高建福 著

Danye hanshu yu congshu yuanli

Danye hanshu yu congshu yuanli

单叶函数与从属原理

Danye hanshu yu congshu yuanli

中国科学技术大学出版社

单叶函数与从属原理

高建福　著

中国科学技术大学出版社
合肥

图书在版编目(CIP)数据

单叶函数与从属原理/高建福著. —合肥:中国科学技术大学出版社,2003.12

ISBN 7-312-01645-6

Ⅰ.单… Ⅱ.高… Ⅲ.单叶函数 Ⅳ.O174.51

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 099824 号

中国科学技术大学出版社出版发行
(安徽省合肥市金寨路 96 号,230026)
中国科学技术大学印刷厂印刷
全国新华书店经销

开本:850×1168/32 印张:6.25 字数:160 千
2003 年 12 月第 1 版 2003 年 12 月第 1 次印刷
印数:1—1000 册
ISBN 7-312-01645-6/O·278 定价:15.00 元

前　言

几何函数论亦称复变函数几何理论,是古老而富有生命力的数学分支之一。早在19世纪黎曼(Riemann)等人就奠定了这方面的理论基础。几何函数论本身的发展与相关学科的联系十分广泛,而且这种联系也促进了几何函数论20世纪的迅猛发展。它的理论和方法不但可以用来解决微分方程、解析数论、微分几何、拓扑学等许多数学分支提出的问题,而且更为普遍地应用于自然科学的诸多领域,如理论物理、空气动力学、流体力学、弹性力学、自动控制等方面。

单叶函数与从属原理是几何函数论的重要内容之一。本书前两章介绍了这方面的基本内容和方法,而且融进了笔者20多年来在这方面的研究成果,内容力求新颖,方法上坚持创新,这些又是研究单叶函数与从属原理必具备的知识与基本功。后两章则是单叶函数与从属原理方面的专题论述,主要包括:单叶函数的系数与系数泛函的准确估计,从属链的应用给出了新的单叶判别准则,研究了不受系数幅角影响的单叶函数的性质,Briot-Bouquet 微分方程与微分从属,保从属性积分算子以及特殊单叶函数族的一些新成果。这些主要是作者20多年在这方面的主要研究成果,也参考了其它相关研究成果,其来龙去脉可见参考文献。本书的最后一章,结合作者新近的研究情况与国内外的研究动态,提出了有关单叶函数与从属原理方面的十个未解决的问题,有些问题已经纠缠了许多数学家半个多世纪的时间。对读者而言,最好能起到抛砖

引玉的作用。本书内容处理上力求简洁,文字讲究通俗,同时也强调了本学科的专业性,在有关的量的估计上体现了几何函数论的研究方面的严谨性,特别是一些新的结果的阐述方面更为突出。

本书在出版过程中得到了安徽财贸学院、安徽财贸学院科研处、信息与计算科学系的大力支持,谨致感谢。

鉴于作者的水平,本书不当之处,谨请读者指正。

高建福

2003年11月

目　录

第一章　单叶函数

从共形映射的观点看,最简单且最重要的解析函数是单叶解析函数(简称为单叶函数),由于单叶性的要求,研究这样的函数的性质往往涉及函数模的增长、导数模及幅角的增长、函数幂级数展开式的系数及一些重要的几何性质等,而更重要的则是有些量在数值方面的准确估计,本章就是从这些方面展开的。

§1.1　单叶函数的基本性质

我们用 $D=\{z;|\,|z|<1\}$ 表示单位圆盘,对于 $z_1\in D,z_2\in D$ 时当且仅当 $z_1=z_2$ 时 $f(z_1)=f(z_2)$,则称 $f(z)$ 在 D 中单叶。若 $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nz^n(a_1=1)$ 在 D 中单叶,用符号 $f(z)\in S$ 表示,我们还用 $F(\zeta)\in\sum,(|\zeta|>1)$ 表示 $|\zeta|>1$ 内除去 $\zeta=\infty$ 外为解析的单叶函数,$F(\zeta)=\zeta+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n\zeta^{-n}$。

关于 D 内的单叶函数,我们有以下的定理。

定理 1.1(单叶的必要条件)　若函数 $f(z)$在 D 内单叶,则当 $z\in D$ 时

$$f'(z)\neq 0。$$

证　令 $f(z)$把 D 映射为 G,即 $G=f(D)$,若存在 $z_0\in D$ 使 $f'(z_0)=0$,则 z_0 必为 $f(z)-f(z_0)$的一个 n 级零点($n\geqslant 2$),由零点的孤立性可知,存在 $\delta>0$ 使在圆周 $C:|z-z_0|=\delta$ 上 $f(z)-f(z_0)\neq 0$。在 C 的内部 $f(z)-f(z_0)$及 $f'(z)$没有异于 z_0 的零点。

令 m 表示 $|f(z)-f(z_0)|$ 在 C 上的下确界，则由儒歇(Rouché)定理知当 $0<|-a|<m$ 时 $f(z)-f(z_0)-a$ 在 C 的内部也有 n 个零点($n\geqslant 2$)，即 $f(z)$ 在 C 内取值 $f(z_0)+a$ 至少两次，这与 $f(z)$ 在 C 内单叶矛盾。从而在 D 内恒有 $f'(z)\neq 0$。

这一定理的逆不成立，即若 $f'(z)\neq 0(z\in D)$，则 $f(z)$ 在 D 内也不一定单叶。如 $f(z)=(z-1)^n(n>1)$ 满足 $f'(z)\neq 0$，但是 $f(z)=(z-1)^n$ 在 D 内并不单叶。

定理 1.2 单叶函数的单叶函数仍是单叶函数，即若 $f(z)$ 在 D 内单叶，且 $f(z)$ 在 D 单叶映射到 G。$g(w)$ 又把 G 单叶映射到 H，则 $g(f(z))$ 把 D 单叶地映射为 H，或 $g(f(z))$ 在 D 中单叶。

证 由单叶性知由 $g(f(z_1))=g(f(z_2))$ 得到 $f(z_1)=f(z_2)$，又从 $f(z_1)=f(z_2)$ 得到 $z_1=z_2$，其中 $z_1\in D, z_2\in D$，故 $g(f(z))$ 在 D 中单叶。

定理 1.3 若 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 解析，且 $f'(z_0)\neq 0$，则存在 $\delta>0$，$f(z)$ 在 $|z-z_0|<\delta$ 单叶。

证 令 $w_0=f(z_0)$，显然 z_0 是 $f(z)-w_0$ 的一级零点[因 $f'(z_0)\neq 0$]。由零点的孤立性知存在 $\delta>0$，使 $f(z)$ 在圆周 $C:|z-z_0|=\delta$ 内没有异于 z_0 的零点。令 m 是 $|f(z)-w_0|$ 在 C 上的下确界，取 w 使 $0<|w-w_0|<m$，由儒歇(Rouché)定理知 $f(z)-w=[f(z)-w_0]+(w_0-w)$ 与 $f(z)-w_0$ 在 C 的内部相同的零点，即 $f(z)-w$ 存在 C 的内部只有一个零点，故 $f(z)$ 在 $|z-z_0|<\delta$ 内单叶。

定理 1.4 若 $f_n(z)$ 是单连通区域 G 中单叶的函数序列，且 $f_n(z)$ 在 G 中内闭一致收敛于 $f(z)$[非常数]。则 $f(z)$ 在 G 中也单叶。

证 若 $f(z)$ 在 G 中不单叶，则 G 中有两点 z_1 与 z_2 且 $z_1\neq z_2$，使 $f(z_1)=f(z_2)$，不妨设 z_1 与 z_2 是有限点[否则由分式线性变换可将它们变成有限点]，以 z_1 与 z_2 为圆心作两个小圆 K_1 与 K_2，其边界为 Γ_1 与 Γ_2，使 $K_1\cup\Gamma_1$ 与 $K_2\cup\Gamma_2$ 互不相交，且都在 G 中，而 $f(z)-f(z_1)$ 在 $K_1\cup\Gamma_1$ 及 $K_2\cup\Gamma_2$ 上除 z_1 与 z_2 外无

其它零点(因 $f(z)$非常数),故存在 $\delta>0$,当 $z\in\Gamma_1\cup\Gamma_2$ 时 $|f(z)-f(z_1)|>\delta$。另一方面由定理条件,$f_n(z)$在 $\Gamma_1\cup\Gamma_2$ 上一致收敛于 $f(z)$,故存在正整数 N,当 $n>N$ 时,$|f_n(z)-f(z)|<\delta$,$z\in\Gamma_1\cup\Gamma_2$。由儒歇定理知 $f_n(z)-f(z_1)=[f(z)-f(z_1)]+[f_n(z)-f(z)]$,$(n>N)$在 K_1 与 K_2 中都至少有一个零。这与 $f_n(z)$在 G 中的单叶性矛盾。从而 $f(z)$在 G 中是单叶的。

定理 1.5(单叶的充分条件)　若 $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|\leqslant 1$,则

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$$

在 D 中单叶。

证　当 $z_1\neq z_2(z_1\in D,z_2\in D)$时

$$\begin{aligned}&|f(z_1)-f(z_2)|\\&=|z_1-z_2|\cdot\left|1+\sum_{n=2}^{\infty}a_n(z_1^{n-1}+z_1^{n-2}z_2+\cdots+z_2^{n-1})\right|\\&\geqslant|z_1-z_2|\cdot\left(1-\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|\right)\geqslant 0\end{aligned}$$

故只有 $z_1=z_2$ 时才有 $f(z_1)=f(z_2)$,从而 $f(z)$在 D 中单叶。

§1.2　基本定理(Rieman 定理)

复平面上两个单连通区域之间的共形映射的存在性问题,只需要考虑单连通区域到单位圆内部共形映射的存在性。因为若两个单连通区域都能共形映射到单位圆内,则这两个单连通区域必可互相共形映射,但下面两种单连通区域是不能映射到单位圆内部的。

1. 闭复平面(即含有∞的全平面),由于闭复平面上的解析函数是常数,若有单叶解析函数把闭复平面变到单位圆的内部,则它一定是常数,即像为一点,故这是不可能的。

2. 开复平面(即不含∞的全平面),在开复平面上有界的解析函数是一常数,因此不能有单叶解析函数把开平面变到单位圆的内部。另外除去一个有穷点的闭复平面可通过分式线性变换映射到开平复平面,故除去一个有穷点的闭复平面也不能共形映射到单位圆的内部。

是否除上面两种情形外,复平面上所有的单连通区域都能共形映射到单位圆的内部的问题,下面的黎曼定理做了肯定的回答。

基本定理(Riemann 定理) 设 G 是复平面上的一个单连通区域,点∞及一有穷点 a 不属于G,则存在单叶解析函数 $w=f(z)$将 G 共形映射到单位圆 D,若 $z_0\in G$,且 $f(z_0)=0$, $f'(z_0)>0$[即在 z_0 处的平行于实轴方向,变到 $w=0$ 的正实轴方向],则 $w=f(z)$是惟一的。

证 先证存在 G 内的单叶解析函数 $z_1=\varphi(z)$,将 G 共形映射到单位圆D 内的某一单连通区域Ω,且 $z_1=0\in\Omega$。

若 G 有外点,令 b 是其一个有穷的外点,则 $t=\dfrac{1}{z-b}$将G 共形映射到以点∞为外点的区域 G_1,且 G_1 为一有界区域,故它一定含在$|t|<R(<\infty)$内,再作 $S=\dfrac{t}{R}$,它将 G_1 共形映射到到圆$|S|<1$内的一个区域 K,此时点 $t_0=\dfrac{1}{z_0-b}$变到点 $S_0=\dfrac{1}{R(z_0-b)}$。

若 G 没有外点,由定理的条件知 G 的边界是一连通分支。此时取多值函数$\sqrt{z-a}$的单值解析分支,则它在 G 内单叶解析。事实上,任取 G 内的两点 z_1 与 z_2,若$\sqrt{z_1-a}=\sqrt{z_2-a}$,平方后得到 $z_1=z_2$。这样单叶解析函数 $u=\sqrt{z-a}$将G 共形映射到一单连通区域H,且若 $u_1\in H$,则 $-u_1\overline{\in} H$,因为若 $-u_1\in H$,则 $u_1=\sqrt{z_1-a}$, $-u_1=\sqrt{z_2-a}$,其中 z_1 与 z_2 是 G 内的两点,平方后得 $z_1=z_2$,从而 $u_1=-u_1$,即 $u_1=0$,这显然是不可能的。设

$|u-u_0|\leqslant\delta$ 为 H 内的一圆，其中 $u_0=\sqrt{z_0-a}$，则圆 $|u+u_0|\leqslant\delta$ 不包含 H 的点，从而 H 属于区域 $|u+u_0|>\delta$，而函数 $t=\dfrac{\delta}{u+u_0}$ 将区域 H 共形映射为一单连通区域 K 位于圆 $|t|<1$ 内，且把点 u_0 变到 K 内的点 $t_0=\dfrac{\delta}{2u_0}$。

针对上面两种情形，再作单叶解析函数 $z_1=\dfrac{t-t_0}{1-\bar{t}_0t}$，其中 t_0 如前所述，则它将区域 K 共形映射到一单连通区域 Ω 位于圆 $|z_1|<1$ 内，且包含点 $z_1=0$。总之在区域 G 内，存在解析函数 $z_1=\varphi(z)$，它将 G 共形映射到一个单连通区域 Ω 位于圆 $|z_1|<1$ 内且包含点 $z_1=0$。下面证明存在 Ω 内的单叶解析函数 $w=\psi(z_1)$ 将 Ω 变成 $|w|<1$。

考察函数族 $A=\{\psi(z_1)\}$，其中每一个函数 $w=\psi(z_1)$ 在区域 Ω 内单叶解析，且 $|\psi(z_1)|<1$，$\psi(0)=0$。显然这样的函数是存在的，如：$\psi(z_1)=rz_1$，$(0<|r|\leqslant1)$，对于每个函数 $\psi(z_1)\in A$，有数 $|\psi'_0(0)|$ 相对应。下面要证明：在函数族 A 中可找到一个函数 $\psi_0(z_1)$ 使 $|\psi_0'(0)|$ 达到最大值。

因区域 Ω 包含点 $z_1=0$，故可得属于 Ω 的圆 $|z_1|<\rho(0<\rho<1)$，函数族 A 中每一个函数 $\psi(z_1)$ 在 $|z_1|<\rho$ 中满足 Schwarz 引理的条件，故有 $|\psi'(0)|\leqslant\dfrac{1}{\rho}$，即 $\{|\psi'(0)|\}$ 有上界。设 λ 是 $\{|\psi'(0)|\}$ 的上确界，则 $\lambda\leqslant\dfrac{1}{\rho}$。因 $\psi(z_1)\in A$，故 $\lambda\geqslant1$，由上确的性质，存在一个函数序列 $\psi_n(z_1)\in A$，$(n=1,2,\cdots)$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty}|\psi_n'(0)|=\lambda$。由于在 Ω 内 $|\psi_n(z_1)|<1$，故有 $\psi_n(z_1)$ 的子序列 $\psi_{n_k}(z_1)$ $(k=1,2,3,\cdots)$ 在 Ω 中内闭一致收敛于一个解析函数 $\psi_0(z_1)$，根据 Weierstrass 定理

$$|\psi_{n_k}(0)|\to|\psi'_0(0)|=\lambda\geqslant1\quad(\text{当 } k\to+\infty)$$

这表明 $\psi_0(z_1)$ 不是常数，由定理 1.4 知 $\psi_0(z_1)$ 在 Ω 内单叶解析。

显然$|\psi_0(z_1)|\leqslant 1$，$\psi_0(0)=0$，但由最大模原理知$|\psi_0(z)|<1$，从而 $\psi_0(z_1)\in A$，$|\psi'_0(0)|=\lambda$。

再证明函数 $w=\psi_0(z_1)$将区域 Ω 共形映射到单位圆$|w|<1$。

若在$|w|<1$内存在一点 w_0 不属于由 $w=\psi_0(z_1)$变换 Ω 所得到的区域 d，我们将推矛盾。

实际上，函数 $\zeta=\dfrac{w-w_0}{1-\overline{w}_0 w}$将 d 变到一个单连通区域 g 位于圆$|\zeta|<1$内，且包含 $\zeta=-w_0$，但不包含 $\zeta=0$。而函数 $\eta=\sqrt{\zeta}$将 g 变为一个单连通区域R 位于$|\eta|<1$内，包含点 $\eta_0=\sqrt{-w_0}$，但不包含点 $\eta=0$，最后作函数 $V=\dfrac{\eta-\eta_0}{1-\overline{\eta}_0\eta}$，显然 $V=\dfrac{\eta-\eta_0}{1-\overline{\eta}_0\eta}$在区域$\Omega$ 内单叶解析[V 是上面几个函数的复合，最终它是 z_1 的函数，即 $V=V(z_1)$就是 $w=\psi_0(z_1)$]，且$|V(z_1)|<1$，$V(0)=0$，即 $V(z_1)\in A$，但

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z_1}\right)_{z_1=0}&=\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\eta}\right)_{\eta=\eta_0}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\zeta}\right)_{\zeta=-w_0}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}w}\right)_{w=0}\cdot\psi'_0(0)\\&=\frac{1}{1-|\eta_0|^2}\cdot\frac{1}{2\eta_0}\cdot(1-|w_0|^2)\cdot\psi'_0(0)\\&=\frac{1}{2\eta_0}(1+|w_0|)\psi'_0(0)\end{aligned}$$

$$|V'(0)|=\frac{1+|\eta_0|^2}{2|\eta_0|}|\psi'_0(0)|>|\psi'_0(0)|=\lambda$$

此矛盾就证明了在 G 中存在单叶解析函数

$$w=f(z)=\psi_0[\varphi(z)],$$

将 G 变为$|w|<1$，且 $f_0(z)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}f(z)$，[$\alpha=\arg f'(z_0)$]满足把 G 共形映射为单位圆$|w|<1$ 且 $f_0(z_0)\doteq 0$，$f'_0(z_0)>0$。

最后证明在定理的条件下，区域 G 到单位圆$|w|<1$ 的共形映射是惟一的。

若存在满足定理要求的两个单叶解析函数 $f_1(z)$与 $f_2(z)$，

以 $z=g_1(w)$表示 $w=f_1(z)$的反函数,则 $F(w)=f_2[g_1(w)]$在$|w|<1$ 中解析,且把单位圆$|w|<1$ 变换到自己,但 $F(0)=0$,故由 Schwarz 引理知$|F(w)|\leqslant|w|$,即在 G 中$|f_2(z)|\leqslant|f_1(z)|$。同样可证$|f_1(z)|\leqslant|f_2(z)|$,从而在 G 中$|f_1(z)|=|f_2(z)|$。考察函数

$$H(z)=\frac{f_1(z)}{f_2(z)},\ (z\in G)$$

只要适当地定义在 z_0 处的函数值后,$H(z)$在区域 G 中解析,且$|H(z)|=1,(z\in G)$,由解析函数的最大模原理知 $H(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$,$\beta$ 为一实数,从而 $f_1(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}f_2(z)$,由 $f'_1(0)>0,f'_2(0)>0$ 得到 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}=1$,因此 $f_1(z)=f_2(z),(z\in G)$。

设 $f_0(z)$是基本定理中的单叶函数,且满足 $f_0(z_0)=0$,$f'_0(z_0)>0$,则 $f(z)=\dfrac{f_0(z)}{f'_0(z_0)}$满足 $f(z_0)=0,f'(z_0)=1$,且惟一地将 G 单叶地映射为D。我们称数

$$R=\frac{1}{f'_0(z_0)}$$

为区域 G 在z_0 处的映射半径。下面我们来证明$\dfrac{f_0(z)}{f'_0(z_0)}$的两个极值性质。

1° 以 A 表示区域G 中的解析函数$f(z)$所组成的集合。且 $f'(z_0)-1=f(z_0)=0$,记 $M(f)=\sup\limits_{z\in G}|f(z)|,f(z)\in A$,则 $f_1(z)=\dfrac{f_0(z)}{f'_0(z_0)}$为 A 中惟一的函数,使 $M(f)$为极小,且 $M(f_1)=R$,R 为区域G 在点z_0 的映射半径。

2° 若 $f(z)\in A$,令

$$N(f)=\iint\limits_G|f'(z)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

则 $f_1(z)=\dfrac{f_0(z)}{f'_0(z_0)}$是 A 中的惟一函数使$N(f)$极小,且 $N(f_1)=$

πR^2。R 为区域 G 在点 z_0 的映射半径。

证 1° 设 $z=g(w)$ 是 $w=f_0(z)$ 的反函数，为了找出使 $M(f)$ 极小的 $f(z)\in A$，只需考虑 $M(f)<+\infty$ 的 $f(z)\in A$ 即可了。设

$$F(w)=\frac{f[g(w)]}{M(f)}$$

则 $F(w)$ 在 $|w|<1$ 中解析，且 $|F(w)|\leqslant 1$，$F(0)=0$，于是由许瓦兹(Schwarz)引理知 $|F'(0)|\leqslant 1$，但

$$F'(0)=\frac{1}{M(f)f'_0(z_0)}>0$$

故

$$M(f)\geqslant\frac{1}{f'_0(z_0)}=R$$

而等号成立仅当且当 $F(w)=w$，即 $f(z)=\dfrac{f_0(z)}{f'_0(z_0)}$ 时成立。

2° 因

$$\begin{aligned}N(f)&=\lim_{n\to\infty}\iint_{G_n}|f'(z)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\lim_{n\to\infty}\iint_{|w|<\rho_n}|f'(\varphi(w))\varphi'(w)|^2\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\rho_n}\int_0^{2\pi}r\cdot|F(re^{i\theta})|^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

其中 $G_n\subset G_{n+1}\subset G,(n=1,2,\cdots),\rho_n<\rho_{n+1}<1,(n=1,2,\cdots)$ 且 $\rho_n\to 1$，$\varphi(w)$ 是 $f_0(z)$ 的反函数。且 $\varphi(|w|<\rho_n)=G_n$，但在 $|w|<1$ 内

$$F(w)=f'(\varphi(w))\varphi'(w)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kw^k$$

且

$$\int_0^{2\pi}|F(re^{i\theta})|^2\mathrm{d}\theta=2\pi\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^2r^{2k}$$

注意到 $a_0=\varphi'(0)=\dfrac{1}{f'_0(z_0)}=R$ 则有

$$\int_0^{\rho_n}\int_0^{2\pi} |F(re^{i\theta})|^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \pi\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^2\frac{\rho_n^{2k+2}}{k+1}$$

$$\geqslant \pi|a_0|^2\rho_n^2 = \pi R^2\rho_n^2$$

令 $n\to\infty$ 便有

$$N(f)\geqslant \pi R^2$$

显然上式虽成立,仅当且当 $a_k=0(k=1,2,\cdots)$,此时

$$f'(\varphi(w))\varphi'(w)=a_0=\frac{1}{f'_0(z_0)}$$

$$f(\varphi(w))=\frac{w}{f'_0(z_0)}$$

或　$$f(z)=\frac{f_0(z)}{f'_0(z_0)}=f_1(z)$$

应用基本定理我们还可以得到:

设 H 与 G 分是由逐段光滑、解析的闭曲线 Γ 与 L 所围成的有界单连通区域,若 $w=f(z)$满足在 H 内解析,在 $\overline{H}=H+\Gamma$ 上连续,且把 Γ 双方单值地变成 L,即 $f(z)$在 Γ 上单叶,且 $f(\Gamma)=L$,则 $f(z)$在 H 内单叶,且把 H 共形地映射为 G。

用记号 $G(C)$表示以闭曲线 C 围成的区域,$f(z)$是 $G(C)$中的单叶函数,且 $f(G(C))=D$,$(D=\{w;|w|<1\})$,固定 $z_0\in G(C)$,$f(z_0)=0$,对 $0<\rho<1$ 用 C_ρ 表示圆周$|w|=\rho$ 关于$f(z)$的原象曲线,并称之为等高线,若从 z_0 出发的射线均与 $G(C)$交成一线段,则称 $G(C)$为关于 z_0 的星形区域,并用 $r(\varphi)$表示幅角为 φ 的射线与$G(C)$交成线段的长度。

设 C 变形为C_1,$z_0\in G(C_1)$,$f_1(z)$表示 $G(C_1)$到单位圆 D 的单叶函数,若 $G(C)$与 $G(C_1)$都是关于 z_0 的星形区域,令

$$\lambda=\inf\frac{r_1(\varphi)}{r(\varphi)},\quad \mu=\sup\frac{r_1(\varphi)}{r(\varphi)}$$

当 $G(C_1)\subset G(C)$时有下面的变分原理。

变分原理　若 $G(C_1)\subset G(C)$,且 $G(C_1)\neq G(C)$,则

(1) $G(C_{1\rho})\subset G(C_\rho)$,且 $C_1\cap C_\rho=\Phi$,Φ 表示空集,$0<\rho<1$,

(2) $|f'_1(z_0)|>|f'(z_0)|$,

(3) C_1 与 C 若有公共点 z,且 $f'_1(z)$ 与 $f'(z)$ 存在时 $|f'_1(z)|<|f'(z)|$。

证 令

$$F(w)=f[f_1^{-1}(w)]$$

则由许瓦兹(Schwarz)引理知

$$|F(w)|<|w|,\ |F'(0)|<1$$

[因 $G(C)\neq G(C_1)$,故 $F(W)\neq \eta w, |\eta|=1$,从而不会出现等号]。令 $w=f_1(z)$,则由 $|F(w)|<|w|$ 得到 $|f(z)|<|f_1(z)|$。由此即可推出变分原理的前两个结论。

若 C_1 与 C 有公共点 z,令 $w=f(z), w_1=f_1(z)$,则 $|w|=|w_1|=1$,且 $w=F(w_1)$,作函数

$$\varphi(\zeta)=\frac{F(w_1\zeta)}{F(w_1)}$$

则 $\varphi(\zeta)$ 在 $|\zeta|<1$ 中单叶,且 $|\varphi(\zeta)|<1$,从而

$$\begin{aligned}|F'(w_1)|=\varphi'(1)&=\lim_{r\to1}\frac{|1-\varphi(r)|}{1-r}\\&\geqslant\lim_{r\to1}\frac{1-|\varphi(r)|}{1-r}\\&\geqslant\lim_{r\to1}\frac{1-r\exp\left[-\alpha\dfrac{1-r}{1+r}\right]}{1-r}=1+\frac{\alpha}{2}\end{aligned}$$

此处 $\alpha=-\log F'(0)$,且用到了 $|\varphi(r)|\leqslant r\exp\left[-\alpha\dfrac{1-r}{1+r}\right]$[见§2.2 中的定理 2.8]。由此得到 $|F'(w_1)|>1$,即 $|f'_1(z)|<|f'(z)|$。

若令 $C_2=C\cap G(C_1), C_3=C_1\cap G(C), \Gamma=C-C_2$,以 θ_1 与 θ_2 分别表示 Γ 与 C_3 的象曲线的长度,那么必有 $\theta_2>\theta_1$。这说明若 C 发生了变形,C 上向内变形与未变形的那些弧段在变形前作为原区域的部分边界其象曲线的长度,要比向内变形的那些弧在变形后作为新区域的部分边界的象曲线长度小一些。