主编○北京大学 王晴

高等代数习题全解

高教第二版·上下册

科学技术文献出版社

GAODENG DAISHU XITI QUANJIE

高等代数

高等代数习题全解

(上、下册)

高教第二版

主　编　北京大学数学科学学院　王　晴

编　者　董　城　常　青　赵　文　肖亚杰
胡东华　周振东　黄　阔　张　祥
李国军　孙海波　张英英　韩雨澜
邵承宗　朱林海　王东兆　刘宝杰
李岭南　唐晓燕　于　盼　郭宏洁
刘　玉　贺志平　赵　亮　彭　凯
谭　利　陈　乐　胡　杏　刘　格
王卫平　王有德　陈　友　谢　瑶
王　锐　黄　溪　熊　姿　黄　熙
蔡　妍　刘　星　杨伟姣　刘晓兰
王　利　刘美平　刘美华　彭德华
蒋玉奇　周良玉　刘玉田　谭　希
吴　维　阳湘崇　胡孝辉　周　耀

科学技术文献出版社

Scientific and Technical Documents Publishing House

·北京·

图书在版编目(CIP)数据

高等代数习题全解（上下)册/王晴主编. -北京:科学技术文献出版社,2007.1

ISBN 978-7-5023-5541-8

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 王…　Ⅲ. 高等代数-高等学校-解题　Ⅳ. O15-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 154238 号

出　版　者	科学技术文献出版社
地　　　址	北京市海淀区西郊板井农林科学院农科大厦 A 座 8 层/100089
图书编务部电话	(010)51501739
图书发行部电话	(010)51501720,(010)68514035(传真)
邮购部电话	(010)51501729
网　　　址	http://www.stdph.com

E-mail: stdph@istic.ac.cn

策划编辑	科　文
责任编辑	李　静
责任出版	王杰馨
发　行　者	科学技术文献出版社发行　全国各地新华书店经销
印　刷　者	北京高迪印刷有限公司
版(印)次	2007 年 1 月第 1 版第 1 次印刷
开　　　本	850×1168　32 开
字　　　数	395 千
印　　　张	11.125
印　　　数	1～6000 册
定　　　价	16.00 元

前　言

本书是丘维声教授主编的《高等代数》教材(第二版)的配套辅导书及习题全解。高等代数是数学学科中一门重要的基础课程，也是数学专业硕士研究生入学考试的必考科目，它对学生的抽象思维能力、逻辑推理能力的培养，以及后续课程的学习起着非常重要的作用。但是，大多数学生在学习过程中，存在对基本概念以及定理结论理解不透，解题缺乏思路等问题。

编写本书的目的在于帮助学生消化课堂讲授内容，掌握高等代数的基本理论和基本方法，提高解题的技巧和方法。

本书可供大、中、专院校学生学习高等代数课程的参考用书，也可供报考研究生的读者作为复习参考用书使用。

对于本书的不足之处，恳请读者予以批评指正，使其日臻完善。

目　录

上　册

下　册

上　册

第一章　线性方程组

基本要求、重点与难点

内容简介

名称	主要内容
高斯 — 约当算法	① 线性方程组的初等变换 ② 系数矩阵与增广矩阵的定义 ③ 矩阵的初等行变换 ④ 线性方程组的一般解 ⑤ 高斯 — 约当算法的步骤
线性方程组的解的情况及其判别准则	① n 元线性方程的解的情况有三种可能:无解,唯一解,无穷多解 ② n 元齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是:它的系数矩阵经过初等行变化成的阶梯形矩阵中,非零行的数目 $r < n$ ③ n 元齐次线性方程组如果方程的数目 $s < n$,则它一定有非零解
数域	① 数域的定义 ② 任一数域都包含有理数域

课后习题全解

习题 1.1

1. 解下列线性方程组：

$$(1)\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3, \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 = -9, \\ -x_2 + 4x_2 - x_3 = -7; \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 7, \\ 3x_1 + 7x_2 + x_3 = -8, \\ -x_1 - 4x_2 + x_3 = 10; \end{cases}$$

(3) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 6, \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 + 5x_4 = 0, \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = -12, \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 = 2; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 7x_3 = -8, \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4, \\ -3x_1 - 7x_2 - 2x_3 = -3, \\ x_1 + 4x_2 - 12x_3 = -15; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -11, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 1, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$

【知识点】 求解线性方程组.

【思路】 利用矩阵的初等行变换.

【解】 (1) 原方程组的增广矩阵为：$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -4 & -9 \\ -1 & 4 & -1 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow[③+①]{②+2①}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & -8 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{②\leftrightarrow③}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & -5 & -8 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{③+5②}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -23 & -23 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{23}③}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

故原方程组的解为 $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$

(2) 原方程组的增广矩阵为：$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 1 & -8 \\ -1 & -4 & 1 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{③+(-3)① \\ ④+①}]{②+(-2)①}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -5 & -11 \\ 0 & -1 & 3 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow[④+(-1)②]{③+(-2)②}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{③\leftrightarrow④}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}③]{④+\frac{7}{2}③}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

故原方程组的解为 $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$

(3) 原方程组的增广矩阵为：$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 & 6 \\ 3 & -8 & 1 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 1 & -12 \\ -1 & 4 & -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{③+2① \\ ④+①}]{②+(-3)①}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & -18 \\ 0 & -5 & -8 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[④+(-1)②]{③+5②}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & -18 \\ 0 & 0 & 27 & 39 & -90 \\ 0 & 0 & -10 & -12 & 26 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-\frac{1}{2})④]{\frac{1}{3}③}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & -18 \\ 0 & 0 & 9 & 13 & -30 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & -13 \end{bmatrix} \xrightarrow[④+(-\frac{5}{9})③]{}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & -18 \\ 0 & 0 & 9 & 13 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{11}{9} & \frac{11}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{9}{11}④}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & -18 \\ 0 & 0 & 9 & 13 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

故原方程组的解为$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = -3 \end{cases}$

(4) 原方程组的增广矩阵为：$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 & -8 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ -3 & -7 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & -12 & -15 \end{bmatrix} \xrightarrow[④+(-1)①]{③+3①}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 & -8 \\ 0 & -1 & 18 & 20 \\ 0 & 2 & -23 & -27 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{②\leftrightarrow④}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & -5 & -8 \\ 0 & 2 & -23 & -27 \\ 0 & -1 & 18 & 20 \end{bmatrix} \xrightarrow[④+②]{③-2②}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & -7 & -8\\0 & 1 & -5 & -7\\0 & 0 & -13 & -13\\0 & 0 & 13 & 13\end{bmatrix}\xrightarrow{④+③}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & -7 & -8\\0 & 1 & -5 & -7\\0 & 0 & -13 & -13\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{13}③}\begin{bmatrix}1 & 3 & -7 & -8\\0 & 1 & -5 & -7\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

故原方程组的解为 $\begin{cases}x_1 = 5\\x_2 = -2\\x_3 = 1\end{cases}$

(5) 原方程组的增广矩阵为：$\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & -4 & 4\\1 & 1 & -1 & 1 & -11\\1 & 3 & 0 & 1 & 1\\0 & -7 & 3 & 1 & -3\end{bmatrix}\xrightarrow[③+(-1)①]{②+(-1)①}$

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & -4 & 4\\0 & 3 & -4 & 5 & -15\\0 & 5 & -3 & 5 & -3\\0 & -7 & 3 & 1 & -3\end{bmatrix}\xrightarrow{④+2②}$$

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & -4 & 4\\0 & 3 & -4 & 5 & -15\\0 & 5 & -3 & 5 & -3\\0 & -1 & -5 & 11 & -33\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{③+5②\\④+3②}]{②\leftrightarrow④}$$

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & -3 & -4 & 4\\0 & -1 & -5 & 11 & -33\\0 & 0 & -28 & 60 & -168\\0 & 0 & -19 & 38 & -114\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{\frac{1}{19}③\\-\frac{1}{4}④}]{③\leftrightarrow④}$$

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & -3 & -4 & 4\\0 & -1 & -5 & 11 & -33\\0 & 0 & -1 & 2 & -6\\0 & 0 & 7 & -15 & 42\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{(-1)③\\④+(-7)③}]{(-1)②}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -11 & 33 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

故原方程组的解为$\begin{cases} x_1 = -8 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 6 \\ x_4 = 0 \end{cases}$

点评:利用矩阵的初等行变换能简单直观地解出线性方程组的解.

2. 一个投资者想把 1 万元投入给 3 个企业,A_1,A_2,A_3,所得的利润分别 12%,15%,22%. 他想得到 2000 元的利润.

(1) 如果投入给 A_2 的钱是投给 A_1 的 2 倍,那么应当分别给 A_1,A_2,A_3 投资多少?

(2) 可不可以投给 A_3 的钱等于投给 A_1 与 A_2 的钱的和?

【知识点】 线性方程组的应用

【思路】 建立线性方程组

【解】(1) 设投给 A_1,A_2,A_3 的钱分别为 x_1 元,x_2 元,x_3 元,由题意得方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10000 \\ 0.12x_1 + 0.15x_2 + 0.22x_3 = 2000 \\ x_2 = 2x_1 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{5000}{6} \\ x_2 = \dfrac{5000}{3} \\ x_3 = 7500 \end{cases}$$

(2) 由题意得方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10000 \\ 0.12x_1 + 0.15x_2 + 0.22x_3 = 2000 \\ x_1 + x_2 = x_3 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x_1 = -5000 \\ x_2 = 10000 \\ x_3 = 5000 \end{cases}$$

不成立，所以不可以投给 A_3 的钱等于投给 A_1 和 A_2 的钱的和.

3.解线性方程组：

(1) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 6, \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 5, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 6, \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 5, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 11 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 7, \\ -x_2 + 12x_2 + 7x_3 = -5, \\ x_1 + 16x_2 + 13x_3 = -1 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 7, \\ -x_2 + 12x_2 + 7x_3 = -5, \\ x_1 + 16x_2 + 13x_3 = 1 \end{cases}$

【知识点】 求解线性方程组.

【思路】 系数矩阵的初等行变换.

【解】 (1) 由题意得增广矩阵为 $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 & 6 \\ -3 & 1 & 2 & -4 & 5 \\ -1 & -2 & 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

因 $R(A) \neq R(A \vdots b)$，由解的判定定理可知，方程组无解.

(2) 由题意得增广矩阵为：$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 & 6 \\ -3 & 1 & 2 & -4 & 5 \\ -1 & -2 & 3 & 1 & 11 \end{bmatrix} \to$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由此可知，原方程组有无穷多个解，通解为：

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - x_4 - 3 \\ x_2 = x_3 + x_4 - 4 \end{cases}$$