

刘树堂 编著

杆系结构有限元分析与 MATLAB 应用



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

杆系结构有限元分析与 MATLAB应用

刘树堂 编著 ◇



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书紧密结合 MATLAB 编成语言,系统地介绍了杆系结构有限元分析方法。

本书共分 9 章,第 1 章概括地介绍了杆件结构的基本类型及其分析的基本概念。第 2 章到第 7 章分别介绍了连续梁、平面桁架、平面刚架、平面板架、空间桁架和空间刚架这 6 种典型杆系结构的分析方法,其中的每一章相对独立性比较强,便于读者快捷地学习各章内容。第 8 章给出了 6 种基本杆系结构类型的分析程序及分析例题。第 9 章比较详细地介绍了杆系结构特殊问题的分析方法,如支座发生位移、弹性支座、倾斜支座、平面节点、杆件传力中断、杆件端部弹性连接、梁柱单元等。另外,本书还给出了 6 种典型杆系结构的计算分析习题。在附录中给出了荷载和其他因素作用于约束杆件所产生的约束杆端力。

本书是结构工程及其相关专业的工程技术人员和科研人员从事结构分析计算的必备科技书,也可作为高等院校相关专业师生的教材和教学参考书。

图书在版编目 (CIP) 数据

杆系结构有限元分析与 MATLAB 应用/刘树堂编著.

北京:中国水利水电出版社,2007

ISBN 978-7-5084-4141-2

I:杆... II.刘... III.①杆件—结构分析:有限元分析②杆件—结构分析—计算机辅助计算—软件包,MATLAB IV.TU323.02

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 125712 号

书 名	杆系结构有限元分析与 MATLAB 应用
作 者	刘树堂 编著
出版 发行	中国水利水电出版社 (北京市三里河路 6 号 100044) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: sales@waterpub.com.cn 电话: (010) 63202266 (总机)、68331835 (营销中心)
经 售	北京科水图书销售中心 (零售) 电话: (010) 88383994、63202643 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	中国水利水电出版社微机排版中心
印 刷	北京市兴怀印刷厂
规 格	787mm×1092mm 16 开本 19 印张 451 千字
版 次	2007 年 1 月第 1 版 2007 年 1 月第 1 次印刷
印 数	0001—3000 册
定 价	39.00 元

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社营销中心负责调换

版权所有·侵权必究

前 言

在工程结构中，长宽比很大的构件通常称为杆件。由杆件组成的结构就称为杆系结构。杆系结构求解是为了获得杆件内力、支座反力、节点位移等。有了这些结果，就可设计杆件截面、连接和基础，校核结构刚度。杆系结构的求解有两种经典方法：力法和位移法。力法是以杆件内力为未知量进行求解；位移法是以节点位移为未知量进行求解。杆系结构有限元分析方法就是以位移法为基础并与矩阵理论相结合所形成的一种通用的程序化分析方法。杆系结构有限元分析的任务就是为结构分析建立通用的程序算法公式，借助于计算机编程语言来完成杆系结构求解的任务。在以往结构有限元分析编程实践中，通常采用 BASIC、FORTRAN、C、C++ 等程序语言。随着计算机的迅速发展与广泛应用，许多优秀的程序语言应运而生，MATLAB 就是其中代表。专家们把 MATLAB 誉为“工程师的技术语言”，高度地概括了它易于编程、易于应用的特点。MATLAB 具有基本的数值运算、矩阵运算、符号运算、绘制图形、界面开发、与其他程序语言接口等多种功能。尤其是 MATLAB 的强大矩阵运算功能，使编程工作大大简化，程序长度大大缩短。它的符号运算功能给结构分析、公式推导带来了很大方便。它的图形功能使计算结果分析更为快捷有效。本书紧密结合 MATLAB 介绍杆系结构有限元分析方法，使读者有效地学习杆系结构有限元分析方法和 MATLAB 编成语言。

本书共分 9 章，第 1 章概括地介绍了杆件结构的基本类型及其分析的基本概念。第 2 章到第 7 章分别介绍了连续梁、平面桁架、平面刚架、平面板架、空间桁架和空间刚架这 6 种典型杆系结构的分析方法，其中的每一章相对独立性比较强，便于读者快捷地学习各章内容。第 8 章给出了 6 种基本杆系结构类型的分析程序及分析例题。第 9 章比较详细地介绍了杆系结构特殊问题的分析方法，如支座发生位移、弹性支座、倾斜支座、平面节点、杆件传力中断、杆件端部弹性连接、梁柱单元的 $P-\Delta$ 效应等。另外，本书还给出了 6 种典型杆系结构的计算分析习题。在附录中给出了荷载和其他因素作用于约束杆件所产生的约束杆端力。

学习本书的知识内容，读者可提高工程结构计算与分析的能力，掌握以

编程方法解决工程和研究领域中的诸多问题。另一方面,通过学习有限元分析原理,读者可对大型结构分析软件(如 ANSYS、SAP、ETABS 等)的开发原理有比较清楚的了解,为这些软件的学习和灵活正确应用奠定非常重要的基础。本书是结构工程及其相关专业的工程技术人员和科研人员从事结构分析计算的必备科技书,也可作为高等院校相关专业师生的教材和教学参考书。

衷心感谢广州大学科技处及土木工程学院对本书出版的大力支持。本书编写中得到了吴冬梅、易少华两位研究生的支持和帮助,在此一并表示谢意。

由于作者水平有限,书中难免会出现一些疏漏之处,敬请读者批评指正。

作者

2006 年 10 月

主要符号说明

- A ——作用力矢量
- C_X 、 C_Y 、 C_Z ——杆件轴线方向对结构坐标轴 x 、 y 、 z 的方向余弦
- c_{11} 、 c_{12} 、 c_{13} ——杆件坐标 x_M 轴对结构坐标轴 x 、 y 、 z 的方向余弦
- c_{21} 、 c_{22} 、 c_{23} ——杆件坐标 y_M 轴对结构坐标轴 x 、 y 、 z 的方向余弦
- c_{31} 、 c_{32} 、 c_{33} ——杆件坐标 z_M 轴对结构坐标轴 x 、 y 、 z 的方向余弦
- D ——位移矢量
- E ——材料的弹性模量
- G ——材料的剪切模量
- A_X ——杆件 (单元) 横截面积 (Section area about axis x_M)
- I_X ——杆件 (单元) 横截面绕 x_M 轴的扭转常数 (Moment of inertia about axis x_M)
- I_Y ——杆件 (单元) 横截面对 y_M 轴的主惯性矩 (Moment of inertia about axis y_M)
- I 、 I_Z ——杆件 (单元) 横截面对 z_M 轴的主惯性矩 (Moment of inertia about axis z_M)
- L ——杆件 (单元) 长度 (Length)
- j_1 、 j_2 、 j_3 、 j_4 、 j_5 、 j_6 ——杆件 (单元) j 端对应的总节点位移标号
- k_1 、 k_2 、 k_3 、 k_4 、 k_5 、 k_6 ——杆件 (单元) k 端对应的总节点位移标号
- m ——结构的杆件 (单元) 数
- n_j ——结构的节点数
- n ——非约束位移数
- n_r ——约束位移数
- n_e ——弹性约束位移数
- P ——集中力荷载符号常量
- x_j 、 y_j 、 z_j ——节点坐标
- x 、 y 、 z ——结构参考坐标系的坐标轴
- x_S 、 y_S 、 z_S ——结构坐标系的坐标轴
- x_M 、 y_M 、 z_M ——杆件 (单元) 坐标系的坐标轴
- $\{A\}$ ——直接节点荷载向量或作用力向量
- $\{A_C\}$ ——综合节点荷载向量 (Comprehensive Joint Load)
- $\{A_{CR}\}$ ——约束位移方向的综合节点荷载向量
- $\{A_{CD}\}$ ——非约束位移方向的综合节点荷载向量
- $\{A_E\}$ ——等效节点荷载向量 (Equivalent Joint Load)

- $\{A_J\}$ ——总节点力向量
- $\{A_M\}$ ——杆件坐标系下杆端力向量或作用力矢量 A 的分量
- $\{A_{ML}\}$ ——杆件（单元）荷载产生的约束杆端力向量
- $\{A_S\}$ ——结构坐标系下杆端力向量或作用力矢量 A 的分量
- $\{C_{RL}\}$ ——累积约束向量 (Cumulated Restrained list vector)
- $\{D_J\}$ ——总节点位移向量 (Joint Displacement)
- $\{D\}$ ——非约束位移向量
- $\{D_R\}$ ——约束位移向量
- $\{D_M\}$ ——杆件坐标系下杆端位移向量
- $\{D_S\}$ ——结构坐标系下杆端位移向量
- $\{R_J\}$ ——总结点支座反力向量 (Joint Reaction)
- $\{R\}$ ——约束位移方向的支座反力向量
- $\{R_L\}$ ——约束表向量 (Restrained list vector)
- $\{S_R\}$ ——弹性支座刚度系数向量
- $[I_{10}]$ ——初等变换矩阵
- $[I_{A01}]$ ——初等变换矩阵
- $[I_{Q01}]$ ——初等变换矩阵
- $[R]$ ——转轴矩阵 (Rotation matrix)
- $[R_T]$ ——转轴变换矩阵 (Rotation and Translation matrix)
- $[S_M]$ ——杆件（单元）坐标系下单元刚度矩阵
- $[S_{MD}]$ ——结构坐标系下单元刚度矩阵
- $[S_J]$ ——总节点刚度矩阵 (Joint Stiffness matrix)
- $[S_{DD}]$ ——重新排列的总节点刚度矩阵的左上角部分
- $[S_{DR}]$ ——重新排列的总节点刚度矩阵的右上角部分
- $[S_{RD}]$ ——重新排列的总节点刚度矩阵的左下角部分
- $[S_{RR}]$ ——重新排列的总节点刚度矩阵的右下角部分
- $[T_M]$ ——集中荷载转移矩阵
- $[T_{MQ}]$ ——分布荷载转移矩阵

目 录

前言

主要符号说明

第 1 章 概论	1
1.1 杆系结构的类型	1
1.2 杆件坐标系与结构坐标系	3
1.3 坐标系的旋转	4
1.4 杆件坐标系下单元刚度矩阵方程	7
1.5 总节点刚度矩阵方程	11
1.6 总节点刚度矩阵方程的求解	17
1.7 最终杆端力的计算	22
1.8 双跨连续梁节点位移、支座反力和最终杆端力的计算	23
第 2 章 连续梁结构分析	26
2.1 连续梁单元刚度矩阵	26
2.2 连续梁总节点位移和总支座反力	27
2.3 连续梁的总节点刚度矩阵	28
2.4 连续梁综合节点荷载	30
2.5 杆件荷载引起的约束杆端力	31
2.6 最终杆端力计算	35
2.7 连续梁例题	35
2.8 连续梁 MATLAB 符号运算求解	40
第 3 章 平面桁架结构分析	49
3.1 平面桁架杆件坐标系定位与转轴矩阵	49
3.2 平面桁架的杆端位移与杆端力	50
3.3 平面桁架的转轴变换矩阵	52
3.4 平面桁架的单元刚度矩阵	53
3.5 平面桁架总节点位移与总支座反力	57
3.6 平面桁架的总节点刚度矩阵	58
3.7 平面桁架的综合节点荷载	59
3.8 杆件荷载引起的约束杆端力	60
3.9 平面桁架的最终杆端力	66
3.10 平面桁架例题	66
3.11 平面桁架符号运算分析求解	71

第4章 平面刚架结构分析	80
4.1 平面刚架杆件坐标系定位和转轴矩阵	80
4.2 平面刚架杆端位移与杆端力	80
4.3 平面刚架的单元刚度矩阵	84
4.4 平面刚架的总节点位移和总支座反力	87
4.5 平面刚架的总节点刚度矩阵	88
4.6 平面刚架的综合节点荷载	90
4.7 杆件上荷载引起的约束杆端力	91
4.8 平面刚架的最终杆端力	97
第5章 板架结构分析	98
5.1 板架的杆件坐标系定位与转轴矩阵	98
5.2 板架的杆端位移与杆端力	99
5.3 板架的转轴变换矩阵	100
5.4 板架的单元刚度矩阵	102
5.5 板架的总节点位移与总支座反力	105
5.6 板架的总节点刚度矩阵	106
5.7 板架的综合节点荷载	106
5.8 杆件上荷载引起的约束杆端力	107
5.9 板架的最终杆端力	112
第6章 空间桁架结构分析	113
6.1 空间桁架杆件坐标系定位与转轴矩阵	113
6.2 空间桁架的杆端位移与杆端力	115
6.3 空间桁架的转轴变换矩阵	116
6.4 空间桁架的单元刚度矩阵	117
6.5 空间桁架的总节点位移与总支座反力	120
6.6 空间桁架的总节点刚度矩阵	121
6.7 空间桁架的综合节点荷载	121
6.8 杆件上荷载引起的约束杆端力	123
6.9 空间桁架的最终杆端力	130
第7章 空间刚架结构分析	132
7.1 空间刚架杆件坐标系定位与转轴矩阵	132
7.2 空间刚架的杆端位移与杆端力	134
7.3 空间刚架的转轴变换矩阵	136
7.4 空间刚架的单元刚度矩阵	138
7.5 空间刚架的总节点位移与总支座反力	144
7.6 空间刚架的总节点刚度矩阵	145
7.7 空间刚架的综合节点荷载	146
7.8 杆件上荷载引起的约束杆端力	148

7.9 空间刚架的最终杆端力	155
第8章 基本杆系结构的数值计算分析	156
8.1 结构分析程序概要	156
8.2 结构分析程序使用的主要变量	156
8.3 连续梁数值计算分析	157
8.4 平面桁架数值计算分析	166
8.5 平面刚架数值计算分析	175
8.6 板架数值计算分析	186
8.7 空间桁架数值计算分析	198
8.8 空间刚架数值计算分析	211
第9章 杆系结构特殊情况分析	227
9.1 结构支座发生位移	227
9.2 弹性支座	235
9.3 倾斜辊轴支座	248
9.4 平面节点	249
9.5 非等直杆件	250
9.6 杆件传力中断	255
9.7 弹性连接	269
9.8 剪切变形	275
9.9 轴力与弯矩的相互作用	276
9.10 温度与初应变	277
习 题	279
第2章 连续梁结构分析	279
第3章 平面桁架结构分析	280
第4章 平面刚架结构分析	281
第5章 板架结构分析	283
第6章 空间桁架结构分析	284
第7章 空间刚架结构分析	284
附录1 约束杆端力	285
附表1-1 荷载引起的刚架杆的约束杆端力	285
附表1-2 温度变化引起的刚架杆的约束杆端力	286
附表1-3 初应变引起的刚架杆的约束杆端力	286
附表1-4 杆端位移引起的刚架杆的约束杆端力	287
附表1-5 荷载引起的桁架杆的约束杆端力	287
附录2 等直杆单元刚度系数	289
附表2-1	289
参考文献	291

第 1 章 概 论

在土木、机械、造船、航空和宇航等工程领域中，许多结构是由长度比横截面尺度大得多的长细构件所组成。人们通常把长度比其横截面尺度大得多的长细构件称为杆件，而把由长细构件组成的结构称为杆系结构，本书所涉及的结构均为杆系结构。在结构力学中研究的结构对象就是杆系结构。杆系结构求解的主要任务是获得杆件内力、支座反力和节点位移。有了这些结果就可用以设计杆件截面、连接和基础，校核结构刚度。求解杆系结构有两种经典方法：力法和位移法。力法是以杆件内力作为未知量进行求解，而位移法是以节点位移为未知量进行求解。杆系结构有限元分析方法是以位移法为基础建立起来的矩阵位移法。

结构有限元分析方法是伴随着计算机的诞生与发展而发展起来的，它依靠计算机编程语言获得其自身的生命力，借助于计算机编程语言来完成它的使命。在以往的结构有限元分析编程实践中，通常采用 BASIC、FORTRAN、C、C++ 等程序语言，它们在科学研究的数值分析中作出了不可替代的重要贡献。随着计算机的迅速发展与广泛应用，许多优秀的程序语言应运而生，MATLAB 就是其中代表。本书紧密结合 MATLAB 介绍杆系结构有限元分析方法。MATLAB 具有基本的数值运算、矩阵运算、符号运算、绘制图形、界面开发、与其他程序语言接口等多种功能。尤其是 MATLAB 的强大矩阵运算功能，使编程工作大大简化，程序长度大大缩短。它的符号运算功能给结构分析、公式推导带来了很大方便。它的图形功能使计算结果分析更为快捷有效。MATLAB 的这些优秀功能，使得编程方法发生了很大的改变，在一定程度上也改变了结构有限元分析方法。

在本书中始终涉及矩阵与向量及其元素等这些符号变量。在公式表示、运算和推导中，始终采用如下的约定：在大括号 $\{ \}$ 中加入字母符号（如 A 、 B 、 C 或 a 、 b 、 c 等）表示为向量，在中括号 $[\]$ 中加入字母符号表示为矩阵，在小括号 $(\)$ 中加入字母符号表示为矩阵或向量的元素。但在其他情况下也经常使用这些括号，并不表示这种意义，当然这些情况也是容易区分的。书中所提及的向量约定是指列向量，对于行向量将予以说明。

1.1 杆系结构的类型

杆系结构的杆件之间的连接点及结构与基础的支承点，通常根据结构受力及变形特性、分析精度要求等简化为各种理想的连接情况。连接点可是铰接、刚接、弹性或半刚性连接，支承点可以是固定铰支座、可动铰支座（或称辊轴支座）、嵌固支座等。杆系结构的荷载可以是集中力、集中力偶、分布力，也可以是分布力偶，其作用方位可以是平面的或空间的，根据杆系结构类型确定。杆系结构的杆件变形可以是伸长或缩短、弯曲、扭



转。在对实际结构分析时,通常根据结构特性、受力特点和变形特点,把复杂结构抽象简化为便于分析计算且满足工程精度的力学模型。杆系结构一般划分为 6 种基本类型,即:连续梁、平面桁架、平面刚架、板架(也称格栅)、空间桁架和空间刚架。图 1-1 示出了这 6 种基本结构类型。

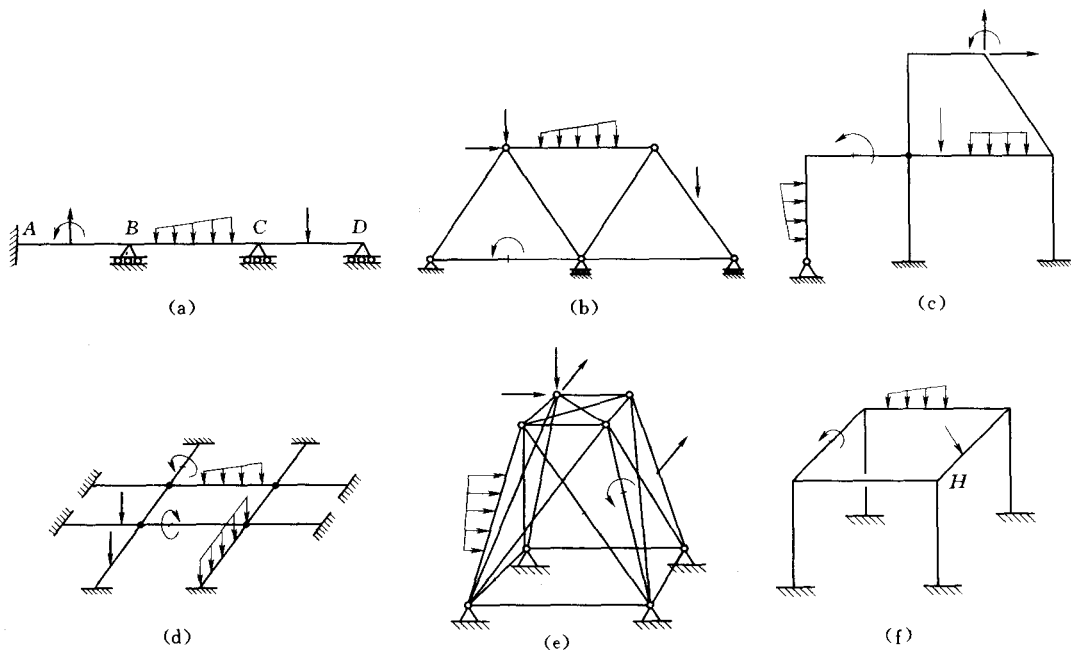


图 1-1 杆系结构的基本类型

(1) 连续梁。如图 1-1 (a) 所示,所有杆件的轴线均在同一直线上,有三个以上支承点。每个杆件至少有一个纵向对称面,这些对称面必须在同一平面内,作用在梁上的集中力荷载和分布力荷载须在该平面内,作用在梁上的集中力偶荷载的矢量方向须与该平面垂直,因此梁轴线的弯曲变形在此平面内发生。杆件之间的连接点假设为刚接。连续梁在其轴线方向上受到约束作用很弱以致所产生的轴力很小,所以梁的轴力不予考虑。连续梁杆端横截面上内力只是剪力和弯矩。因此,符合上述条件要求的结构就是理想化的连续梁,可按照连续梁分析方法求解。

(2) 平面桁架。如图 1-1 (b) 所示,所有杆件轴线都位于同一平面内,该平面称为结构平面。所有集中力荷载和分布力荷载均作用在该结构平面内,所有力偶荷载的矢量方向与该结构平面垂直。这样结构的变形或位移只能发生在该结构平面内。杆件之间的连接点假定为铰接。杆件横截面上的内力通常为轴力,若杆件上有横向的集中力或分布力荷载或集中力偶荷载时,则杆件杆端横截面上内力还包括剪力和弯矩。

(3) 平面刚架。如图 1-1 (c) 所示,所有杆件轴线都位于同一平面(称为结构平面)内,所有杆件至少有一个纵向对称面,这些对称面必须与结构平面重合。作用在刚架上的集中力荷载和分布力荷载位于结构平面内,作用在刚架上的力偶荷载的矢量方向与结构平面垂直。杆件之间的连接点为刚接。平面刚架杆件端部横截面上内力为弯矩、剪力和



轴力。

(4) 板架。如图 1-1 (d) 所示, 所有杆件轴线都位于同一平面 (称为结构平面) 内, 所有杆件至少要有有一个纵向对称面, 这些对称面要与结构平面垂直。板架上的所有集中力荷载和分布力荷载必须垂直于结构平面, 所有力偶荷载的矢量方向要在结构平面内。假定杆件横截面上的剪力中心与截面形心重合, 这样使杆件弯曲和扭转互不影响。杆件之间的连接点为刚接。板架杆端横截面上内力为弯矩、剪力和扭矩。

(5) 空间桁架。如图 1-1 (e) 所示, 杆件轴线在空间上可以为任何方位, 作用于空间桁架上的集中力荷载和分布力荷载可以是任意方位, 但作用于杆件上的力偶荷载, 其力偶矩矢量方向必须与杆件轴线垂直, 保证杆件不受扭矩作用。杆件之间的连接点假定为铰接。像平面桁架一样, 杆件横截面上的内力通常为轴力, 若杆件上有横向的集中力或分布力荷载, 或集中力偶荷载时, 则杆端横截面上内力还包括剪力和弯矩。

(6) 空间刚架。如图 1-1 (f) 所示, 空间刚架是杆系结构中最一般的结构, 它的杆件方位和荷载类型与方位均不受限制。假定空间刚架杆件弯曲与扭转互不影响。杆件之间的连接点为刚接。空间刚架杆端横截面上内力为轴力、剪力、弯矩和扭矩, 弯矩和剪力分解在横截面的两个主轴方向上。

1.2 杆件坐标系与结构坐标系

对结构进行分析时, 经常需要使用两套直角坐标系: 一是杆件坐标系; 二是结构坐标系。

如图 1-2 所示直角坐标系 $x_M-y_M-z_M$ 为杆件坐标系。坐标系的 x_M 轴与杆件形心轴重合, 其正方向由 j 指向 k ; y_M 轴与 z_M 轴与杆件横截面的两个主轴重合, 即 x_M-y_M 及 x_M-z_M 平面是杆件的两个弯曲主平面。假定杆件截面上的剪力中心与截面形心重合, 这样杆件受扭与受弯互不影响。杆件坐标系也称单元坐标系或局部坐标系, 在本书中如不加声明, 它们表示的是同一坐标系。

杆件坐标系可以度量杆端位移、杆端力、单元刚度系数和杆件上荷载等力学量和变位量。

如图 1-2 所示直角坐标系 $x-y-z$ 为结构坐标系。对于平面桁架、空间桁架、平面刚架、板架及空间刚架分析时, 除杆件坐标系外, 还需定义结构坐标系。结构坐标系是一个对结构整体定位的参考坐标系。对于连续梁可以只使用结构坐标系就够了, 因为定位杆件的坐标系与结构坐标系是重合的。确定连续梁杆端标号时, 要保证 k 端坐标大于 j 端坐标。对于连续梁也可使用两套坐标系, 杆件标号输入时就不受限制。结构坐标系有时也称总体坐标系或全局坐标系。

结构坐标系可以度量节点位移 (包括线位移和角位移)、节点力 (包括线力和力偶)、单元刚度系数、节点刚度系数等力学量和变位量。

杆件坐标系下度量的变量与结构坐标系下度量的变量可以通过坐标系旋转方法完成变换, 或者说它们之间的互相表示。

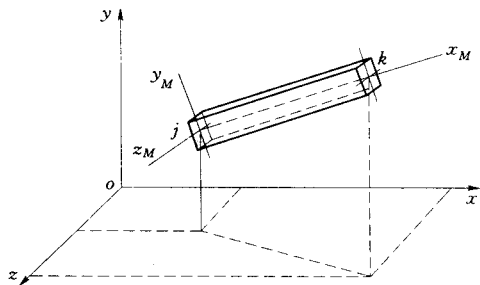


图 1-2 结构坐标系与杆件坐标系



1.3 坐标系的旋转

在一般情况下, 杆件坐标系与结构坐标系是斜交的。同一矢量(力或位移), 在杆件坐标系下可分解为一套分量, 而在结构坐标系下可分解为另一套分量, 这两套分量可互相表示, 在结构分析的公式推导时经常使用。根据两个坐标系的位置关系, 可建立一个所谓的转轴矩阵 $[R]$, 借助于 $[R]$ 来完成两套分量之间的互相变换。一根杆件对应着 2 个端点 j 与 k , 每个端点对应着 1 个杆端力(或杆端位移)矢量, 所以一根杆件对应着 2 个杆端力(或杆端位移)矢量。以杆端力为例, 若在两个坐标系下互相表示杆端力分量, 则需由转轴矩阵 $[R]$ 生成一个阶数为 $[R]$ 两倍的大变换矩阵, 用它来实现杆端力矢量在两套坐标系下的互相转换。这个大变换矩阵称为转轴变换矩阵, 用 $[R_T]$ 表示。

对一个矢量(或多个矢量构成的矢量组)在两套坐标系下的互相表示称为坐标系旋转法。坐标系旋转法可使复杂问题变得简单易处理, 是杆系结构分析中必不可少的数学处理手段。例如, 为了计算杆件坐标系下的杆端力, 需要把结构坐标系下的杆端位移转换为杆件坐标系下的杆端位移, 然后借助于单元刚度矩阵方程求出杆端力; 为了装配总节点刚度矩阵, 需要把杆件坐标系下的单元刚度矩阵变换为结构坐标系下的单元刚度矩阵, 然后才能累加装配到总节点刚度矩阵中; 为了构建等效节点荷载, 需要把杆件荷载产生的约束杆端力变换到结构坐标系下, 然后再累加到等效节点荷载中。

1.3.1 二维坐标系的旋转

二维坐标系旋转可用于平面桁架结构分析及其他方面。本节根据矢量的平面几何关系推导二维向量的坐标系旋转公式。

关于平面内作用力 A (A 为一个平面内矢量) 的变换。在图 1-3 中, x_S-y_S 为结构参考坐标系, x_M-y_M 为杆件坐标系, 它们的坐标原点重合。坐标系 x_M-y_M 与坐标系 x_S-y_S 之间的旋转角 γ , 由坐标系 x_S-y_S 逆时针旋转到坐标系 x_M-y_M 位置, 所构成的 γ 角定义为正的旋转角。

矢量 A 在 x_S-y_S 坐标系下的分量为 A_{xS} 、 A_{yS} , 在 x_M-y_M 坐标系下的分量为 A_{xM} 、 A_{yM} , 如图 1-3 所示。现在要完成的任务是, 把 A 的前一组分量看作自变量, A 的后一组分量看作函数, 用 A 的前一组分量来表示后一组分量。

设 c_{11} 、 c_{12} 为 x_M 轴与 x_S 及 y_S 轴之间夹角的方向余弦, 这两个方向余弦为

$$c_{11} = \cos\gamma, \quad c_{12} = \cos(90^\circ - \gamma) = \sin\gamma \quad (1-1)$$

设 c_{21} 、 c_{22} 为 y_M 轴与 x_S 及 y_S 轴之间夹角的方向余弦, 这两个方向余弦为

$$c_{21} = \cos(90^\circ + \gamma) = -\sin\gamma, \quad c_{22} = \cos\gamma \quad (1-2)$$

由式 (1-2) 看出, 二维坐标系旋转的方向余弦存在下面关系

$$c_{21} = -c_{12}, \quad c_{22} = c_{11} \quad (1-3)$$

方向余弦 c_{11} 、 c_{12} 、 c_{21} 和 c_{22} 下标规定意义

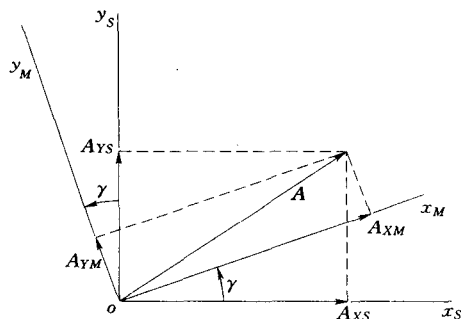


图 1-3 二维坐标系旋转



为：下标数字1是指 x_M 轴或 x_S 轴，下标数字2是指 y_M 轴或 y_S 轴；第一下标为坐标系 x_M — y_M 所属轴，第二下标为坐标系 x_S — y_S 所属轴。例如， c_{21} 表示杆件坐标系的 y_M 轴对结构坐标系的 x_S 轴的方向余弦。 c_{11} 、 c_{21} 、 c_{22} 的意义依次类推。

根据矢量投影定理，应有： A_{XM} 等于 A_{XS} 与 A_{YS} 在 x_M 轴上的投影之和， A_{YM} 等于 A_{XS} 与 A_{YS} 在 y_M 轴上的投影之和。借助于坐标轴之间夹角的方向余弦，则 A_{XM} 与 A_{YM} 表达为

$$\left. \begin{aligned} A_{XM} &= c_{11} A_{XS} + c_{12} A_{YS} \\ A_{YM} &= c_{21} A_{XS} + c_{22} A_{YS} \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

式 (1-4) 用矩阵表示为

$$\begin{Bmatrix} A_{XM} \\ A_{YM} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{XS} \\ A_{YS} \end{Bmatrix} \quad (1-5)$$

将式 (1-1)、式 (1-2) 代入式 (1-5)，则得

$$\begin{Bmatrix} A_{XM} \\ A_{YM} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{XS} \\ A_{YS} \end{Bmatrix} \quad (1-6)$$

式 (1-6) 可简写为

$$\{A_M\} = [R]\{A_S\} \quad (1-7)$$

$$[R] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \quad (1-8)$$

式中 $\{A_M\}$ ——作用力 A 的 x_M — y_M 坐标系下分量的向量表示；

$\{A_S\}$ ——作用力 A 的 x_S — y_S 坐标系下分量的向量表示；

$[R]$ ——转轴矩阵。

转轴矩阵的作用是把结构坐标系下的分量转换成杆件坐标系下的分量。

转轴矩阵 $[R]$ 是一个正交矩阵，证明如下：

设 $[R]^T$ 为转轴矩阵 $[R]$ 的转置矩阵，上标“ T ”表示对矩阵完成转置操作。以 $[R]^T$ 右乘 $[R]$ ，有

$$[R][R]^T = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} = [I]$$

由此得

$$[R]^T = [R]^{-1} \quad (1-9)$$

式 (1-4) ~ 式 (1-7) 是用作用力 A 的 x_S — y_S 坐标系下分量来表示 x_M — y_M 坐标系下分量。反过来，也可用作用力 A 的 x_M — y_M 坐标系下分量来表示它的 x_S — y_S 坐标系下分量，建立方法类同。但是，可借助转轴矩阵 $[R]$ 的正交特性 [式 (1-9)] 直接得到这种相反方向的表示。

对式 (1-7) 的两边左乘 $[R]^T$ ，有

$$[R]^T\{A_M\} = [R]^T[R]\{A_S\}$$

由上式得

$$\{A_S\} = [R]^T\{A_M\} \quad (1-10)$$

对于结构小位移情况，位移矢量 D 也可以像作用力 A 一样在两个坐标系之间实行互相表示。仿照式 (1-7)、式 (1-10)，位移矢量 D 的变换式如下



$$\{D_M\} = [R]\{D_S\} \quad (1-11)$$

$$\{D_S\} = [R]^T\{D_M\} \quad (1-12)$$

式中 $\{D_M\}$ ——由位移 D 的 x_M — y_M 坐标系下分量构成的向量；

$\{D_S\}$ ——由位移 D 的 x_S — y_S 坐标系下分量构成的向量。

1.3.2 三维坐标系的旋转

对于平面刚架、板架、空间桁架和空间刚架的结构分析，需要使用三维坐标系旋转。

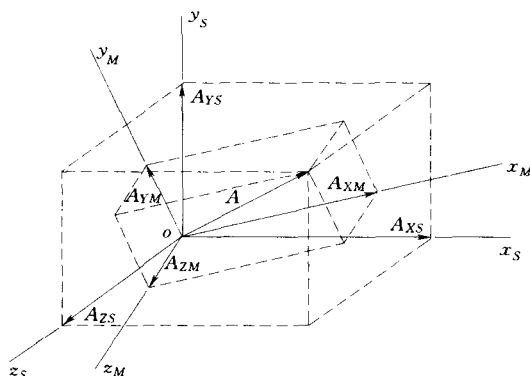


图 1-4 三维坐标系的旋转

关于三维空间作用力 A 的变换。如图 1-4 所示，结构坐标系 x_S — y_S — z_S 与杆件坐标系 x_M — y_M — z_M 在坐标原点重合，两组坐标系斜交。

对于二维坐标系旋转的方向余弦的下标的规定对于三维坐标系旋转同样有效。但由于三维坐标系增加了 z 轴，所以用数字 3 代表 z_M 轴或 z_S 轴。

令 x_M 轴对 x_S 、 y_S 与 z_S 轴的方向余弦分别为 c_{11} 、 c_{12} 和 c_{13} 。又令 y_M 轴对 x_S 、 y_S 与 z_S 轴的方向余弦分别为 c_{21} 、 c_{22} 和

c_{23} 。再令 z_M 轴对 x_S 、 y_S 与 z_S 轴的方向余弦分别为 c_{31} 、 c_{32} 和 c_{33} 。

如图 1-4 所示，作用力 A 在 x_S — y_S — z_S 坐标系下分解为 x_S 、 y_S 、 z_S 方向的三个正交分量 A_{XS} 、 A_{YS} 、 A_{ZS} ， A 也可在 x_M — y_M — z_M 坐标系下分解为 x_M 、 y_M 、 z_M 方向的三个正交分量 A_{XM} 、 A_{YM} 、 A_{ZM} 。

与二维情况相同，可以用前一组分量来表达后一组分量。由图 1-4 的几何关系可以看出： A_{XM} 等于 A_{XS} 、 A_{YS} 与 A_{ZS} 在 x_M 轴上的投影之和； A_{YM} 等于 A_{XS} 、 A_{YS} 与 A_{ZS} 在 y_M 轴上的投影之和； A_{ZM} 等于 A_{XS} 、 A_{YS} 与 A_{ZS} 在 z_M 轴上的投影之和。所以， A_{XM} 、 A_{YM} 与 A_{ZM} 的表达式为

$$\begin{aligned} A_{XM} &= c_{11}A_{XS} + c_{12}A_{YS} + c_{13}A_{ZS} \\ A_{YM} &= c_{21}A_{XS} + c_{22}A_{YS} + c_{23}A_{ZS} \\ A_{ZM} &= c_{31}A_{XS} + c_{32}A_{YS} + c_{33}A_{ZS} \end{aligned} \quad (1-13)$$

式 (1-13) 用矩阵表示为

$$\begin{Bmatrix} A_{XM} \\ A_{YM} \\ A_{ZM} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{XS} \\ A_{YS} \\ A_{ZS} \end{Bmatrix} \quad (1-14)$$

式 (1-14) 简写为

$$\{A_M\} = [R]\{A_S\} \quad (1-15)$$

式中 $\{A_M\}$ ——由作用力 A 的 x_M — y_M — z_M 坐标系下的分量构成的向量；

$\{A_S\}$ ——由作用力 A 的 x_S — y_S — z_S 坐标系下的分量构成的向量；

$[R]$ ——三维情况的转轴矩阵，它是把结构坐标系下的分量转换成杆件坐标系下的分量。

三维问题中的转轴矩阵表示为



$$[R] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad (1-16)$$

三维情况的转轴矩阵 $[R]$ 也是一个正交矩阵 (其证明只能在以后章节中验证), 即

$$[R]^{-1} = [R]^T \quad (1-17)$$

也可作用力 A 的 $x_M-y_M-z_M$ 下的一组分量来表示它的 $x_S-y_S-z_S$ 下的一组分量。

对式 (1-15) 左乘 $[R]^T$, 得

$$\{A_S\} = [R]^T \{A_M\} \quad (1-18)$$

式中 $[R]^T$ ——转轴矩阵 $[R]$ 的转置矩阵。

对于三维情况的位移 D 的变换, 可得如下变换式

$$\{D_M\} = [R]\{D_S\} \quad (1-19)$$

$$\{D_S\} = [R]^T \{D_M\} \quad (1-20)$$

式中 $\{D_M\}$ ——由位移 D 的 $x_M-y_M-z_M$ 坐标系下的分量构成的向量;

$\{D_S\}$ ——由位移 D 的 $x_S-y_S-z_S$ 坐标系下的分量构成的向量。

1.4 杆件坐标系下单元刚度矩阵方程

杆件是组成杆系结构的基本元素, 在对结构作有限元分析时, 常把它叫做单元。在本书中杆件和单元常视为同一概念。

杆系结构单元均取等截面直线杆段。如图 1-5 所示为一空间刚架的杆件 (或单元) i 。杆件一端与结构的节点 j 相连, 另一端与结构的节点 k 相连。当结构的节点 j 或 k 发生位移时, 与其相连的杆端也随之发生相同的位移。对于杆件而言, 该位移称之为杆件 i 的杆端位移。与节点位移一样, 杆端位移分量可以是沿着坐标轴方向的线位移或绕着坐标轴转动 (弯曲或扭转) 的角位移。用单箭头表示线位移, 双箭头表示角位移, 箭头所指方向为该位移的正方向。线位移的正方向设为与坐标轴的正方向一致, 角位移的正方向设为其转动矢量方向与坐标轴的正方向一致。

如图 1-5 所示, 空间刚架单元的 j 端有 3 个线位移和 3 个角位移, 它的 k 端也有 3 个线

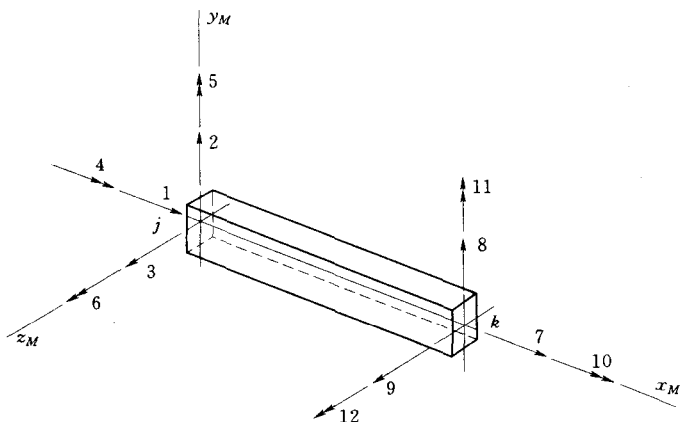


图 1-5 空间刚架杆端位移编号