紅專大学函授教材

高中数学复習

(代数部分)

第三分册

(初稿)

天津师范学院數理系江澤生編

高等教育出版社

紅專大学函授教材

高中数学复習

(代数部分)

第三分册

(初稿)

天津師范学院数理系江澤生編

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号
(北京市書刊出版業營業許可証出字第054号)
人民教育印刷厂印刷　新华书店发行

統一書号13010.566　開本850×1168 $1/32$　印張 $^{12}/_{16}$
字数20,000　印數9001—20000　定價(6)¥0.08
1959年1月第1版　1959年3月北京第2次印刷

第三分册目录

第五章 函数

§1. 常量与变量 我們研究自然現象和社会生活中的各种問題，常常要遇到各种不同的量；例如，重量、时間、速度、長度、面积、体积、溫度、压力、比重、产値等等。这些量当中有的量在研究过程中不起变化，也就是保持一定的数値，这种量叫做常量；有的量却要起变化，也就是可取各种不同的数値，这种量叫做变量。例如，把一个密閉容器內的气体加热时，气体的体积和气体分子的个数保持一定，所以是常量；但是相反地，气体的溫度与压力却要改变，它們取得越来越大的数値，所以是变量。

恩格斯在自然辯証法和反杜林論二書中分別写道："笛卡尔的变量是数学的轉折点，就是由于有了变量，才在数学中引进了运动与辯証法。"研究常量的初等数学，至少在大体上是屬于形式邏輯的范圍，而研究变量的数学——其中最重要的部分是无穷小量分析——則在本質上正是辯証法在数学上的应用。当我們研究自然規律时，随时都要联系到常量与变量。

我們注意，上述的常量与变量的概念，要依賴于研究这个現象所在的場合。因为同一个量，在某种情况下可以認为是常量；而在別的情况下，就可能是变量。例如，秤量物体的重量时，要認清秤量是在地球表面上同一地方进行，还是在不同的地方进行。若在同一地方秤量，則确定重量的重力加速度是常量；若在不同的地方秤量，則重力加速度就不能算做常量而是变量。

在数学上討論的量，不管是常量还是变量，都不顧它們的物理意义而只注意它們的数値。常量一般用拉丁字母的开头几个来記：$a, b, c, \cdots$，变量一般用拉丁字母最末几个来記：$x, y, z, \cdots$。量 x 的每一个値可以是一个数，因而可以用数軸上的点来代表它。如

果量 $x=a$ 是常量，則用数軸上的一个定点来表示；如果量 x 是变量，則用数軸上的动点表示。

例 1. 某种貨物一千克的單价是 a 元，x 千克的总价是多少？

解：設 x 千克的总价是 y 元，那么就可得到：

$$y=ax.$$

用这个公式，我們可以求得这种貨物任何數量的总价，例如：2 千克的总价是 $2a$ 元；$\frac{1}{3}$ 千克的总价是 $\frac{1}{3}a$ 元等。

在研究这个問題的过程中，貨物的單价 a 是保持一定数值的量，它就是一个常量；x 却可以在正数范圍內取不同的数值，它就是一个变量；y 的数值是由 x 所取的数值来确定的，它也可以取不同的数值，因此，它也是一个变量。

2. 圓的直徑与圓周長，在不同的情形可取不同的值。因此，一般說来，它們都是变量，但周長对直徑的比永远保持同一个值，因此它是常量，也就是通常所說的圓周率 π。

3. 一定質量的气体的体积 v 与压力 p 都是变量；但由物理学知道，当温度不变时乘积 vp 是个常量，可是当溫度变更时，乘积 vp 也就成变量了。

§2. 区間。測量变量时有很多不同的情况，有的变量可以取任一实数值，沒有任何限制（如由一定时間 t 开始計算，时間 t 可取任一实数值，可正可負）；有的只取限于某一不等式的值（如絕对溫度 t，則 $t>-273°C$）；还有的变量只能取某些值，有一定的限制（如一城市的居民，只能取正整数）。所以取值的范圍如何，須看实际問題的要求而定。当我們应用变量时，必須明确它的取值范圍是限于什么数。

若有两个确定的实数 a 及 b，假定 $a<b$，則一切滿足：

$a\leqslant x\leqslant b$	記为 $[a, b]$
$a<x<b$	記为 (a, b)
$a<x\leqslant b$	記为 $(a, b]$
$a\leqslant x<b$	記为 $[a, b)$

的数 x 所合成的数集常称为区間，a 及 b 称为区間的端点。a 为左端点，b 为右端点。包括两端点在內的区間叫做閉区間，不包括两端点的叫做开区間。也有些区間是左开右閉或左閉右开的。还有

变量的值不受任何限制的，常記做：$-\infty<x<+\infty$，这样一种数集常称为无限区間。又如：

$$a\leqslant x<+\infty,\qquad a<x<+\infty,$$
$$-\infty<x\leqslant a,\qquad -\infty<x<a$$

的意义也很明白，可无須解示。应当特别提出，这里$+\infty$或$-\infty$所表示的不是什么数或点，也不可看作区間的端点，只不过是一种記号。

§3. 函数 在研究自然現象或技术过程中及在实际生活中，常量較少而变量較多，因此研究变量就更有实际意义。但是有的变量的变化并不是独立进行的，往往是受到其他变量的影响，它們之間是相互牵制相互联系的。例如，农作物的生長情况与气溫、施肥等都有关系；飞机航行的距离与速度时間等有关系，这些关系是非常复杂的，有的可以用数学式子表示出来，有的却并不能用数学式子来表示。这里我們研究的是几种用簡單的代数式表示的相互关系。例如，圓面积公式：$S=\pi r^2$对于半徑r的数值可以在正数范圍內任意选擇，对于r的每一个确定的值，圓的面积S有确定的值和它对应。又如当溫度不变时，气体的压力p与它的原容积v成反比。若用式子表示卽$v=\dfrac{k}{p}\left(k\text{为常量}\right)$。这样給出$p$的一个数值时，就能确定出$v$的数值。象这种数值可以任意选擇的（有时要在某一个范圍內）的变量叫自变量。如$S=\pi r^2$中的r及$v=\dfrac{k}{p}$中的p。如果对于自变量的每一个确定的值，另一个变量有确定的值和它对应，則后一个变量叫做前一个变量的函数。如上述公式中的S及v。

在研究两个变量x和y的函数关系的时候，“y是x的函数”这一句話，我們用符号簡單地表示为：

$$y=f(x).$$

例如，S是r的函数可以写成$S=f(r)$；v是p的函数可以写成

$v=f(p)$。

如果我們同时要研究几个不同的函数关系，则就在括号外面采用不同的字母来区别它們。例如，圓的周長C是它的半徑r的函数。圓的面积S也是它的半徑r的函数，但是$C=2\pi r$, $S=\pi r^2$，两个函数关系并不相同，因此，就应当在括号外面采用不同的字母来分别表示；例如，可以写成$C=f(r)$和$S=F(r)$。

对于自变量x的一个值a，函数$f(x)$的对应值可以記做$f(a)$。例如，如果

$$f(x)=3x^2+2x-1,$$

則

$$f(2)=3(2)^2+2(2)-1=15,$$

$$f(0)=3(0)^2+2(0)-1=-1,$$

$$f(-4)=3(-4)^2+2(-4)-1=39,$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=3\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(-\frac{1}{2}\right)-1=-\frac{5}{4}。$$

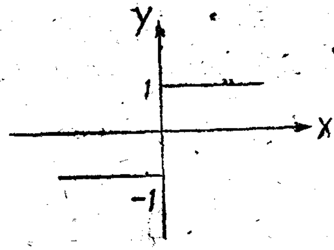
§ 4. 函数关系的表示法 两个变量之間的函数关系——从已給自变量值求出其对应函数值的对应法则，可以用各种方式表达出来，最常用的表示法有解析法、列表法和圖象法。

(1) 解析法 两个变量間的函数关系，有时可以用一个含有这两个变量和各种数学运算的等式来表示，这种表示方法叫做**解析法**。例如，$y=3x^2$；$y=\frac{1}{1+x^2}$；$y=\sqrt{1+\sin x}$；$x+y=10$ 等等，都是用解析法表示的函数。

函数用解析法表示时，对于自变量的一切值，不一定用一个分析式，有时可以对于自变量某一部分数值，用某一分析式，对于另一部分数值，可用另一分析式。例如，

$$y=f(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } x>0\\ 0 & \text{当 } x=0\\ -1 & \text{当 } x<0\end{cases}$$

是确定在区間$(-\infty,+\infty)$上的一个函数，它的圖形如下：



在物理学、化学、热力学以及其他应用科学上，我們也經常会遇到当自变量在不同部分变化时，要用不同的分析式来表达。例如，在恒溫下，气体压力 p 与体积 v 的函数关系：当 v 不太小时，波义耳-馬利奥脫定律可以适用；当 v 相当小时，函数关系就要用房特瓦定律来表示，即

$$p=\begin{cases}\dfrac{k}{v} & \text{当 } v\geqslant v_0,\\[2ex] \dfrac{\gamma}{v-\beta}-\dfrac{\alpha}{v^2} & \text{当 } v<v_0.\end{cases}$$

（k, α, β, γ 都是常数）

（2）列表法　在实际应用中，常将自变量 x 的一系列的値和函数 y 的对应値列成一个表，也可以表示函数关系，这种表示方法叫做列表法。数的平方表、立方表、对数表、三角函数等等都是用列表法来表示函数关系的例子。这种表示法在自然科学和工程技术上特别用得多。例如，确定某一个彈簧的長度 y 和所負載的重量 x 間的关系，得出下面的結果：

x（千克）	0	1	2	3	4	5	6
y（厘米）	12	12.5	13	13.5	14	14.5	15

这个表的第一列是自变量 x 的値，第二列是函数 y 的对应値，这就是用列表法来表示函数关系。

用列表法表示函数关系，我們很容易得出对应于自变量某一个值(只要表里有的)的函数值，但是用列表法来表示函数关系，不可能把自变量所有的值都列在表里，也就不可能把所有的函数值完全列出来。

(3) 圖象法　为了明显地表示出两个变量間的函数关系，我們可以利用圖象，这种表示方法叫做圖象法。例如，自动記录器可以把大气压力与时間的函数关系用曲綫表示出来。

用圖象法表示函数关系，从圖象中很容易看出函数关系。例如，可以看出自变量的値增加的时候，函数值增加还是减少，以及函数最大的値或者最小的値等等。这种表示法有时还是表示函数关系的唯一的或者簡單的方法。可是用圖象法表示函数关系，有时不可能得出完全的圖象，通常只能得出近似的圖象。但是圖象法还是研究函数关系的非常有用的方法。精密的研究函数的圖象，以及一元一次及二次的函数的圖象，在解析几何中，还要系統地講，我們这里就不多談了。

習　題

1. 举出常量和变量的一些实例。

2. 在下面的公式里，哪些量是常量？哪些量是变量？

   1) 等速运动公式：$s=vt$；

   2) 自由落体公式：$s=\frac{1}{2}gt^2$；

   3) 綫膨脹公式：$l=l_0(1+\alpha T)$.

3. 若 $f(x)=\frac{2x+1}{x-2}$；求 $f(3), f(-4), f(0), f\left(-\frac{1}{2}\right), f(\sqrt{2}), f(a^2+3)$ 的值。

4. 一人早晨八点鐘由甲地出發到乙地去。第一小时走了 5 公里，然后上坡走 1 小时，走了 3 公里，以后休息半小时，休息以后以每小时 4 公里的速度繼續前进，于中午到达乙地。

1) 列表表示这人离开甲地的距离和时間的函数关系（从八点到十二点每半小时一次），再根据表里的材料作出圖象。

2) 根据圖象求 i) 在 9 点、10 点半和 11 点 15 分的时候这人离开 A 地的公里数；

ii)他停下来休息的时候离开A地的公里数；iii)他距A地2.5公里、6.5公里、10公里、14公里的时間。

第六章　二元二次方程組

§1. 二元二次方程組　含有两个未知数、最高次项的次数是二次的方程，就叫做二元二次方程。它的一般形式是：

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

这里a, b, c不都是0。ax^2, bxy, cy^2叫做二次項，dx和ey叫做一次項，f叫做常数項。

很明显，一个二元二次方程一般可以有无数組解。事实上，任意假定一个未知数的一个值，代入已知的二元二次方程，就可以得出另一个未知数的一元方程，只要这个一元方程有一个根或者两个根，我們就可以得出巳知的二元二次方程的一組解或者两組解。

由一个二元二次方程和一个二元一次方程，或者由两个二元二次方程組成的方程組，都叫做二元二次方程組。当然比两个多的未知数，次数比二次高的方程組，在生产上和工作上有时也經常遇到，但在初等数学里，只能研究几个特例的解法，不能做一般的研究。所以我們这里只重点复習各类型的二元二次方程組的解法。

由一个二元二次方程和一个二元一次方程組成的方程組。这种方程組的一般形式是：

$$\begin{cases}ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0,\ (a, b, c\text{不都是}\ 0) & (1)\\ mx+ny+p=0. & (2)\end{cases}$$

这种形式的方程組都可以用代入法来解。我們首先把二元一次方程(2)中的一个未知数解出来用另一个未知数来表示，即$y=$ $=-\dfrac{mx+p}{n}$(只要$n\neq0$，否則解出x也一样)，然后代入二元二次

方程(1)中。这样，方程(1)就变成了一元方程，并且它的次数不大于2. 解这个方程，我們就可以求得一个未知数的値。用这个値代入到方程(2)，就可求得另一个未知数的値。

一个二元二次方程和一个二元一次方程所組成的方程組，一般說来都有两組解，但是在特殊情形也可能只有一組解，或者无解，或者无限多組解。将来我們講解析几何时还要談到，那时我們用画圖的方法来說明就可以理解得更淸楚。以下我們举几个解这类方程組的例子。

例 1. 解方程組:

$$\begin{cases} y^2-x^2+2x+2y+4=0, & (1) \\ 2x-y-7=0. & (2) \end{cases}$$

解: 从②解出y: $$y=2x-7, \quad (3)$$

将③式代入①，得

$$(2x-7)^2-x^2+2x+2(2x-7)+4=0,$$

整理后得到: $$3x^2-22x+39=0,$$

解这个方程，得 $$x_1=3; \quad x_2=\frac{13}{3}.$$

用 $x_1=3$ 代入③，得

$$y_1=-1;$$

用 $x_2=\frac{13}{3}$ 代入③得

$$y_2=\frac{5}{3}.$$

因此，这个方程組有两組解:

$$\begin{cases} x_1=3, \\ y_1=-1. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=\frac{13}{3}, \\ y_2=\frac{5}{3}. \end{cases}$$

2. 解方程組:

$$\begin{cases} y^2-x^2+2x+2y+4=0, & (4) \\ y-x=0. & (5) \end{cases}$$

解: 由⑤解出 $y=x$，然后y値代入④式，即得:

$$x^2-x^2+2x+2x+4=0,$$

化簡得: $$4x+4=0, \text{ 即 } x=-1.$$

将x値代入⑤得 $$y=-1.$$

所以原方程組的解是:

$$\begin{cases} x=-1; \\ y=-1. \end{cases}$$

3. 解方程組:

$$\begin{cases} y^2-x^2+2x+2y+4=0, & (6) \\ y+x=0. & (7) \end{cases}$$

解:由(7)解出 $y=-x$ 代入到(6)式,即得

$$x^2-x^2+2x-2x+4=0,$$

化簡得: $$4=0,$$

这个等式不合理,所以原方程組无解。

4. 解方程組:

$$\begin{cases} y^2-x^2+2x+2y=0, & (8) \\ y+x=0. & (9) \end{cases}$$

解:由(9)解出 $y=-x$ 代入(8)式,即得

$$x^2-x^2+2x-2x=0.$$

这說明(9)是(8)的一个因式,也就是說,虽然表面上是两个方程,实际上只是一个方程。因此,这样的方程組有无限多組解。

§2. 几种特殊形式的方程組的解法 有几种經常見到的方程組,除去用上述的代入法外,还可以結合它們的特殊形状去解。

1) 对称方程組

$$\begin{cases} x+y=a, \\ xy=b. \end{cases}$$

它的特点是:x 与 y 互換后所得的方程組不变,所以这种方程組叫做关于 x, y 的对称方程組。这个方程組如果有一組解是 $x=\alpha$, $y=\beta$, 那么必定还有一組解是 $x=\beta$, $y=\alpha$。遇到这类方程,我們可以应用韋达定理做一个新方程:

$$z^2-az+b=0.$$

这个方程的两个根就是 α 和 β。根据二次方程的公式,我們可以得出 z 的两个根 z_1 和 z_2:

$$z_1=\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2};$$

$$z_2=\frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}.$$

因此，我們可以得出原方程組的解是：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}, \\ y_1=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}, \\ y_2=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}. \end{cases}$$

例 1. 解方程組:

$$\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6. \end{cases}$$

解: x 和 y 是方程

$z^2-5z+6=0$ 的两个根，解这个方程，得

$$z_1=3,\quad z_2=2.$$

所以原方程組的解是:

$$\begin{cases} x_1=3, \\ y_1=2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=2, \\ y_2=3. \end{cases}$$

2. 解方程組:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=8, \\ \dfrac{1}{xy}=7. \end{cases}$$

解: 先把 $\frac{1}{x}$ 和 $\frac{1}{y}$ 作为未知数，它們应是方程:

$$z^2-8z+7=0$$

的两个根，解这个方程，得

$$z_1=7;\quad z_2=1.$$

所以

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x_1}=7, \\ \dfrac{1}{y_1}=1; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{x_2}=1, \\ \dfrac{1}{y_2}=7. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{7}, \\ y_1=1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=1, \\ y_2=\dfrac{1}{7}. \end{cases}$$

我們可以驗算，这两組解都是原方程組的解。

II)
$$\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ x+y=b. \end{cases}$$

这类方程組仍然是对称方程組。先将第二个方程两边平方，再分别减去第一个方程的两边，再用 2 除，就可得:

$$xy=\frac{b^2-a}{2}.$$

把这个方程和原方程組的第一个方程 $x^2+y^2=a$ 联立，按 I) 的办法求解，就可得出原方程組的解。

例 解方程組

$$\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x+y=7. \end{cases}$$

解: 将第二式两边平方后分别减去第一式的两边，得:

$$2xy=24 \quad 即 \quad xy=12.$$

将最后解出这个方程和原方程組的第二个方程联立，照 I)的方法求解，得

$$\begin{cases} x_1=4, \\ y_1=3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=3, \\ y_2=4. \end{cases}$$

III)
$$\begin{cases} x-y=a, \\ xy=b; \end{cases} \text{和} \begin{cases} x^2+y^2=a, \\ x-y=b. \end{cases}$$

这两类方程組都可以变形为:

$$\begin{cases} x+(-y)=a, \\ x(-y)=-b; \end{cases} \text{和} \begin{cases} x^2+(-y)^2=a, \\ x+(-y)=b. \end{cases}$$

这样将未知数看成是 x 与 $-y$, 则这一类的解法与 1) 的解法相同，不过求出的解是 x 和 $-y$, 但是很容易地就可得出 x 与 y 的值了。

例 1. 解方程組:

$$\begin{cases} x-y=7, \\ xy=18. \end{cases}$$

解: 将第二式两边乘以 -1, 得

$$x(-y)=-18.$$

将这个方程与原方程組的第一个方程联立，按照 I)的方法求解，得

$$\begin{cases} x_1=9, \\ -y_1=-2; \end{cases} \text{和} \quad \begin{cases} x_2=-2, \\ -y_2=9. \end{cases}$$

所以原方程組的解是:

$$\begin{cases} x_1=9, \\ y_1=2; \end{cases} \text{和} \quad \begin{cases} x_2=-2, \\ y_2=-9. \end{cases}$$

2 解方程組:

$$\begin{cases} x^2+y^2=6, \\ x-y=2. \end{cases}$$

解: 用 $-y$ 代 y 将这組方程变形为

$$\begin{cases} x^2+(-y)^2=6, \\ x+(-y)=2. \end{cases}$$

再按照 II)的解法,得:

$$\begin{cases} x_1=1+\sqrt{2}, \\ -y_1=1-\sqrt{2}; \end{cases} \text{和} \quad \begin{cases} x_2=1-\sqrt{2}, \\ -y_2=1+\sqrt{2}. \end{cases}$$

所以原方程組的解是:

$$\begin{cases} x_1=\ \ 1+\sqrt{2}, \\ y_1=-1+\sqrt{2}; \end{cases} \text{和} \quad \begin{cases} x_2=\ \ 1-\sqrt{2}, \\ y_2=-1-\sqrt{2}. \end{cases}$$

IV) $\begin{cases} x^2-y^2=a, \\ x+y=b; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-y^2=a, \\ x-y=b. \end{cases} (b\neq 0)$

这两种方程組，它們第一个方程的左边都能被其第二个方程的左边所除尽,这样,原方程組变形为

$$\begin{cases} x+y=b, \\ x-y=\dfrac{a}{b}; \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=b, \\ x+y=\dfrac{a}{b}. \end{cases} (b\neq 0)$$

这时就很容易求出原方程組的解,但应注意,对这样方程組只能求出一組解。

例 1. 解方程組:

$$\begin{cases} x^2-y^2=48, \\ x+y=6. \end{cases}$$

2. 解方程組:

$$\begin{cases} x^2-y^2=a^4-1, \\ x-y=a^2+1. \end{cases}$$

这两个例都很簡單,讀者可照上述方法解之。

V) $\begin{cases} x^3+y^3=a, \\ x+y=b; \end{cases}$ $\begin{cases} x^3-y^3=a, \\ x-y=b. \end{cases}$ $(b\neq 0)$

这两类方程組，它們的第一个方程左边都能被第二个方程的左边除尽，这样，原方程組变形为

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2=\dfrac{a}{b}, \\ x+y=b; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+xy+y^2=\dfrac{a}{b}, \\ x-y=b. \end{cases} \quad (b\neq 0)$$

将这两組的第二式两边平方，再分别减去第一式的两边，就可以求出 xy 的値，于是方程組就变形为

$$\begin{cases} x+y=b, \\ xy=\dfrac{b^3-a}{3b}; \end{cases} \quad \begin{cases} x-(-y)=b, \\ x(-y)=\dfrac{b^3-a}{3b}. \end{cases}$$

再按照前述的方法卽可求出这两个方程組的解。

例 1. 解方程組:

$$\begin{cases} x^3+y^3=7, \\ x+y=1. \end{cases}$$

解: 将第一式的两边分別除以第二式的两边，得

$$x^2-xy+y^2=7,$$

于是我們来解方程組:

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2=7, \\ x+y=1. \end{cases}$$

得到: $\begin{cases} x_1=2, \\ y_1=-1; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-1, \\ y_2=2. \end{cases}$

这两組解就是原方程組的解。

2. 解方程組:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{y^3}=26, \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=2. \end{cases}$$

解: 設 $\dfrac{1}{x}=u$, $\dfrac{1}{y}=v$, 則原方程組就成为

$$\begin{cases} u^3-v^3=26, \\ u-v=2. \end{cases}$$

将得出的新方程組的第一式两边分別除以它的第二式两边，得

$$u^2+uv+v^2=13.$$

現在我們就轉向解方程組:

$$\begin{cases} u^2+uv+v^2=13, \\ u-v=2. \end{cases}$$

得到:
$$\begin{cases} u_1=3, \\ v_1=1; \end{cases} \quad \begin{cases} u_2=-1, \\ v_2=-3. \end{cases}$$

代入 $\frac{1}{x}=u$, $\frac{1}{y}=v$ 即得

$$\begin{cases} x_1=\frac{1}{3}, \\ y_1=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=-1, \\ y_2=-\frac{1}{3}. \end{cases}$$

§3. 兩个二元二次方程組成的方程組 这种方程組的一般形式是:

$$\begin{cases} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2+d_1x+e_1y+f_1=0, (a_1, b_1, c_1 \text{ 不都是 } 0) \\ a_2x^2+b_2xy+c_2y^2+d_2x+e_2y+f_2=0. (a_2, b_2, c_2 \text{ 不都是 } 0) \end{cases}$$

把它消去一个未知数以后，一般要得出一个一元四次方程。这种方程的一般解法我們还沒有学到。例如，方程組

$$\begin{cases} y=x^2+1, \\ x=y^2-2. \end{cases}$$

将第一式代入第二式經整理后卽得:

$$x^4+2x^2-x-1=0.$$

这个四次方程一般須在到高等代数中才能解，但是在某些特殊情形，有些二次方程組可以化成我們会解的方程組。下面是比較常見的几种情形:

I) 有一个(或者两个)方程可以分解成两个一次因式乘积的。

i) 在方程組中有一个方程可以分解成两个一次因式乘积的，卽

$$(lx+my+n)(px+qy+r)=0,$$
$$a_2x^2+b_2xy+c_2y^2+d_2x+e_2y+f_2=0.$$

那么，我們只要按照 §1 的方法来解下面两个方程組:

$$\begin{cases} lx+my+n=0, \\ a_2x^2+b_2xy+c_2y^2+d_2x+e_2y+f_2=0; \end{cases}$$