



小学数学奥赛

解题方法

六年级

(修订版)

大全

国际奥赛金牌教练 +
国家奥赛命题研究专家
联袂编写

科学技术文献出版社

◎金牌奥赛

小学数学奥赛解题方法大全

六年级

(修订版)

总主编:耿立志 全国学科奥林匹克竞赛金牌教练
中科国际奥赛研究中心主任委员
国家级骨干教师、全国特级教师

总审定:王永胜 中小学奥林匹克竞赛研究专家
教育部国家新课程标准研究专家
教授、国家级评委、博士生导师

科学技术文献出版社

Scientific and Technical Documents Publishing House

北 京

图书在版编目(CIP)数据

小学数学奥赛解题方法大全. 六年级/窦玉梅等主编. -2 版(修订版). -北京:科学技术文献出版社, 2006.9

(金牌奥赛)

ISBN 7-5023-4757-7

I. 小… II. 窦… III. 数学课-小学-解题 IV. G624.505

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 093292 号

出 版 者 科学技术文献出版社
地 址 北京市复兴路 15 号(中央电视台西侧)/100038
图书编务部电话 (010)58882909,(010)58882959(传真)
图书发行部电话 (010)68514009,(010)68514035(传真)
邮 购 部 电 话 (010)58882952
网 址 <http://www.stdph.com>
E-mail: stdph@istic.ac.cn
策 划 编 辑 科 文
责 任 编 辑 白 明
责 任 校 对 唐 炜
责 任 出 版 王杰馨
发 行 者 科学技术文献出版社发行 全国各地新华书店经销
印 刷 者 北京正豪彩色印刷有限责任公司
版 (印) 次 2006 年 9 月第 2 版第 1 次印刷
开 本 787×1092 16 开
字 数 198 千
印 张 9.5
印 数 1~8000 册
定 价 12.00 元

© 版权所有 违法必究

购买本社图书,凡字迹不清、缺页、倒页、脱页者,本社发行部负责调换。

(京)新登字 130 号

《金牌奥赛》编委会

主 任	石丽杰	耿立志		
副 主 任	窦玉梅	张沈坤	高 伟	
委 员	陈正宜	刘晓静	林寿成	王雪莲
	李 冰	强翎凌	费 艳	路雨辰
	赵丽萍	赵 蕾	吴建军	梁震英
	杜燕平	卢志敏	王志娟	刘 昱
	冯文波	张亚玲	王力钢	赵新民

本册主编	窦玉梅	石丽杰		
副 主 编	王志良	王爱军		
编 者	张凤艳	马 驯	李志强	孟秀焕
	刘小丽	张亚玲	王晓静	董朝霞
	陈 燕	徐复生	刘树文	何敬荣

总 序

《金牌奥赛》是一套由国际奥赛金牌教练和全国竞赛命题研究专家主持编著的含小学、初中、高中三大系列的竞赛标准丛书；是一部将国家级教育科研项目《研究性学习与奥林匹克竞赛有效整合》的研究成果纳入丛书编著的经典力作；是12所奥赛名校、16位国际金牌教练、29位专家教授的智慧结晶。

丛书特点

标准性

丛书根据中、小学国家新课程标准和全国奥林匹克竞赛规程编著，是对最新考试命题精神的标准解读和深入诠释。

权威性

作者群体由来自北京、上海、湖南等地奥赛名校的国际金牌教练；参与奥赛命题与研究的知名教授、博士生导师；从事奥赛一线辅导的国家高级教练及特级教师组成。

实用性

丛书中每一道试题的编制和确定都经过多道关卡，即从作者编著、主编总纂到编辑审读、状元验题、专家审定，层层把关。因而达到了题题新颖、题题经典、题题实用。

《金牌奥赛》编委会

2006年6月于北京

目 录

第一讲 分数的简化运算	(1)
第二讲 估算	(9)
第三讲 圆的周长和面积	(16)
第四讲 圆柱与圆锥	(28)
第五讲 比和比例	(36)
第六讲 时钟问题	(44)
第七讲 工程问题	(50)
第八讲 极值问题	(58)
第九讲 余数问题	(68)
第十讲 分数应用题	(76)
第十一讲 浓度问题	(90)
第十二讲 利润问题	(96)
参考答案	(103)

第一讲 分数的简化运算



知识精讲

分数计算是小学六年级数学的重要内容,也是数学竞赛的重要内容。要使计算快速、准确,既要了解、掌握分数运算法则、性质,更要巧妙、灵活地运用,合理地选择计算方法,使计算简便易行。这里将用到的运算法则及性质列出:

(一)四则运算法则

(1)加法交换律: $a+b=b+a$

(2)加法结合律: $(a+b)+c=a+(b+c)$

(3)乘法交换律: $a \times b = b \times a$

(4)乘法结合律: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

(5)乘法分配律: $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$

(6)一个数连续减去几个数等于这个数减去这几个数的和。

$$a-b-c-d=a-(b+c+d)$$

(7)一个数连续除以几个数,等于这个数除以这几个数的积的商:

$$a \div b \div c \div d = a \div (b \times c \times d)$$

(8)几个数同除以一个数所得的商之和(或差),等于这几个数的和(或差)除以这几个数的商。

$$a \div m \pm b \div m \pm c \div m = (a \pm b \pm c) \div m$$

(二)分数的运算法则

(1) $\frac{1}{a \times (a+1)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}$

(2) $\frac{1}{a \times b} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \times \frac{1}{b-a} \quad (a < b)$

(3)若 a, b, c 是三个连续的自然数,并且 $a < b < c$, 那么



$$\frac{1}{a \times b \times c} = \left(\frac{1}{a \times b} - \frac{1}{b \times c} \right) \times \frac{1}{2}$$

(4) 若 a, b, c, d 是 4 个连续的自然数, 并且 $a < b < c < d$, 那么

$$\frac{1}{a \times b \times c \times d} = \left(\frac{1}{a \times b \times c} - \frac{1}{b \times c \times a} \right) \times \frac{1}{3}$$

(三) 分数计算的简便方法

- (1) 灵活运用运算法则、性质, 使计算简便。
- (2) 利用和、差、积、商的变化规律, 使计算简便。
- (3) 根据题目的特点, 利用约分, 拆合规律等其他方法, 使计算简便。



思维指误

1. 不认真审题, 找不准题目中数的变化规律, 不能简化运算。
2. 对数目较大的题目不细心审读, 或计算不准确。
3. 没有正确的解题思路。

②



典例巧解

例 1 计算: $\left(2.34 + 2\frac{2}{7} + 7.66 + 7\frac{5}{7} \right) \times \left(3\frac{7}{8} - 2.875 \right) + \left(1 \div \frac{2}{3} - 1.5 \right) \times 8.64$

【错因分析】

解题的关键是“凑整法”, 如果不能运用这种数学方法, 就无法根据数的变化技巧, 达到简算的目的。

【正确思路】

分数运算与整数运算中的“凑整法”相同, 要利用四则运算法则, 使部分和、差、积、商成为“整数”, 从而使运算简化, 本题可运用加法交换律、结合律“凑整”。

【参考答案】

$$\begin{aligned} & \left(2.34 + 2\frac{2}{7} + 7.66 + 7\frac{5}{7} \right) \times \left(3\frac{7}{8} - 2.875 \right) + \left(1 \div \frac{2}{3} - 1.5 \right) \times 8.64 \\ &= \left[(2.34 + 7.66) + \left(2\frac{2}{7} + 7\frac{5}{7} \right) \right] \times (3.875 - 2.875) + 0 \times 8.64 \\ &= [10 + 10] \times 1 + 0 \\ &= 20 \end{aligned}$$

例 2 计算: $138 \times 1\frac{1}{4} + 23.3 \times (2 - 75\%) - 38 \times 125\% + (1 + 0.25) \times 28.7$

**【错因分析】**

未利用乘法分配律来简化计算,关键是能否发现较隐蔽的公因数“C”。

【正确思路】

通过仔细观察,发现 $1\frac{1}{4}$ 、 $(2-75\%)$ 、 125% 、 $(1+0.25)$ 的值相同,都是 1.25,所以可利用乘法分配律使计算简化。

【参考答案】

$$\begin{aligned}& 138 \times 1\frac{1}{4} + 23.3 \times (2 - 75\%) - 38 \times 125\% + (1 + 0.25) \times 28.7 \\&= 138 \times 1.25 + 23.3 \times 1.25 - 38 \times 1.25 + 1.25 \times 28.7 \\&= 1.25 \times (138 + 23.3 - 38 + 28.7) \\&= 1.25 \times [(138 - 38) + (23.3 + 28.7)] \\&= 1.25 \times [100 + 52] \\&= 1.25 \times 152 \\&= 1.25 \times 8 \times 19 \\&= 190\end{aligned}$$

例3 (06·春华杯) 计算: $(3 + \frac{5}{9} - \frac{2}{3}) \times (\frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12}) - (\frac{1}{6} - \frac{1}{9} + \frac{1}{12}) \times 3 + (\frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12}) \times (\frac{2}{3} - \frac{5}{9})$

【错因分析】

不能灵活运用乘法分配律,关键是能否发现公因数“C”,它应是一个计算式 $(\frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12})$ 。否则无法简化计算。

【正确思路】

把本题分成三项,第一、三项都有一个公因式: $\frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12}$,提取公因式可使计算简化,还可以将公因式用字母表示使计算更简化。

【参考答案】

方法一:

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \left[\left(3 + \frac{5}{9} - \frac{2}{3} \right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{9} \right) \right] \times \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} \right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{9} + \frac{1}{12} \right) \times 3 \\&= 3 \times \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} \right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{9} + \frac{1}{12} \right) \times 3 \\&= 3 \times \left[\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} \right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{9} + \frac{1}{12} \right) \right]\end{aligned}$$



$$= 3 \times \frac{2}{9}$$

$$= \frac{2}{3}$$

方法二:

将 $\frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12}$ 用字母 A 表示, 则原式可转化为:

$$\begin{aligned} & \left(3 + \frac{5}{9} - \frac{2}{3}\right) \times A - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{9} + \frac{1}{12}\right) \times 3 + \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{9}\right) \times A \\ &= A \times \left(3 + \frac{5}{9} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{5}{9}\right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{9} + \frac{1}{12}\right) \times 3 \\ &= A \times 3 - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{9} + \frac{1}{12}\right) \times 3 \\ &= 3 \times \left(A - \frac{1}{6} + \frac{1}{9} - \frac{1}{12}\right) \\ &= 3 \times \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} - \frac{1}{6} + \frac{1}{9} - \frac{1}{12}\right) \\ &= 3 \times \frac{2}{9} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

④ 例 4 计算: $3.6 \times 31 \frac{2}{5} + 3.14 \times 64$

【错因分析】

不能仔细观察分析, 发现经过变化可用“凑整法”以简化计算。

【正确思路】

利用积的变化规律, 将 3.14×64 转变成 31.4×6.4 , 逆用乘法分配律, 可使计算简化。

【参考答案】

$$\begin{aligned} & 3.6 \times 31 \frac{2}{5} + 3.14 \times 64 \\ &= 31.4 \times 3.6 + 3.14 \times 10 \times (64 \div 10) \\ &= 31.4 \times (3.6 + 6.4) \\ &= 31.4 \times 10 \\ &= 314 \end{aligned}$$

例 5 (北京·迎春杯) 计算: $7 \frac{4480}{8333} \div \frac{21934}{25909} \div \frac{18556}{35255}$

【错因分析】

此题的分子、分母较复杂, 解题时没有发现什么规律, 就急于按常规方法计算, 使分子、分母更烦琐, 无法简化计算。

**【正确思路】**

本题可用约分法使计算简化,为了找到公因数,可将原题的分子、分母分解质因数。

【参考答案】

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \frac{62811}{8333} \times \frac{25909}{21934} \times \frac{35255}{53811} \\
 &= \frac{3 \times 3 \times 7 \times 997}{13 \times 641} \times \frac{13 \times 1993}{2 \times 11 \times 997} \times \frac{5 \times 11 \times 641}{3 \times 3 \times 3 \times 1993} \\
 &= \frac{35}{6} \\
 &= 5 \frac{5}{6}
 \end{aligned}$$

例 6 求 $\frac{2}{3} + \frac{2}{8} + \frac{2}{15} + \frac{2}{24} + \frac{2}{35} + \frac{2}{48} + \frac{2}{63} + \frac{2}{80}$

【错因分析】

不能仔细分析分母之间的内在联系,而使用常规方法通分,造成分母太大,使计算量过大,易造成错解。

【正确思路】

仔细观察后发现给出的分子都是 2,分母排列也有规律,运用拆分法求解,可使计算简化。

【参考答案】

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \\
 &\quad \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10}\right) \\
 &= 1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{2} - \frac{1}{10} \\
 &= 1 \frac{26}{90} \\
 &= 1 \frac{13}{45}
 \end{aligned}$$

例 7 (04·春华杯)计算: $\left[\left(\frac{49}{12} - \frac{63}{20} + \frac{77}{30} - \frac{91}{42} + \frac{105}{56}\right) - 3 \frac{1}{6}\right] \div \frac{1}{24}$

【错因分析】

本题综合性较强,较复杂,不易找到简化方法。

【正确思路】

将 49、63、77、91、105 分解质因数,然后根据分子、分母的特点运用拆项相加法逆用乘法分配律可使计算简化。

【参考答案】



$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \left[\left(\frac{7 \times 7}{12} - \frac{7 \times 9}{20} + \frac{7 \times 11}{30} - \frac{7 \times 13}{42} + \frac{7 \times 15}{56} \right) - 3 \frac{1}{6} \right] \div \frac{1}{24} \\
 &= \left[7 \times \left(\frac{7}{12} - \frac{9}{20} + \frac{11}{30} - \frac{13}{42} + \frac{15}{56} \right) - 3 \frac{1}{6} \right] \div \frac{1}{24} \\
 &= \left[7 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) - 3 \frac{1}{6} \right] \times 24 \\
 &= \left(7 \times \frac{11}{24} - \frac{19}{6} \right) \times 24 \\
 &= 77 - 19 \times 4 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

例8 计算: $\left[4 \frac{2}{7} + \frac{7 \frac{1}{4} - 6 \frac{1}{5}}{1 \frac{2}{3} + 160\%} \right] \times \frac{1 \frac{2}{3} + 160\%}{4 \frac{2}{7} \times \left(1 \frac{2}{3} + 160\% \right) + 7 \frac{1}{4} - 6 \frac{1}{5}}$

【错因分析】

仔细分析本题,发现一些数字不止一次重复使用,如能运用字母代替法,可使运算简化。若不能发现这个特点,而按顺序计算,非常烦琐,也易出错。

【正确思路】

将题目中的重复数字、式子用字母代替使式子简化。

【参考答案】

设 $a = 4 \frac{2}{7}$ $b = 1 \frac{2}{3} + 160\%$ $c = 7 \frac{1}{4} - 6 \frac{1}{5}$ 则有:

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \left(a + \frac{c}{b} \right) \times \frac{b}{ab + c} \\
 &= \frac{ab + c}{b} \times \frac{b}{ab + c} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

例9 (06·福州)计算: $1 + 3 \frac{1}{6} + 5 \frac{1}{12} + 7 \frac{1}{20} + 9 \frac{1}{30} + 11 \frac{1}{42} + 13 \frac{1}{56} + 15 \frac{1}{72} + 17 \frac{1}{90}$

【错因分析】

本题需要综合利用多种知识,如拆分规律、等差数列规律、埃及分数规律等;若不能灵活运用多种运算法则,此题将无法简化计算。

【正确思路】

根据本题的特点,先将分数的整数部分、分数部分分别相加;整数部分是一个公差为2的等差数列,可以根据等差数列的求和公式进行计算;分数部分相加时,可利用埃及分数规律: $\frac{1}{n \times (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$,将各分数拆成两个分数的差。最后,将整数部分与分数部分的结果相加。

【参考答案】



$$\begin{aligned}
\text{原式} &= (1+3+5+7+9+11+13+15+17) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90} \right) \\
&= 81 + \left(\frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{6 \times 7} + \frac{1}{7 \times 8} + \frac{1}{8 \times 9} + \frac{1}{9 \times 10} \right) \\
&= 81 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) \\
&= 81 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10} \right) \\
&= 81 \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

**学法点拨**

分数在计算方面的变化是非常奇妙的,但都有其规律,要在平时学习的基础上,做到勤分析、多思考。具体问题具体分析,合理运用所学规则、方法,才能做到创新解题,简化运算。

**综合检测**

计算下列各题

1. $\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} \right) \times 2 \frac{1}{7}$ (第三届华罗庚杯初赛)

2. $14 \times \frac{3}{7} + 0.65 \times \frac{8}{13} - \frac{2}{7} \times 14 + \frac{5}{13} \times 0.65$

3. $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right)$

4. $55 \times \frac{55}{56}$

5. $12.5 \times \left(36 - 7 \frac{1}{5} \right) \div 3.6$

6. $14 \times \frac{3}{7} + 0.65 \times \frac{8}{13} - \frac{2}{7} \times 14 + \frac{5}{13} \times 0.65$

7. $6.8 \times \frac{8}{25} + 0.32 \times 4.2 - 8 \div 25$

8. $1 \frac{4}{17} \times \left(2 \frac{2}{3} - \frac{3}{4} \right) + 17 \frac{11}{12} \div \frac{17}{21}$

9. $1 \frac{1}{4} \times 17.6 + 36 \div \frac{4}{5} + 2.64 \times 12.5$

10. $333 \frac{111}{112} \div 37 \frac{56}{81}$

11. $471471471471 \div 157157157157$



$$12. \frac{3}{4} \times 2.84 \div 3 \frac{3}{5} \div \left(1 \frac{1}{2} \times 1.42 \right) \times 1 \frac{4}{5}$$

$$13. \frac{1978 \times 1979 + 1979 \times 1980}{1 + 2 + 3 + \cdots + 1979}$$

$$14. \left(11 \frac{2}{13} + 13 \frac{2}{11} \right) \div \left(\frac{5}{11} + \frac{5}{13} \right)$$

$$15. \frac{1 + 2 + 3 + \cdots + 10 + 11 + 10 + 9 + \cdots + 2 + 1}{111111 \times 111111}$$

$$16. \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 + 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}$$

$$17. \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6}$$

$$18. 21 - \frac{4}{3} - \frac{4}{15} - \frac{4}{35} - \frac{4}{63} - \frac{4}{99} - \frac{4}{143} - \frac{4}{195} - \frac{4}{255}$$

$$19. (1995.5 - 1993.5) \div 1998 \times 1999 \frac{1997}{1998} \div \frac{1}{1999} \text{ (保留三位小数)}$$

(第六届华罗庚杯复赛)

$$20. \left(\frac{531}{135} + \frac{579}{357} + \frac{753}{975} \right) \times \left(\frac{579}{357} + \frac{753}{975} + \frac{135}{531} \right) - \left(\frac{531}{135} + \frac{579}{357} + \frac{753}{975} + \frac{135}{531} \right) \times \left(\frac{579}{357} + \frac{753}{975} \right)$$

21. 计算:

$$\left(\frac{1}{11} + \frac{1}{21} + \frac{1}{31} + \frac{1}{41} \right) \times \left(\frac{1}{21} + \frac{1}{31} + \frac{1}{41} + \frac{1}{51} \right) - \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{21} + \frac{1}{31} + \frac{1}{41} + \frac{1}{51} \right) \times \left(\frac{1}{21} + \frac{1}{31} + \frac{1}{41} \right)$$

$$22. (03 \cdot \text{广东}) \text{ 计算: } \frac{17}{77} \times 10 + \frac{17}{77} \times 9 + \frac{17}{77} \times 8 + \cdots + \frac{17}{77} \times 2 + \frac{17}{77}$$

23. 计算:

$$\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) - \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right)$$

24. 计算:

$$\frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+99}$$

第二讲 估 算



知识精讲

估算是运用各种运算技巧所进行的快速近似计算,许多数学问题可以通过估算界定范围,然后把满足条件的一枚举出来。常采用的方法有:直接取近似值法(四舍五入),或者通过“放大和缩小法”确定范围,然后枚举等等。



思维指误

本讲易错点在于使用“放大缩小法”过程中,不能做到放缩适度。如果取的位数少,范围就大,无法确定近似数;如果位数取多了,计数量太大、烦琐,且没有必要。



典例巧算

例1 (06·武汉)求数 $a = 10 \frac{10}{100} + 11 \frac{10}{101} + 12 \frac{10}{102} + \cdots + 20 \frac{10}{110}$ 的整数部分。

【错因分析】

此题如果运用通分的方法计算准确值,计算量大,且容易出错。

【正确思路】

本题求数 a 的整数部分,只要估算出整数部分即可,不必求出准确值。运用拆分方法,将原式变形为: $a = (10 + 11 + 12 + \cdots + 20) + \left(\frac{10}{100} + \frac{10}{101} + \frac{10}{102} + \cdots + \frac{10}{110} \right)$; 然后,利用“放大缩小法”进行估算。

【参考答案】

$$\begin{aligned} a &= 10 \frac{10}{100} + 11 \frac{10}{101} + 12 \frac{10}{102} + \cdots + 20 \frac{10}{110} \\ &= (10 + 11 + 12 + \cdots + 20) + \left(\frac{10}{100} + \frac{10}{101} + \frac{10}{102} + \cdots + \frac{10}{110} \right) \end{aligned}$$



$$= 165 + \left(\frac{10}{100} + \frac{10}{101} + \frac{10}{102} + \cdots + \frac{10}{110} \right)$$

因为 $\frac{10}{100} > \frac{10}{101} > \frac{10}{102} > \cdots > \frac{10}{110}$

所以 $\frac{10}{100} + \frac{10}{101} + \frac{10}{102} + \cdots + \frac{10}{110} < \frac{10}{100} \times 11 = 1.1$

又因为 $\frac{10}{100} > \frac{10}{101} > \frac{10}{102} > \cdots > \frac{10}{110}$

所以 $\frac{10}{100} + \frac{10}{101} + \frac{10}{102} + \cdots + \frac{10}{110} > \frac{10}{110} \times 11 = 1$

由此可知: $1.1 > \frac{10}{100} + \frac{10}{101} + \frac{10}{102} + \cdots + \frac{10}{110} > 1$

因此, $\frac{10}{100} + \frac{10}{101} + \frac{10}{102} + \cdots + \frac{10}{110}$ 的整数部分为 1。

这样, a 的整数部分是 $165 + 1 = 166$ 。

例 2 有 13 个自然数, 计算出的平均数保留两位小数为 12.43, 后来发现平均数最后一位数字错了, 其他数字都对, 正确答案应该是多少?

【错因分析】

本题运用“放大缩小法”求值, 但 13 个自然数之和的范围没能缩放适度, 造成难以估算。

【正确思路】

分析一: 13 个自然数的和必然是整数, 分析可知, 和不是 13 的整数倍, 因而平均数是小数。又因为, 平均数精确到小数点后二位, 因此, 13 个自然数之和必大于 12.39 的 13 倍, 而小于 12.5 的 13 倍。据此, 可推算出正确的 13 个自然数之和。

分析二: 由于 $(a_1 + a_2 + \cdots + a_{13}) \div 13 = 12.43$, 从而有 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{13} = 12.43 \times 13$, 已知 $a_1 \sim a_{13}$ 均为自然数, 可知 12.43×13 的积也应为自然数, 据此计算出这 13 个自然数的平均值。

【参考答案】

方法一: 由 $12.39 \times 13 = 161.07$,

$12.5 \times 13 = 162.5$, 得知, 13 个自然数之和应是 162。

平均值应是 $162 \div 13 \approx 12.46$, 所以平均值正确答案为 12.46。

方法二: 设这 13 个自然数之和为 M , 根据题意得,

$$12.40 \leq \frac{M}{13} \leq 12.49$$

$$161.2 \leq M \leq 162.37$$

因为 M 表示 13 个自然数之和, 所以 M 是整数, 即: $M = 162$ 。



$\therefore 13$ 个自然数的平均值 $\frac{162}{13} \approx 12.46$, 即平均值正确答案应是 12.46。

例 3 (05·苏州) $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{8} \times \cdots \times \frac{99}{100}$ 与 $\frac{1}{10}$ 比较, 哪个大? 为什么?

【错因分析】

解题的关键是借助另外一个式子当“引子”, 用“放大缩小法”进行估算。如果按照常规方法比较大小, 那么可能由于计算烦琐而产生错误。

【正确思路】

经过仔细分析, 发现第一个算式的分子、分母是由自然数 1、2、3、4、5、6...100 组成的, 因此采用“借来还去”法引入另一个式子: $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \cdots \times \frac{100}{101}$ 再与 $\frac{1}{10}$ 比较。

【参考答案】

$$\text{设 } A = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{99}{100}$$

$$B = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \cdots \times \frac{100}{101}$$

$$\text{因为 } \frac{1}{2} < \frac{2}{3}, \frac{3}{4} < \frac{4}{5}, \cdots, \frac{99}{100} < \frac{100}{101}$$

所以 $A < B$

$$\text{又因为 } A \times B = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \cdots \times \frac{99}{100} \times \frac{100}{101} = \frac{1}{101}$$

$$\text{而 } A^2 < A \times B = \frac{1}{101} < \frac{1}{100} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$$

$$\text{可见 } A < \frac{1}{10}$$

例 4 (04·上海) 把下面除法算式中的 * 所表示的数字写出来。

$$\begin{array}{r} * 8 * 7 \\ * * \overline{) * * * * * * * } \\ \underline{* * *} \\ * * \\ \underline{* *} \\ * * \\ \underline{* *} \\ * * \\ \underline{* *} \\ 0 \end{array}$$

【错因分析】

不能正确估算的关键是分析每个数字与除数相乘的位数, 导致答题失误。

【正确思路】

由除法竖式可知: 8 与除数的积是两位数, 而商的首位与除数的积是三位数, 可知商