中央电视台专题讲座教材

初中数学奥林匹克
基础知识及题解

修订版·初二

陶文中主编

科学技术文献出版社

初中数学奥林匹克

基础知识及题解

修订版·初二

主　编　　陶文中

副主编　　齐振东　揭　英

　　　　　欧阳红兵

撰稿人　　凌文伟　金宝铮　陶文中

科学技术文献出版社

(京)新登字 130 号

初中数学奥林匹克
基础知识及题解
修订版·初二
陶文中　主编
科学技术文献出版社出版
(北京复兴路 15 号　邮政编码 100038)
北京市通县燕山印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售
*
787×1092 毫米　32 开本　10 印张　215 千字
1996 年 1 月第 2 版　　1996 年 1 月第 2 次印刷
印数：5001—8000 册
ISBN 7-5023-1877-1/G·471
定　价：10.00 元

前　言

近几年来，中小学数学奥林匹克方兴未艾。从 1986 年开始的全国“华罗庚金杯”少年数学竞赛算起，已举办了三届，吸引了全国百余万中小学生参加。规模之大令人瞩目。一年一度的全国初中数学联赛和高中数学联赛，已成为衡量我国中学生数学奥林匹克竞赛水平的权威性考试。从小爱数学，从小赛数学已在全国蔚成风气。

为了帮助中小学生的数学奥林匹克学习，在今后的数学竞赛中取得更好的成绩，我们结合多年数学奥校辅导的经验，在整理竞赛辅导讲义的基础上，编写了《小学数学奥林匹克基础知识及题解》、《初中数学奥林匹克基础知识及题解》及《高中数学奥林匹克基础知识及题解》这三套课外读物。这三套丛书共九册，其中小学四册（三、四、五、六年级各一册），初中三册（初一、初二、初三各一册），高中上、下两册。各册书紧密配合本年级的教学进度，选择基础性强，应用性广的重点教学内容作为专题。同时又根据数学竞赛的需要，开设竞赛数学专题讲座。力求做到选题典型、新颖，注意广度和深度，例题讲解富有启发性，注重从方法上，从能力培养的角度上多方 探究解题思路。每讲最后都有小结，便于读者掌握要领。同时还配备了一定数量的练习，并附提示与解答。

参加本书编写工作的有凌文伟(第一、三、四、六、七讲)、金宝铮(第二讲)、陶文中(其余各讲)。

我们希望这三套丛书能为提高中小学生数学能力水平有所裨益。书中如有疏漏或错误之处,欢迎读者批评指正。

编　者

1996 年 1 月

目 录

第一讲　完全平方数

在初中代数第三册中已给出完全平方数概念，即如果一个正数恰好是一个有理数的平方，那么这个正数叫做完全平方数。

在本讲中，我们所指的完全平方数是在整数集范围内，即如果一个正整数 a 是某一个整数 b 的平方，那么这个正整数 a 叫做完全平方数。零也可称为完全平方数。

完全平方数有许多有趣的性质。为了有利于读者自己归纳出这些性质，请先写出 1 至 25 的平方数，并进行观察、分析、概括，看看完全平方数是否具有下列特征性质？

一、完全平方数的性质

1. 完全平方数具有下列特征性质

(1)偶数的平方一定能被 4 整除，奇数的平方被 8 除余 1 (请读者自己证明)；

(2)如果一个自然数是完全平方数，那么它的个位数字只能是 0、1、4、5、6、9 中的一个；

(3)凡个位数字是 2、3、7、8 的自然数不是完全平方数；凡个位数字是 5 但末两位数字不是 25 的自然数不是完全平方数；末尾只有奇数个"0"的自然数不是完全平方数；个位数字为 1、4、9 而十位数字为奇数的自然数不是完全平方数。

这是因为，任何一个自然数的平方其末两位数字只有下

列 22 种情况：

00、01、21、41、61、81、04、24、44、64、84、

25、09、29、49、69、89、16、36、56、76、96。

(4)在相邻两个整数 n 与 $n+1$ 的平方，即 n^2 与 $(n+1)^2$ 之间不存在完全平方数。

(5)如果自然数 n 不是完全平方数，那么它的所有正因数的个数是偶数。如果自然数 n 是完全平方数，那么它的所有正因数的个数是奇数。

这是因为，如果 n 不是完全平方数，那么 $\sqrt{n}$ 就不是自然数。设自然数 a 是 n 的一个因数，则必存在一个自然数 b 使得 $ab=n$。

若 $a>\sqrt{n}$，则 $b=\frac{n}{a}<\frac{n}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}$

若 $a<\sqrt{n}$，则 $b=\frac{n}{a}>\frac{n}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}$

因此，n 大于 $\sqrt{n}$ 的正因数与小于 $\sqrt{n}$ 的正因数是一一对应的，即成对出现。所以，如果 n 不是完全平方数，那么它的所有正因数必有偶数个。

当 n 是完全平方数时，由于 $\sqrt{n}$ 也是 n 的一个正因数，用类似上面的推理可得出，这个完全平方数 n 的所有正因数的个数是奇数。

(6)任何一个大于 1 的完全平方数都可以分解成一个或几个质因数的偶次幂的乘积。

二、例题与解题方法

例 1 若 a、b 是整数，求证：$\frac{a^4+b^4+(a+b)^4}{2}$ 是完全平方数。

提示 原式 $=a^4+2a^3b+3a^2b^2+2ab^3+b^4$

$$=(a^2+ab+b^2)^2$$

例 2 试给出末位数字是 5 的两位数的平方的一个速算方法。

解 设任何一个末位数字是 5 的两位数的十位数字是 a，则这个两位数是 $10a+5$。

$$\because (10a+5)^2=100a^2+2\times10a\times5+25$$
$$=100a^2+100a+25$$
$$=100a(a+1)+25$$

所以要计算一个末位数字是 5 的两位数 $10a+5$ 的平方，只要将十位数字 a 乘上比 a 大 1 的数 $a+1$，然后在它的后面写上 25 就可得到所求的平方数。

例如 $35^2=3\times4\times100+25=1225$

$75^2=7\times8\times100+25=5625$

例 3 化简 $\sqrt{\underbrace{111\cdots1}_{2n\text{个}}-\underbrace{222\cdots2}_{n\text{个}}}$

解法 1 原式 $=\sqrt{\underbrace{111\cdots1}_{n\text{个}}\times10^n+\underbrace{111\cdots1}_{n\text{个}}-2\times\underbrace{111\cdots1}_{n\text{个}}}$

$$=\sqrt{\underbrace{111\cdots1}_{n\text{个}}(10^n+1-2)}$$

$$=\sqrt{\underbrace{111\cdots1}_{n\text{个}}\times\underbrace{999\cdots9}_{n\text{个}}}$$

$$=\sqrt{(\underbrace{333\cdots3}_{n\text{个}})^2}=\underbrace{333\cdots3}_{n\text{个}}$$

解法 2　原式$=\sqrt{\dfrac{10^{2n}-1}{9}-2\times\dfrac{10^n-1}{9}}$

$$=\sqrt{\frac{10^{2n}-2\times10^n+1}{9}}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{10^n-1}{3}\right)^2}=\underbrace{333\cdots3}_{n\text{个}}$$

例 4　是否存在自然数 x、y，使得 x^2+y 和 y^2+x 都是完全平方数？

思路分析　此题是属于证“存在性”的问题。由于对命题“x^2+y 和 y^2+x 都是完全平方数”的否定是“x^2+y 和 y^2+x 中至少有一个不是完全平方数”，如果后者为真命题，那么前者就被否定了。

解　不妨设 $x\geqslant y$。

$$\because\ x^2<x^2+y\leqslant x^2+x<x^2+2x+1=(x+1)^2$$

在 x^2 与 $(x+1)^2$ 之间不存在完全平方数，所以不存在这样的自然数，使得 x^2+y 和 y^2+x 都是完全平方数（注意：x^2+y 和 y^2+x 两者之中有一个为完全平方数是可能的）。

例 5　求证：任意五个连续正整数的平方和不是完全平方数。

思路分析　将五个连续正整数的平方和整理、化简后，是否可利用完全平方数的末尾数字的特征来解决？

证明　设任意五个连续正整数为 $n-2$、$n-1$、n、$n+1$、n

$+2$,则

$$(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2$$
$$=5(n^2+2)$$
$$=5n^2+10$$

欲使 $5(n^2+2)$是完全平方数,则需使 n^2+2 是 5 的倍数,即

$$n^2+2=5K \qquad (K\text{ 是正整数})$$
$$n^2=5K-2$$

所以,n^2 的个位数字应是 3 或 8,这与完全平方数的个位数字只能是 0、1、4、5、6、9 中的一个矛盾。因此,n^2+2 不可能是 5 的倍数。

所以,任意五个连续正整数的平方和不是完全平方数。

例 6 试证明一切形如 19、4489、444889、44448889、…、$\underbrace{444\cdots4}_{n\text{个}}\underbrace{88\cdots8}_{(n-1)\text{个}}9$ 的数都是完全平方数。

证明 $\underbrace{444\cdots4}_{n\text{个}}\underbrace{88\cdots8}_{(n-1)\text{个}}9$

$$=\underbrace{444\cdots4}_{n\text{个}}\times10^n+\underbrace{88\cdots88}_{n\text{个}}+1$$

$$=4\times\underbrace{111\cdots1}_{n\text{个}}\times10^n+8\times\underbrace{111\cdots1}_{n\text{个}}+1$$

$$=4\times\frac{10^n-1}{9}\times10^n+8\times\frac{10^n-1}{9}+1$$

$$=\frac{1}{9}[4(10^{2n}-10^n)+8(10^n-1)+9]$$

$$=\frac{1}{9}(4\times10^{2n}+4\times10^n+1)$$

$$=\frac{1}{9}(2\times10^n+1)^2$$

$$=[\frac{2(10^n-1)+3}{3}]^2$$

$$=(2\times\underbrace{333\cdots3}_{n\text{个}}+1)^2$$

$$=(\underbrace{666\cdots6}_{n\text{个}}+1)^2$$

这就是说，当 $n=1$ 时，$49=(6+1)^2=7^2$

当 $n=2$ 时，$4489=(66+1)^2=67^2$

当 $n=3$ 时，$444889=(666+1)^2=667^2$

…

例 7　求具有下列性质的最大平方数：在抹去它的个位数字和十位数字后仍是完全平方数（被抹去的两位数字不全为零）。

解　设所求数为 n^2，抹去其末两位数字得 k^2。

$\because$ n^2 的个位、十位数字不全为零，

$$\therefore\ 0<n^2-100k^2<100$$

由 $$n^2-100k^2>0,(n+10k)(n-10k)>0$$

又 $$\because\ n+10k>0,\therefore\ n-10k>0$$

$$n>10k,\text{即}\quad n\geqslant 10k+1$$

由 $$n^2-100k^2<100$$

得

$$100>n^2-100k^2$$

$$\geqslant(10k+1)^2-100k^2=20k+1$$

$$\therefore\ k\leqslant 4$$

当 $k=4$ 时，$n\geqslant 40+1=41$

$\because$ 当 $n=42$ 时，$42^2-100\times4^2=1764-1600=164>100$，与已知条件不符。

$\therefore$ 只有 $n=41$，此时 $n^2=1681$

又 $\because$ $41^2-100\times4^2=1681-1600=81<100$，合已知条件，

∴ 1681 为所求。

例 8　大厅内有 1991 盏关着的灯，每个灯有一个开关，它们依次编上号码 1、2、3、…1990，1991。现有 1991 名学生依次进入大厅，每人把自己所站位置的倍数编号的灯开关都按一下。问(1)最后哪些灯亮着？

(2)第 600 号灯的开关被按过几次？

思路分析　为了深刻理解题意，寻求解法的思路，不妨挑出编号为 1 至 10 的灯，亲手实践一下。

灯的编号		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
学生的编号	1	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	2		✓		✓		✓		✓		✓
	3			✓			✓			✓	
	4				✓				✓		
	5					✓					✓
	6						✓				
	7							✓			
	8								✓		
	9									✓	
	10										✓
最后结果		亮	关	关	亮	关	关	关	关	亮	关
开关次数		1	2	2	3	2	4	2	4	3	4

对这个实验记录进行认真的分析、研究，找出规律。

实验结果表明，编号为 1、4、9 的灯是亮着的，并且它们开关的次数都是奇数，这些奇数恰好是完全平方数 1、4、9 各自的正因数的个数。

解　因为开关被按过奇数次的灯才会亮，而只有完全平方数的所有正因数的个数是奇数。所以，最后编号是完全平方数的那些灯亮着。

$$\because\ 600=2^3\times3\times5^2$$

∴ 600 号灯被编号为：1，2，3，4，5，6，8，10，12，15，20，24，25，30，40，50，60，75，100，120，150，200，300，600 的学生按过开关，共按了二十四次。

例 9　某工厂的人数在某时为一完全平方数，稍后，增加100，人数比完全平方数要多1，现在，再增加100，人数再度为一完全平方数，则原来人数是哪个质数的倍数？

解　设最初工厂的人数为 n，则

$$\begin{cases} n=x^2 & ① \\ n+100=y^2+1 & ② \\ n+200=z^2 & ③ \end{cases}$$

（其中 x、y、z 为自然数）

②－①得　$y^2-x^2=99$

$$(y+x)(y-x)=99$$

$$\begin{cases} y+x=99 \\ y-x=1, \end{cases}\text{或}\begin{cases} y+x=33 \\ y-x=3 \end{cases}\text{或}\begin{cases} y+x=11 \\ y-x=9 \end{cases}$$

解得$\begin{cases} x_1=49 \\ y_1=50 \end{cases}$　$\begin{cases} x_2=15 \\ y_2=18 \end{cases}$　$\begin{cases} x_3=1 \\ y_3=10 \end{cases}$

当 $\begin{cases} x_1=49 \\ y_1=50 \end{cases}$ 时，$n=49^2=2401$，它是 7 的倍数。

$$n+100=2501=50^2+1$$

$$n+200=2601=51^2$$

当$\begin{cases} x_2=15 \\ y_2=18 \end{cases}$ 时，$n+200=15^2+200=425$，不是完全平方数；∴ 舍去；

当$\begin{cases} x_3=1 \\ y_3=10 \end{cases}$ 时，$n+200=1+200=201$，也不是完全平方数，∴ 舍去。

所以，原来人数是质数 7 的倍数。

例 10　一个自然数减去 55 后是一个完全平方数，这个自然数加上 34，仍是一个完全平方数。求这个自然数。

解　设这个自然数为 x，由题意得

$$\begin{cases} x-55=m^2 & ① \\ x+34=n^2 & ② \end{cases}$$

其中 m，n 都是自然数。

②－①可得　　　$n^2-m^2=89$

即　　　$(n+m)(n-m)=89\times 1$　　　③

易知　　　$n^2=x+34>x-55=m^2$

$$\therefore\ n>m$$

由③可知 $\begin{cases} n+m=89 \\ n-m=1 \end{cases}$，解方程组，得　$n=45$

$$\therefore\ x=n^2-34=45^2-34=1991$$

例 11　用 300 个 2 和若干个 0 组成的整数中有无完全平方数？

思路分析　用 300 个 2 和若干个 0 组成的整数，其位数至少是 301。各数位上的数是 2 或是 0（首位是 2），显然，分各种情况加以讨论是不可能的。考虑到该数的各数位上的数字之和为 600，故该数必是 3 的位数（或有因数 3），但 600 并不含 $3^2=9$ 的因数，故该数无约数 9，因而该数不是一个完全平方数。

例 12　$8k+7$ 型（k 为自然数）的自然数，能否写成三个完全平方数之和？

解　假设存在三个自然数 x、y、z，使得 $x^2+y^2+z^2=8k+7$，则 $x^2+y^2+z^2$ 被 8 除，其余数为 7，即

$$x^2+y^2+z^2\equiv 7 \pmod 8$$

又∵ 任何一个完全平方数被 8 除，余数只能是 0、1 或 4，

∴ $x^2+y^2+z^2$ 被 8 除，其余数必然是 0、1、2、3、4、5 及 6 中的一个。这与 $x^2+y^2+z^2\equiv 7 \pmod 8$ 矛盾。

所以形如 $8k+7$ 的自然数，不能写成三个完全平方数之和。

小结

1．本专题的基础知识和理论

(1)应掌握完全平方数的特征及其主要性质；

(2)应理解非完全平方数的特征；

(3)如何将一个自然数表示成关于 10 的 n 次多项式的形式及有关配方、化简等恒等变形的知识。

2．问题类型及解题方法和技巧

(1)有关证明某数是完全平方数(如例 6)及有关的化简、求值(如例 3、例 1)等问题，主要是根据完全平方数的定义，将给定的算式表示成关于 10 的 n 次多项式的形式，进行配方、化简等恒等变形步骤，以达到目的；

(2)关于证明某数不是完全平方数的问题，例 4、例 5 有代表性。

“例 4”利用不等式的“放缩法”，将被证的数界于两相邻整数的平方之间，以求得问题的解决。

而“例 5”则是利用数的整除性，根据非完全平方数的特征来进行论证的；

(3)象“例 7”“例 9”这类问题的解法，一般是设未知数，根据已知条件构造方程或不等式，通过讨论、分析求出合条件的整数解；

(4)“例 8”的出现告诉我们，如何将日常生活中所涉及的空间形式和数量关系转化成数学的式子与关系，不但是一种重要的数学能力，而且也是一种重要的数学方法。这种“转