim_{x \rightarrow 1} \{(1+x-1)^{\frac{1}{x-1}}\}^{(x-1)\frac{1}{1-x}} = e^{-1}$.

(5) 题型 V 等价无穷小替换

替换公式: 当 $x \rightarrow 0$ 时, 有:

$$\sin x \sim x$$

$$\tan x \sim x$$

$$\arcsin x \sim x$$

$$\arctan x \sim x$$

$$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x$$

$$\ln(1+x) \sim x$$

$$e^x - 1 \sim x$$

替换原则: 乘除可换, 加减忌换.

例 2.16 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$.

错解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^3} = 0$.

例 2.17 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)\sin(3x)}{e^{\frac{x^2}{2}} - 1}$.

解: 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot 3x}{\frac{x^2}{2}} = 12$.

例 2.18 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x^2} - 1}{\arcsin x^2}$.

解: 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \cdot 2x^2}{x^2} = 1$.

例 2.19 求 $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{2x-4}}{\sqrt[3]{x+19}-3}$.

解: 令 $x-8=u$, 则 $x=8+u$,

$$\text{原式} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sqrt{16+2u}-4}{\sqrt[3]{27+u}-3} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{4\sqrt{1+\frac{1}{8}u}-4}{3\sqrt[3]{1+\frac{u}{27}}-3}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} u}{3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{u}{27}} = \frac{27}{4}$$

例 2.20 求 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (x - \frac{\pi}{2}) \tan x$.

解: 令 $u = \frac{\pi}{2} - x$, $x = \frac{\pi}{2} - u$,

$$\text{原式} = -\lim_{u \rightarrow 0} u \tan(\frac{\pi}{2} - u)$$

$$= -\lim_{u \rightarrow 0} u \cot u = -\lim_{u \rightarrow 0} \frac{u \cos u}{\sin u}$$

$$= -\lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{u} = -1.$$

(6) 题型 VI 洛必达法则(见导数相关内容)

(7) 题型 VII 变上限积分(见积分相关内容)

二、连续性分析

定义: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

变形: $f(x_0-0) = f(x_0+0) = f(x_0)$.

其中, $f(x_0 \pm 0)$ 分别表示左、右极限.

例 2.21 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$, 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 求 a .

解: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0) = a, \therefore a = 1$.

例 2.22 $f(x) = \begin{cases} ax \sin \frac{1}{x} + \frac{\ln(1+2x)}{\sin 2x}, & x < 0 \\ b, & x = 0 \\ c \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{2}{x}}, & x > 0 \end{cases}$, 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 求 a, b, c .

解: $f(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(ax \sin \frac{1}{x} + \frac{\ln(1+2x)}{\sin 2x} \right)$
 $= a \lim_{x \rightarrow 0^-} x \sin \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+2x)}{\sin 2x} = 1,$

$f(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} c \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{2}{x}}$
 $= c \lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ \left(1 + \frac{-2x}{1+x} \right)^{\frac{1+x}{-2x}} \right\}^{\frac{-2x \cdot 2}{1+x} \cdot \frac{2}{x}} = ce^{-4},$

由 $f(0-0) = f(0+0) = f(0)$ 得: $1 = b = ce^{-4}$,
 $\therefore b = 1, c = e^4, a$ 为任意实数.

例 2.23 $f(x) = \begin{cases} xg\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 其中 $g(x)$ 为有界函数, 问 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否连续?

解: $\because \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} xg\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0),$

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

例 2.24 $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$ 在 $x=1$ 处可能连续吗?

解: $f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1-x}{x-1} = -1,$

$f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x-1}{x-1} = 1$

\therefore 不论 $f(1)$ 取何值, $f(x)$ 均不能连续.

三、间断点识别及分类

1. 识别方法: 可能间断点应是其定义域的端点.

2. 分类方法: (a) $f(x_0+0) = f(x_0-0)$, x_0 为可去间断点;

(b) $f(x_0+0) \neq f(x_0-0)$, x_0 为第一类间断点, 或称跳跃型间断点;

(c) $f(x_0+0)$ 、 $f(x_0-0)$ 至少有一个不存在, x_0 为第二类间断; 特别地, 若至少有一个为 ∞ , 则为第二类无穷间断点.

例 2.25 $f(x) = \frac{x}{\tan x}$

解: 间断点为 $x = k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

对于 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}, (k \in \mathbf{Z})$

因为 $\lim_{x \rightarrow k\pi + \frac{\pi}{2}} f(x) = 0,$

所以 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ 为可去间断点.

对于 $x = k\pi,$

当 $k=0,$ 即 $x=0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1, x=0$ 为可去间断点;

当 $k \neq 0, \lim_{x \rightarrow k\pi} \frac{x}{\tan x} = \infty, x = k\pi$ 为第二类无穷间断点.

例 2.26 $f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$

解: 间断点 $x=1$.

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} e^{\frac{1}{x-1}} = e^{-\infty} = 0,$$

$$f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} e^{\frac{1}{x-1}} = e^{+\infty} = \infty.$$

$\therefore f(x)$ 在 $x=1$ 处为第二类无穷间断点.

例 2.27 $f(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{(x-3)(x+1)(x+2)}$

解: 定义域为 $x \leq 2$.

间断点为 $x = -1, x = -2$.

因为 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \infty,$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \infty,$$

所以 $-1, -2$ 均为 $f(x)$ 的第二类无穷间断点.

例 2.28 $f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{2+x}} e^{\frac{1}{2-x}}$

解: 定义域为 $-2 < x \leq 2$, 间断点为 $x = -2, 2$

对于 $x = -2,$

$\lim_{x \rightarrow -2+0} f(x) = \infty, x = -2$ 为第二类无穷间断点;

对于 $x = 2,$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 2+0} \sqrt{2-x} e^{\frac{1}{2-x}} = 0, x = 2$$
 为可去间断点.

注: 对 $x = -2, 2$ 仅考虑了其一个单侧极限.

四、连续函数的介值定理

定理: $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内至少有一零点, 即存在 $c \in (a, b)$, 使得 $f(c) = 0$.

应用此定理需要注意以下几点:

- (1) $[a, b]$ 区间的选择, 在证明题过程中有明确的提示;
- (2) 验证 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的连续性;
- (3) 验证 $f(x)$ 在两端的符号;