

主编○北京大学 王晴

高等代数习题全解

高教第二版·上下册

 科学技术文献出版社

GAODENG DAISHU XITI QUANJIE



ISBN 7-309-04611-1

高等代数(第4版)

张纪岳 王 明 李 俊 编

科学出版社



科学出版社 北京 100071

高等代数习题全解

(上、下册)

高教第二版

主 编	北京大学数学科学学院	王 晴
编 者	董 城 常 青 赵 文 肖亚杰	
	胡东华 周振东 黄 阔 张 祥	
	李国军 孙海波 张英英 韩雨澜	
	邵承宗 朱林海 王东兆 刘宝杰	
	李岭南 唐晓燕 于 盼 郭宏洁	
	刘 玉 贺志平 赵 亮 彭 凯	
	谭 利 陈 乐 胡 杏 刘 格	
	王卫平 王有德 陈 友 谢 瑶	
	王 锐 黄 溪 熊 姿 黄 熙	
	蔡 妍 刘 星 杨伟姣 刘晓兰	
	王 利 刘美平 刘美华 彭德华	
	蒋玉奇 周良玉 刘玉田 谭 希	
	吴 维 阳湘崇 胡孝辉 周 耀	

科学技术文献出版社

Scientific and Technical Documents Publishing House

• 北京 •

图书在版编目(CIP)数据

高等代数习题全解 (上下)册/王晴主编. -北京:科学技术文献出版社,2007.1

ISBN 978-7-5023-5541-8

I. 高… II. 王… III. 高等代数-高等学校-解题 IV. O15-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 154238 号

出 版 者 科学技术文献出版社
地 址 北京市海淀区西郊板井农林科学院农科大厦 A 座 8 层/100089
图书编务部电话 (010)51501739
图书发行部电话 (010)51501720,(010)68514035(传真)
邮 购 部 电 话 (010)51501729
网 址 <http://www.stdph.com>
E-mail: stdph@istic.ac.cn
策 划 编 辑 科 文
责 任 编 辑 李 静
责 任 出 版 王杰馨
发 行 者 科学技术文献出版社发行 全国各地新华书店经销
印 刷 者 北京高迪印刷有限公司
版 (印) 次 2007 年 1 月第 1 版第 1 次印刷
开 本 850×1168 32 开
字 数 395 千
印 张 11.125
印 数 1~6000 册
定 价 16.00 元

© 版权所有 违法必究

购买本社图书,凡字迹不清、缺页、倒页、脱页者,本社发行部负责调换。

前 言

本书是丘维声教授主编的《高等代数》教材(第二版)的配套辅导书及习题全解。高等代数是数学学科中一门重要的基础课程,也是数学专业硕士研究生入学考试的必考科目,它对学生的抽象思维能力、逻辑推理能力的培养,以及后续课程的学习起着非常重要的作用。但是,大多数学生在学习过程中,存在对基本概念以及定理结论理解不透,解题缺乏思路等问题。

编写本书的目的在于帮助学生消化课堂讲授内容,掌握高等代数的基本理论和基本方法,提高解题的技巧和方法。

本书可供大、中、专院校学生学习高等代数课程的参考用书,也可供报考研究生的读者作为复习参考用书使用。

对于本书的不足之处,恳请读者予以批评指正,使其日臻完善。

目 录

上 册

第一章 线性方程组	1
基本要求、重点与难点	1
课后习题全解	1
习题 1.1	1
习题 1.2	8
习题 1.3	15
第二章 行列式	16
基本要求、重点与难点	16
课后习题全解	18
习题 2.1	18
习题 2.2	20
习题 2.3	23
习题 2.4	30
习题 2.5	44
习题 2.6	47
第三章 线性方程组的进一步理论	50
基本要求、重点与难点	50
课后习题全解	52
习题 3.1	52
习题 3.2	56
习题 3.3	63
习题 3.4	67
习题 3.5	69

习题 3.6	77
习题 3.7	79
习题 3.8	84
第四章 矩阵的运算	88
基本要求、重点与难点	88
课后习题全解	91
习题 4.1	91
习题 4.2	99
习题 4.3	103
习题 4.4	107
习题 4.5	115
习题 4.6	124
习题 4.7	130
第五章 矩阵的相抵与相似	133
基本要求、重点与难点	133
课后习题全解	134
习题 5.1	134
习题 5.2	136
习题 5.3	139
习题 5.4	140
习题 5.5	143
习题 5.6	152
习题 5.7	158
第六章 二次型·矩阵的合同分类	164
基本要求、重点与难点	164
课后习题全解	165
习题 6.1	165
习题 6.2	176
习题 6.3	181

下 册

第七章 多项式环	191
基本要求、重点与难点	191
课后习题全解	196
习题 7.1	196
习题 7.2	199
习题 7.3	202
习题 7.4	210
习题 7.5	212
习题 7.6	214
习题 7.7	219
习题 7.8	221
习题 7.9	226
习题 7.10	228
习题 7.11	235
 第八章 线性空间	240
基本要求、重点与难点	240
课后习题全解	243
习题 8.1	243
习题 8.2	251
习题 8.3	260
习题 8.4	264
 第九章 线性映射	266
基本要求、重点与难点	266
课后习题全解	270
习题 9.1	270
习题 9.2	275
习题 9.3	277
习题 9.4	289

习题 9.5	293
习题 9.6	299
习题 9.7	301
习题 9.8	307
习题 9.9	307
习题 9.10	312

第十章 具有度量的线性空间	319
基本要求、重点与难点	319
课后习题全解	322
习题 10.1	322
习题 10.2	327
习题 10.3	331
习题 10.4	335
习题 10.5	338
习题 10.6	341

上册

第一章 线性方程组

基本要求、重点与难点

内容简介

名称	主要内容
高斯—约当算法	① 线性方程组的初等变换 ② 系数矩阵与增广矩阵的定义 ③ 矩阵的初等行变换 ④ 线性方程组的一般解 ⑤ 高斯—约当算法的步骤
线性方程组的解的情况及其判别准则	① n 元线性方程的解的情况有三种可能：无解，唯一解，无穷多解 ② n 元齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是：它的系数矩阵经过初等行变化成的阶梯形矩阵中，非零行的数目 $r < n$ ③ n 元齐次线性方程组如果方程的数目 $s < n$ ，则它一定有非零解
数域	① 数域的定义 ② 任一数域都包含有理数域

课后习题全解

习题 1.1

1. 解下列线性方程组：

$$(1) \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3, \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 = -9, \\ -x_2 + 4x_3 = -7; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 7, \\ 3x_1 + 7x_2 + x_3 = -8, \\ -x_1 - 4x_2 + x_3 = 10; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 6, \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 + 5x_4 = 0, \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = -12, \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 = 2; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 7x_3 = -8, \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4, \\ -3x_1 - 7x_2 - 2x_3 = -3, \\ x_1 + 4x_2 - 12x_3 = -15; \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -11, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 1, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$

【知识点】 求解线性方程组.

【思路】 利用矩阵的初等行变换.

【解】 (1) 原方程组的增广矩阵为:
$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -4 & -9 \\ -1 & 4 & -1 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{③} + \text{①}]{\text{②} + 2\text{①}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & -8 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{②} \leftrightarrow \text{③}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & -5 & -8 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{③} + 5\text{②}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -23 & -23 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{23}\text{③}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

故原方程组的解为
$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

(2) 原方程组的增广矩阵为:
$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 1 & -8 \\ -1 & -4 & 1 & 10 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\textcircled{2} + (-2)\textcircled{1} \\ \textcircled{3} + (-3)\textcircled{1} \\ \textcircled{4} + \textcircled{1}}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -5 & -11 \\ 0 & -1 & 3 & 11 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\textcircled{3} + (-2)\textcircled{2} \\ \textcircled{4} + (-1)\textcircled{2}}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{\textcircled{3} \leftrightarrow \textcircled{4}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\textcircled{4} + \frac{7}{2}\textcircled{3} \\ \frac{1}{2}\textcircled{3}}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

故原方程组的解为
$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

(3) 原方程组的增广矩阵为:
$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & -3 & -2 & -1 & 6 \\ 3 & -8 & 1 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 1 & -12 \\ -1 & 4 & -1 & -3 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\textcircled{2} + (-3)\textcircled{1} \\ \textcircled{3} + 2\textcircled{1} \\ \textcircled{4} + \textcircled{1}}}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & -3 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & -18 \\ 0 & -5 & -8 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & 8 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\textcircled{3} + 5\textcircled{2} \\ \textcircled{4} + (-1)\textcircled{2}}}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & -18 \\ 0 & 0 & 27 & 39 & -90 \\ 0 & 0 & -10 & -12 & 26 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\frac{1}{3} \textcircled{3} \\ (-\frac{1}{2}) \textcircled{4}}} \\
 & \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & -18 \\ 0 & 0 & 9 & 13 & -30 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & -13 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{4} + (-\frac{5}{9}) \textcircled{3}} \\
 & \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & -18 \\ 0 & 0 & 9 & 13 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{11}{9} & \frac{11}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{9}{11} \textcircled{4}} \\
 & \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & -18 \\ 0 & 0 & 9 & 13 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

故原方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = -3 \end{cases}$$

(4) 原方程组的增广矩阵为:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 & -8 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ -3 & -7 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & -12 & -15 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\textcircled{3} + 3\textcircled{1} \\ \textcircled{4} + (-1)\textcircled{1}}} \\
 & \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 & -8 \\ 0 & -1 & 18 & 20 \\ 0 & 2 & -23 & -27 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} \leftrightarrow \textcircled{4}} \\
 & \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & -5 & -8 \\ 0 & 2 & -23 & -27 \\ 0 & -1 & 18 & 20 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\textcircled{3} - 2\textcircled{2} \\ \textcircled{4} + \textcircled{2}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & -13 & -13 \\ 0 & 0 & 13 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{4} + \textcircled{3}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & -13 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{13}\textcircled{3}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

故原方程组的解为 $\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$

(5) 原方程组的增广矩阵为: $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -11 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \textcircled{2} + (-1)\textcircled{1} \\ \textcircled{3} + (-1)\textcircled{1} \end{matrix}}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & 5 & -15 \\ 0 & 5 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{4} + 2\textcircled{2}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & 5 & -15 \\ 0 & 5 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & -5 & 11 & -33 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \textcircled{2} \leftrightarrow \textcircled{4} \\ \textcircled{3} + 5\textcircled{2} \\ \textcircled{4} + 3\textcircled{2} \end{matrix}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & 11 & -33 \\ 0 & 0 & -28 & 60 & -168 \\ 0 & 0 & -19 & 38 & -114 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \textcircled{3} \leftrightarrow \textcircled{4} \\ \frac{1}{19}\textcircled{3} \\ -\frac{1}{4}\textcircled{4} \end{matrix}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & 11 & -33 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 7 & -15 & 42 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (-1)\textcircled{2} \\ (-1)\textcircled{3} \\ \textcircled{4} + (-7)\textcircled{3} \end{matrix}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -11 & 33 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

故原方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = -8 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 6 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

点评:利用矩阵的初等行变换能简单直观地解出线性方程组的解.

2. 一个投资者想把 1 万元投入给 3 个企业, A_1, A_2, A_3 , 所得的利润分别 12%, 15%, 22%. 他想得到 2000 元的利润.

(1) 如果投入给 A_2 的钱是投给 A_1 的 2 倍, 那么应当分别给 A_1, A_2, A_3 投资多少?

(2) 可不可以投给 A_3 的钱等于投给 A_1 与 A_2 的钱的和?

【知识点】 线性方程组的应用

【思路】 建立线性方程组

【解】(1) 设投给 A_1, A_2, A_3 的钱分别为 x_1 元, x_2 元, x_3 元, 由题意得方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10000 \\ 0.12x_1 + 0.15x_2 + 0.22x_3 = 2000 \\ x_2 = 2x_1 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5000}{6} \\ x_2 = \frac{5000}{3} \\ x_3 = 7500 \end{cases}$$

(2) 由题意得方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10000 \\ 0.12x_1 + 0.15x_2 + 0.22x_3 = 2000 \\ x_1 + x_2 = x_3 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x_1 = -5000 \\ x_2 = 10000 \\ x_3 = 5000 \end{cases}$$

不成立,所以不可以投给 A_3 的钱等于投给 A_1 和 A_2 的钱的和.

3. 解线性方程组:

$$(1) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 6, \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 5, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -2 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 6, \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 5, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 11 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 7, \\ -x_2 + 12x_2 + 7x_3 = -5, \\ x_1 + 16x_2 + 13x_3 = -1 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 7, \\ -x_2 + 12x_2 + 7x_3 = -5, \\ x_1 + 16x_2 + 13x_3 = 1 \end{cases}$$

【知识点】 求解线性方程组.

【思路】 系数矩阵的初等行变换.

【解】 (1) 由题意得增广矩阵为 $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 & 6 \\ -3 & 1 & 2 & -4 & 5 \\ -1 & -2 & 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

因 $R(A) \neq R(A|b)$, 由解的判定定理可知, 方程组无解.

(2) 由题意得增广矩阵为: $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 & 6 \\ -3 & 1 & 2 & -4 & 5 \\ -1 & -2 & 3 & 1 & 11 \end{bmatrix} \rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由此可知, 原方程组有无穷多个解, 通解为:

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - x_4 - 3 \\ x_2 = x_3 + x_4 - 4 \end{cases}$$