高联考研

2008年 李永乐·李正元 考研数学 7

数学

数学四

历年试题解析

○主编 清 华 大 学 李永乐
北京交通大学 赵达夫
中国人民大学 袁荫棠

国家行政学院出版社

2008年李永乐·李正元考研数学⑦

数学历年试题解析

【数学四】

主编　北京交通大学　赵达夫
清华大学　李永乐
中国人民大学　袁荫棠

编者　（按姓氏笔画）
北京大学　李正元
清华大学　李永乐
北京大学　刘西垣
中国人民大学　严颖
北京大学　范培华
北京交通大学　赵达夫
中国人民大学　袁荫棠
空军雷达学院　徐宝庆
东北财经大学　龚兆仁
天津财经学院　鹿立江

国家行政学院出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学历年试题解析.4/赵达夫,李永乐,袁荫棠主编.—北京:国家行政学院出版社,2004
(考研系列)
ISBN 978-7-80140-325-4

I. 数... II. ①赵... ②李... ③袁... III. 高等数学-研究生-入学考试-解题 IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 004488 号

书　　名	数学历年试题解析[数学四]
作　　者	赵达夫　李永乐　袁荫棠
责任编辑	李锦慧
出版发行	国家行政学院出版社
	(北京市海淀区长春桥路 6 号　100089)
电　　话	(010)88517082
经　　销	新华书店
印　　刷	北京市朝阳印刷厂
版　　次	2007 年 2 月北京第 4 版
印　　次	2007 年 2 月北京第 1 次印刷
开　　本	787 毫米×1092 毫米　16 开
印　　张	19
字　　数	500 千字
书　　号	ISBN 978-7-80140-325-4/O·32
定　　价	25.00 元

前　言

（一）

对于数学考试而言，试卷本身就是一份量表，它是《数学考试大纲》规定的考试内容和考试要求的具体体现。全国硕士研究生数学入学考试统考试题是广大数学教师及参加命题的专家、教授智慧和劳动的结晶，是一份宝贵的资料。每一道试题，既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求，又蕴涵着命题的指导思想、基本原则和趋势，因此，对照《数学考试大纲》分析、研究这些试题不仅可以展示出统考以来数学考试的全貌，便于广大考生了解有关试题和信息，从中发现规律，归纳出每部分内容的重点、难点及常考的题型，进一步把握考试的特点及命题的思路和规律，而且通过反复做历年试题，发现问题，找出差距，以便广大考生能及时查漏补缺，通过研究历年试题，也便于广大考生明确复习方向，从而从容应考，轻取高分。

（二）

本书汇集了 1989 年 ~2007 年历届全国硕士研究生入学统考数学四试题，而且对所有试题均给出了详细解答，并尽量做到一题多解。有很多试题的解法是我们几位编者从事教学和考研辅导研究总结出来的，具有独到之处。其中有些试题的解法比标准答案的解法更简捷、更省时省力。本套书在对历年考研数学试题逐题解答的基础上，每题都给出了分析或评注，不仅对每题所考知识点或难点进行了分析，而且对各种题型的解法进行了归纳总结，使考生能举一反三，触类旁通；同时通过具体试题，指出了考生在解题过程中出现的有关问题和典型错误，并点评错因，使考生引以为戒。

本书把历年考研数学四试题依据考试大纲的顺序，按试题考查内容分章，这样与考生复习数学的顺序保持一致，便于考生系统复习使用。每章按以下内容编写：

编者按——总体说明历年试题在本章所考查的重要知识点、常考题型及所占总分比例，便于考生在宏观上把握重点。

题型分类解析——将历年同一内容的试题归纳在一起，并进行详细解答。这样便于考生复习该部分内容时了解到：该题型考过什么样的题目，是从哪个角度来命制题的，并常与哪些知识点联系起来命题等等，从而掌握考研数学试题的广度和深

度，做到复习时目标明确，心中有数。而且把历年同一内容的试题放在一起，我们可以发现近几年的考题中有许多与往年试题类似，因此研究往年的考题对我们准备下一年的研究生数学考试是不言而喻的。

另外，每种题型后附有**综述**——归纳总结该题型解题思路、方法和技巧，并举例说明。

（三）

本书给准备报考研究生的考生提供了锻炼自己解题能力和测验自己数学水平的机会。编者建议准备报考研究生的考生在阅读本书时，应先看《数学考试大纲》，以便明确考试的有关要求，接着去认真阅读有关教材和参考书（推荐考生认真阅读由**国家行政学院出版社**出版、**范培华**、**李永乐**、**袁荫棠**等主编的**《考研数学复习全书》（经济类）**，该书对考试大纲中所要求的基本概念、基本公式、基本定理讲解详细，各类题型的解题思路、方法和技巧归纳到位，与考研命题思路较吻合），复习完后，再来看本书的试题，以检验自己的水平。在看本书试题时，应该先自己动手做题，然后将自己所得的结果与本书的解法作以比较，看哪些自己做对了，哪些自己做错了，为什么会做错，可以与你的同学、同事和老师研讨。建议考生把本书中的全部试题做 2 ~ 3 遍，直到对所有的题目一见到就能够熟练地、正确地解答出来的程度。

（四）

本书由北京交通大学 **赵达夫**、清华大学 **李永乐**、中国人民大学 **袁荫棠**担任主编。参本书编写的有：清华大学 **李永乐**、北京大学 **李正元**、**刘西垣**、**范培华**、中国人民大学 **袁荫棠**、**严颖**、北京交通大学 **赵达夫**、东北财经大学 **龚兆仁**、天津财经学院 **鹿立江**、空军雷达学院 **徐宝庆**。

本书在编写、编辑和出版过程中，尽管我们抱着对广大考生认真负责的精神，高质量、严要求，但由于时间紧、任务重，加上我们水平有限，难免有许多不足、不尽人意之处。敬请广大读者和专家同行不吝赐教、批评指正。

祝考生复习顺利，心想事成，考研成功！

编者

2007 年 2 月

目　　录

第一篇　2007 年考研数学四试题及答案与解析

第二篇　1989 ~ 2006 年考研数学四试题

第三篇　1989～2006 年考研数学四试题分类解析

第一篇　2007 年考研数学四试题及答案与解析

2007 年考研数学四试题

一、选择题:1 ~ 10 小题,每小题 4 分,共 40 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的. 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 当 $x\to 0^+$ 时,与$\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是

(A) $1-e^{\sqrt{x}}$.　　(B) $\ln(1+\sqrt{x})$.

(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$.　　(D) $1-\cos\sqrt{x}$.

【　　】

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,下列命题错误的是

(A) 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$存在,则 $f(0)=0$.　　(B) 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$存在,则 $f(0)=0$.

(C) 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$存在,则 $f'(0)$ 存在.　　(D) 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$存在,则 $f'(0)$ 存在.

【　　】

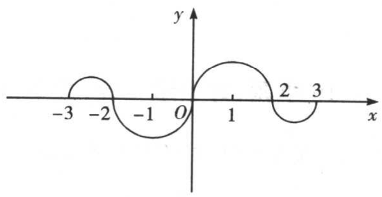
(3) 如图,连续函数 $y=f(x)$ 在区间$[-3,-2]$,$[2,3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周,在区间$[-2,0]$,$[0,2]$ 上的图形分别是直径为 2 的上、下半圆周. 设 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$,则下列结论正确的是

(A) $F(3)=-\dfrac{3}{4}F(-2)$.

(B) $F(3)=\dfrac{5}{4}F(2)$.

(C) $F(-3)=\dfrac{3}{4}F(2)$.

(D) $F(-3)=-\dfrac{5}{4}F(-2)$.



【　　】

(4) 设函数 $f(x,y)$ 连续,则二次积分$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dx\int_{\sin x}^{1}f(x,y)\,dy$ 等于

(A) $\int_0^1 dy\int_{\pi+\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\,dx$.　　(B) $\int_0^1 dy\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\,dx$.

(C) $\int_0^1 dy\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y}f(x,y)\,dx$.　　(D) $\int_0^1 dy\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)\,dx$.

【　　】

(5) 设某商品的需求函数为 $Q=160-2p$,其中 Q,p 分别表示需要量和价格,如果该商品需求弹性的绝对值等于 1,则商品的价格是

(A) 10.　　(B) 20.　　(C) 30.　　(D) 40.

【　】

(6) 曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^{x})$ 渐近线的条数为

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

【　】

(7) 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,则下列向量组线性相关的是

(A) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$.　　(B) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$.

(C) $\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1$.　　(D) $\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1$.

【　】

(8) 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$,则 A 与 B

(A) 合同,且相似.　　(B) 合同,但不相似.

(C) 不合同,但相似.　　(D) 既不合同,也不相似.

【　】

(9) 某人向同一目标独立重复射击,每次射击命中目标的概率为 $p(0<p<1)$,则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为

(A) $3p(1-p)^2$.　　(B) $6p(1-p)^2$.

(C) $3p^2(1-p)^2$.　　(D) $6p^2(1-p)^2$.

【　】

(10) 设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布,且 X 与 Y 不相关,$f_X(x)$,$f_Y(y)$ 分别表示 X,Y 的概率密度,则在 $Y=y$ 的条件下,X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x\mid y)$ 为

(A) $f_X(x)$.　　(B) $f_Y(y)$.　　(C) $f_X(x)f_Y(y)$.　　(D) $\frac{f_X(x)}{f_Y(y)}$.

【　】

二、填空题:11 ~ 16 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=$ ________.

(12) 设函数 $y=\frac{1}{2x+3}$,则 $y^{(n)}(0)=$ ________.

(13) 设 $f(u,v)$ 是二元可微函数,$z=f\left(\frac{y}{x},\frac{x}{y}\right)$,则 $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

(14) 微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^3$ 满足 $y|_{x=1}=1$ 的特解为 $y=$ ________.

(15) 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$,则 A^3 的秩为________.

(16) 在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数,则两数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率为________.

三、解答题:17 ~ 24 小题,共 86 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y\ln y - x + y = 0$ 确定,试判断曲线 $y = y(x)$ 在点 $(1,1)$ 附近的凹凸性.

(18)(本题满分 11 分)

设二元函数

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2, & |x| + |y| \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & 1 < |x| + |y| \leqslant 2. \end{cases}$$

计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$,其中 $D = \{(x,y) \mid |x| + |y| \leqslant 2\}$.

(19)(本题满分 11 分)

设函数 $f(x)$,$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内二阶可导且存在相等的最大值,又 $f(a) = g(a)$,$f(b) = g(b)$. 证明:

(Ⅰ)存在 $\eta \in (a,b)$,使得 $f(\eta) = g(\eta)$;

(Ⅱ)存在 $\xi \in (a,b)$,使得 $f''(\xi) = g''(\xi)$.

(20)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 具有连续的一阶导数,且满足

$$f(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) f'(t)\,\mathrm{d}t + x^2,$$

求 $f(x)$ 的表达式.

(21)(本题满分 11 分)

设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases} \qquad ①$$

与方程

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \qquad ②$$

有公共解,求 a 的值及所有公共解.

(22)(本题满分 11 分)

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$,$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_1 的一个特征向量. 记 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^5 - 4\boldsymbol{A}^3 + \boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(Ⅰ)验证 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量,并求 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值与特征向量;

(Ⅱ)求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

(23)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1,0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（Ⅰ）求 $P\{X>2Y\}$；

（Ⅱ）求 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

（24）（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 独立同分布，且 X 的概率分布为

X	1	2
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

，

记 $U=\max\{X,Y\}$，$V=\min\{X,Y\}$.

（Ⅰ）求 (U,V) 的概率分布；

（Ⅱ）求 U 与 V 的协方差 $\mathrm{Cov}(U,V)$.

2007 年考研数学四试题答案与解析

一、选择题

（1）**【分析】** 因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}=1$，所以当 $x\to0^+$ 时，$\ln(1+\sqrt{x})$ 与 $\sqrt{x}$ 是等价的无穷小量，故应选（B）.

评注 $x\to0^+$ 时，$1-e^{\sqrt{x}}\sim-\sqrt{x}$，$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1=(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}-1\sim\frac{1}{2}\sqrt{x}$，$1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{1}{2}x$.

（2）**【分析】** 取 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$，则 $f(-x)=f(x)$ 且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，$f(0)=0$. 由于

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(-x)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{0}{x}=0\text{（存在）},$$

但
$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x}=\infty\text{（不存在）},$$

故（D）错误，应选（D）.

评注 因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，又 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，所以有 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0=f(0)$，故（A）对. 又由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，所以有

$$\lim_{x\to0}(f(x)+f(-x))=f(0)+f(-0)=2f(0)=0，\text{则 } f(0)=0,$$

故（B）也对. 最后由

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\text{ 存在，所以 } f'(0)\text{ 存在且 } f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}.$$

注意题目大前提 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以（C）也对. 由排除法应选（D）.

（3）**【分析】** 由定积分的几何意义

$$F(2)=\int_0^2 f(t)\,dt=\frac{1}{2}\pi\cdot 1^2=\frac{1}{2}\pi,$$

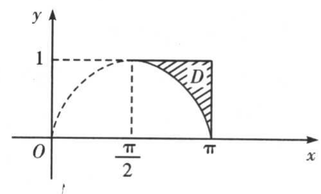
$$F(-3)=\int_0^{-3} f(t)\,dt=-\int_{-3}^{0} f(t)\,dt=-\left[\int_{-3}^{-2} f(t)\,dt+\int_{-2}^{0} f(t)\,dt\right]$$

$$=-\left[\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\pi\right]=\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{2}\pi=\frac{3}{4}F(2),$$

故应选(C).

评注 本题实质上是考查定积分的几何意义.

(4)**【分析】** 设二次积分$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dx\int_{\sin x}^{1}f(x,y)\,dy=\iint\limits_{D}f(x,y)\,d\sigma$,则积分区域$D=\{(x,y)\mid\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi,$ $\sin x\leqslant y\leqslant 1\}$,如图.



在区域D中最高点的纵坐标$y=1$,最低点的纵坐标$y=0$,左边界的方程是$x=\pi-\arcsin y$,右边界的方程是$x=\pi$,故D又可以表示成$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1,\pi-\arcsin y\leqslant x\leqslant\pi\}$,于是交换积分次序得

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dx\int_{\sin x}^{1}f(x,y)\,dy=\int_0^1 dy\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\,dx.$$

故应选(B).

评注 $y=\sin x$的反函数的表达式与x的取值范围有关.当$-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$时$y=\sin x$的反函数是$x=\arcsin y$.当$|x|>\frac{\pi}{2}$时必须先把$y=\sin x$化为自变量取值在$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上的相应的正弦函数之后再求其反函数.在本题中$x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$,于是$\pi-x\in[0,\frac{\pi}{2}]$且$\sin x\equiv\sin(\pi-x)$,即$y=\sin x\Leftrightarrow y=\sin(\pi-x)$且$\pi-x\in[0,\frac{\pi}{2}]$,故取反函数得$\pi-x=\arcsin y$即$x=\pi-\arcsin y$.

(5)**【分析】** 由需求弹性公式及题目已知需要弹性的绝对值等于1,有

$$|E|=\left|\frac{p}{Q}Q'(p)\right|=\frac{2p}{160-2p}=1,\text{所以}$$

$2p=160-2p,4p=160,p=40$ 故应选(D).

(6)**【分析】** 因为

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right)=0$,所以$y=0$是一条水平渐近线.又因为

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right)=\infty$,所以$x=0$是一条铅直渐近线.因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{e^x}{1+e^x}\right)=1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(1+e^x)-\ln e^x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{1+e^x}{e^x}=\ln 1=0,$$

所以$y=x$是一条斜渐近线.故应选(D).

评注 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right)=0$ 说明 $x\to-\infty$ 时，$y=0$ 是曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 的一条水平渐近线，不排除 $x\to+\infty$ 时，曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 有斜渐近线 $y=x$.

(7)【分析】 因为
$$(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{0},$$
所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关，故应选(A).

至于(B)、(C)、(D) 的线性无关性可以用$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{C}$ 的方法来处理. 例如，
$$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix},$$
由于 $\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq0$，故知 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

(8)【分析】 根据相似的必要条件：$\sum a_{ii}=\sum b_{ii}$，易见 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 肯定不相似. 由此可排除(A) 与(C).

而合同的充分必要条件是有相同的正惯性指数、负惯性指数. 为此可以用特征值来加以判断. 由
$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&1\\1&\lambda-2&1\\1&1&\lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&\lambda&\lambda\\1&\lambda-2&1\\1&1&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)^2,$$
知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 3,3,0. 故二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的正惯性指数 $p=2$，负惯性指数 $q=0$. 而二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 的正惯性指数亦为 $p=2$，负惯性指数 $q=0$，所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同. 故应选(B).

(9)【分析】 设事件 A =“第 4 次射击恰好第 2 次命中目标”，则 A 表示共射击 4 次，其中前 3 次只有 1 次击中目标，且第 4 次击中目标. 因此
$$P(A)=C_3^1p(1-p)^2\cdot p=3p^2(1-p)^2.$$
应选(C).

(10)【分析】 由于(X,Y) 服从二维正态分布，因此从 X 与 Y 不相关可知 X 与 Y 相互独立. 于是有
$$f_{X|Y}(x\mid y)=f_X(x).$$
应选(A).

若仔细分析，由于 X 与 Y 不相关，即 $\rho=0$，因此(X,Y) 的联合密度为
$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}.$$
而 X,Y 的边缘概率密度分别为
$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},\quad f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},$$
$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}=f_X(x).$$
也知应选(A).

评注 本题主要考查二维正态分布的性质,我们知道对于任意两个随机变量X,Y不相关仅仅是X与Y独立的必要条件.但是对于二维正态分布,X与Y不相关是X,Y独立的充分必要条件.

二、填空题

(11)【**分析**】 由于$|\sin x+\cos x|\leqslant 2$,又因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+2x}{2^x\cdot\ln 2+3x^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x+2}{2^x(\ln 2)^2+6x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{2^x(\ln 2)^3+6}=0,$$

所以 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=0.$$

评注 有界函数与无穷小量乘积仍是无穷小量,其极限为零.

(12)【**分析**】 由$y=(2x+3)^{-1}$有$y'(x)=(-1)2(2x+3)^{-2}$,$y''(x)=(-1)(-2)2^2(2x+3)^{-3}$,$y^{(3)}(x)=(-1)(-2)(-3)2^3(2x+3)^{-4}$,$\cdots$,所以有$y^{(n)}(x)=(-1)^n n!2^n(2x+3)^{-(n+1)}$,故

$$y^{(n)}(0)=\frac{(-1)^n 2^n n!}{3^{n+1}}.$$

(13)【**分析**】 $z=f(\frac{y}{x},\frac{x}{y})$且$f(u,v)$是二元可微函数,由多元复合函数求导法则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}f_1'+\frac{1}{y}f_2',\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}f_1'-\frac{x}{y^2}f_2'.$$

所以 $$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{x}f_1'+\frac{x}{y}f_2'-\frac{y}{x}f_1'+\frac{x}{y}f_2'$$

$$=(-\frac{y}{x}-\frac{y}{x})f_1'+(\frac{x}{y}+\frac{x}{y})f_2'=-\frac{2y}{x}f_1'+\frac{2x}{y}f_2',$$

其中$f_1'=\frac{\partial f}{\partial u},f_2'=\frac{\partial f}{\partial v},u=\frac{y}{x},v=\frac{x}{y}$.

(14)【**分析**】 这是齐次微分方程.令$\frac{y}{x}=u,y=xu,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.代入原方程有

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u-\frac{1}{2}u^3,\text{即 } x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{2}u^3.$$

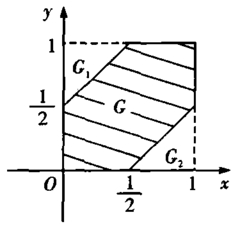
分离变量有:$\frac{\mathrm{d}u}{u^3}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}$,两边积分有 $-\frac{1}{2}u^{-2}=-\frac{1}{2}\ln|x|+\ln c$.

由$y(1)=1$,有$u=1,c=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$,所以$-\frac{1}{2}u^{-2}=-\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{2}$即所求特解为

$$\frac{x^2}{y^2}=\ln x+1.\text{化简有 } y=\frac{x}{\sqrt{1+\ln x}}.$$

(15)【**分析**】 因为$\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A}^3=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$,可知秩$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^3)=1$.

(16)【分析】 这是一个几何型概率的计算题．设所取的两个数分别为 x 和 y，则以 x 为横坐标以 y 为纵坐标的点 (x,y) 随机地落在边长为1的正方形内（如图所示），设事件 A 表示"所取两数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$"，则样本空间 $\Omega=\{(x,y):0<x<1,0<y<1\}$；事件 A 的样本点集合为区域 G 中所有的点，而 $G=\{(x,y):0<x<1,0<y<1,|y-x|<\frac{1}{2}\}$．区域 Ω 的面积 $S_\Omega=1$，区域 G 的面积



$$S_G=S_\Omega-S_{G_1}-S_{G_2}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

因此 $$P(A)=\frac{S_G}{S_\Omega}=\frac{3}{4}.$$

三、解答题

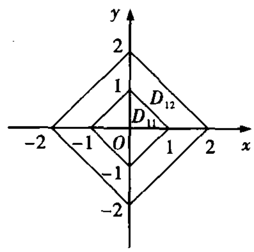
(17)【解】 由 $x=y\ln y+y$ 有 $x'(y)=\ln y+1+1=2+\ln y$，则

$$y'(x)=\frac{1}{2+\ln y},\quad y''(x)=-\frac{1}{y(2+\ln y)^2}\cdot y'(x)=-\frac{1}{y(2+\ln y)^3}.$$

由 $y(1)=1$ 有 $y''(1)=-\frac{1}{2^3}<0$ 且 $y''(x)$ 在 $x=1$ 连续，由保号性定理，在 $x=1$ 附近 $y''(x)<0$．所以曲线 $y=y(x)$ 在点 $(1,1)$ 附近也有 $y''(x)<0$，故曲线 $y=y(x)$ 在点 $(1,1)$ 附近是凸的．

---

(18)【解】 积分区域 D 如图．不难发现 D 分别关于 x 轴和 y 轴对称，设 D_1 是 D 在第一象限中的部分，即 $$D_1=D\cap\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0\}.$$



利用被积函数 $f(x,y)$ 无论关于 x 还是关于 y 都是偶函数，从而按二重积分的简化计算法则可得

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=4\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

设 $D_1=D_{11}+D_{12}$，其中 $D_{11}=\{(x,y)\mid x+y\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$，$D_{12}=\{(x,y)\mid 1\leqslant x+y\leqslant 2,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$，于是

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=4\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma=4\iint\limits_{D_{11}}f(x,y)\mathrm{d}\sigma+4\iint\limits_{D_{12}}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$
$$=4\iint\limits_{D_{11}}x^2\mathrm{d}\sigma+4\iint\limits_{D_{12}}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

由于 $D_{11}=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1-x\}$，故

$$\iint\limits_{D_{11}}x^2\mathrm{d}\sigma=\int_0^1x^2\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y=\int_0^1x^2(1-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}.$$

为计算 D_{12} 上的二重积分，可引入极坐标系 (r,θ) 满足 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$．在极坐标系 (r,θ) 中 $x+y=1$ 的方程是 $r=\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}$，$x+y=2$ 的方程是 $r=\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}$，因而 $D_{12}=\{(r,\theta)\mid 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\leqslant r\leqslant\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}\}$，故

$$\iint\limits_{D_{12}}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{x^2+y^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}}\frac{r}{r}\mathrm{d}r=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta+\sin\theta}.$$

令 $\tan\frac{\theta}{2}=t$ 作换元，则 $\theta=2\arctan t$，于是 $\theta:0\to\frac{\pi}{2}\iff t:0\to 1$ 且 $\mathrm{d}\theta=\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$，$\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，

$\sin\theta = \dfrac{2t}{1+t^2}$,代入即得

$$\iint\limits_{D_{12}} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta+\sin\theta} = \int_0^1 \frac{2\mathrm{d}t}{1+2t-t^2} = \int_0^1 \frac{2\mathrm{d}t}{2-(1-t)^2}$$

$$\xlongequal{1-t=u} -\int_1^0 \frac{2\mathrm{d}u}{2-u^2} = \int_0^1 \frac{2\mathrm{d}u}{2-u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}-u} + \frac{1}{\sqrt{2}+u}\right)\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+u}{\sqrt{2}-u}\right|\Bigg|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1).$$

综合以上计算结果可知

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = 4\times\frac{1}{12} + 4\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1) = \frac{1}{3} + 4\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1).$$

---

(19)【证明】(Ⅰ) 设 $f(x)$,$g(x)$ 在 (a,b) 上最大值为 M,且 $M = f(x_1)$,$M = g(x_2)$,$x_1,x_2 \in (a,b)$.

若 $x_1 = x_2$,则取 $\eta = x_1$,结论显然成立.

若 $x_1 \neq x_2$,不仿设 $x_1 < x_2$,令 $F(x) = f(x) - g(x)$,显然 $F(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续,且

$$F(x_1) = f(x_1) - g(x_1) = M - g(x_1) \geqslant 0,$$

$$F(x_2) = f(x_2) - g(x_2) = f(x_2) - M \leqslant 0,$$

所以至少存在一点 $\eta \in [x_1,x_2]$,使 $F(\eta) = 0$,即 $f(\eta) = g(\eta)$,其中 $\eta \in [x_1,x_2] \subset (a,b)$.

(Ⅱ) 令 $F(x) = f(x) - g(x)$,由已知,$f(a) = g(a)$,$f(b) = g(b)$,及由(Ⅰ)的结论得到

$$F(a) = F(\eta) = F(b),\text{其中 } \eta \in (a,b).$$

对 $F(x)$ 在 $[a,\eta]$,$[\eta,b]$ 上分别由罗尔中值定理有:至少存在一点 $\xi_1 \in (a,\eta)$,$\xi_2 \in (\eta,b)$,使 $F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$. 对 $F'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上再应用罗尔中值定理有,至少存在一点 $\xi \in (\xi_1,\xi_2) \subset (a,b)$,使 $F''(\xi) = 0$,即 $f''(\xi) = g''(\xi)$,其中 $\xi \in (a,b)$.

---

(20)【解】 因为函数 $f(x)$ 具有连续的一阶导数,且满足 $f(x) = \int_0^x (x^2-t^2)f'(t)\mathrm{d}t + x^2$,令 $x = 0$ 有 $f(0) = 0$. 又因为

$$f(x) = x^2\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t - \int_0^x t^2 f'(t)\mathrm{d}t + x^2,$$

所以

$$f(x) = x^2 f(t)\Big|_0^x - t^2 f(t)\Big|_0^x + 2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t + x^2$$

$$= x^2 f(x) - x^2 f(x) + 2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t + x^2,$$

即有

$$f(x) = x^2 + 2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t.$$

上式两边对 x 求导有:$f'(x) = 2x + 2xf(x)$,即 $\begin{cases} f'(x) - 2xf(x) = 2x, \\ f(0) = 0. \end{cases}$

解得 $$f(x) = \mathrm{e}^{\int 2x\mathrm{d}x}\left(\int 2x\mathrm{e}^{-\int 2x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + c\right) = \mathrm{e}^{x^2}(-\mathrm{e}^{-x^2} + c).$$

由 $f(0) = 0$,可知 $c = 1$,所以 $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}(1 - \mathrm{e}^{-x^2}) = \mathrm{e}^{x^2} - 1$.

评注 本题是涉及到变上限积分函数求导及求解一阶线性微分方程的综合题.

---

(21)【解】 将 ① 与 ② 联立,加减消元有

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&0\\1&2&a&0\\1&4&a^2&0\\1&2&1&a-1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&0\\0&1&a-1&0\\0&3&a^2-1&0\\0&1&0&a-1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&0\\0&1&a-1&0\\0&0&(a-1)(a-2)&0\\0&0&1-a&a-1\end{array}\right],$$

如果 $a=1$,则 $\overline{A}\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$. 从而方程组的通解为 $k(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$. 即是方程组 ① 与 ② 的公共解.

如果 $a=2$,则 $\overline{A}\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&0\end{array}\right]$. 从而方程组的解为 $(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$. 即是方程组 ① 与 ② 的公共解.

---

(22)【解】 (Ⅰ) 由 $A\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 知 $A^n\boldsymbol{\alpha}=\lambda^n\boldsymbol{\alpha}$. 那么

$$\boldsymbol{B\alpha}_1=(\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{A}^5\boldsymbol{\alpha}_1-4\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_1=(\lambda_1^5-4\lambda_1^3+1)\boldsymbol{\alpha}_1=-2\boldsymbol{\alpha}_1,$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 属于特征值 $\mu_1=-2$ 的特征向量.

类似地,若 $\boldsymbol{A\alpha}_2=\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3=\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3$,有

$$\boldsymbol{B\alpha}_2=(\lambda_2^5-4\lambda_2^3+1)\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{B\alpha}_3=(\lambda_3^5-4\lambda_3^3+1)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_3,$$

因此,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\mu_1=-2,\mu_2=\mu_3=1$.

由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵知矩阵 $\boldsymbol{B}$ 也是对称矩阵,设矩阵 $\boldsymbol{B}$ 属于特征值 $\mu=1$ 的特征向量是 $\boldsymbol{\beta}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$,那么

$$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=x_1-x_2+x_3=0.$$

所以矩阵 $\boldsymbol{B}$ 属于特征值 $\mu=1$ 的线性无关的特征向量是 $\boldsymbol{\beta}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

因而,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 属于特征值 $\mu_1=-2$ 的特征向量是 $k_1(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$,其中 k_1 是不为 0 的任意常数.

矩阵 $\boldsymbol{B}$ 属于特征值 $\mu=1$ 的特征向量是 $k_2(1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_3(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$,其中 k_2,k_3 是不全为 0 的任意常数.

(Ⅱ) 由 $\boldsymbol{B\alpha}_1=-2\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{B\beta}_2=\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{B\beta}_3=\boldsymbol{\beta}_3$ 有

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(-2\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3).$$

那么 $$\boldsymbol{B}=(-2\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}-2&1&-1\\2&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&-1\\-1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0&3&-3\\3&0&3\\-3&3&0\end{bmatrix}.$$

---

(23)【解法一】 (Ⅰ) $$P\{X>2Y\}=\iint\limits_{\substack{x>2y\\0<x<1,0<y<1}}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{2y}^{1}(2-x-y)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}-5y+4y^2\right)\mathrm{d}y=\frac{7}{24}.$$

(Ⅱ) 先求 $Z=X+Y$ 的分布函数,再求概率密度.

当 $z<0$ 时,$F_Z(z)=0$;当 $z\geqslant 2$ 时,$F_Z(z)=1$;

当 $0\leqslant z<1$ 时,如图