研究生教学用书
教育部研究生工作办公室推荐

黎曼几何初步

(修订版)

An Introduction to Riemann Geometry

(Revised Edition)

白正国　沈一兵　水乃翔　郭孝英

高等教育出版社

内容提要

本书是一本黎曼几何的入门教材，内容包括：微分流形引论、张量分析、黎曼几何基础、测地线理论及子流形几何。本书对研究黎曼几何的三种表示法——不变形式法、活动标架法和自然坐标法——作了统一的处理，介绍了微分流形与黎曼几何中的各种基本概念和技巧，兼顾到经典理论和近代进展的内容，以使读者在学完本教程后能独立从事研究工作。修订版还增加了6个附录，以适应读者进一步的要求。

本书可作为综合性大学、师范院校数学系各专业高年级选修课教材及研究生教材，也可供数学和物理学工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

黎曼几何初步/白正国等. —北京：高等教育出版社，2004.12

ISBN 7-04-016129-X

Ⅰ.黎… Ⅱ.白… Ⅲ.黎曼几何-高等学校-教材 Ⅳ.O186.12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 116584 号

策划编辑 张小萍 **责任编辑** 郭 伟 **封面设计** 李卫青
责任绘图 吴文信 **版式设计** 王 莹 **责任校对** 金 辉
责任印制 宋克学

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京人卫印刷厂		
		版　　次	1992年4月第1版
开　　本	787×960 1/16		2004年12月第2版
印　　张	22.5	**印　　次**	2004年12月第1次印刷
字　　数	380 000	**定　　价**	33.20元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号：16129-00

修订版前言

本书第一版于1992年付印，出版后颇受读者欢迎和重视。现在，本书由教育部推荐为全国研究生教材，以修订版形式再次付印，十分为幸。

本版与第一版相比，除了改正第一版中的印刷错误和不妥之处外，还增加了六个附录，以适应读者的更进一步要求。其中，附录X是由盛为民博士撰写的。虽然书中的内容已作了认真的修改和订正，但限于笔者水平，不妥之处仍可能难免，敬请读者不吝指正。

借此机会，向被本书引用的文献作者、为本书作过贡献的朋友、对本书厚爱的读者、国家自然科学基金会、教育部和高等教育出版社，致以衷心感谢。

编　者

2003年12月

第一版前言

一般公认,黎曼几何是从德国数学家 B. Riemann 的有名就职演说《论作为几何学基础的假设》(1854 年)发端的。后经 E. B. Christoffel, L. Bianchi 及 C. G. Ricci 等人进一步完善和拓广,成为 A. Einstein 创立广义相对论(1915 年)的有力数学工具。此后黎曼几何得到了蓬勃发展,特别是 E. Cartan 建立的外微分形式和活动标架法,沟通了 Lie 群与黎曼几何的联系,为黎曼几何的深入发展开辟了广阔的前景,影响极为深远。近半个世纪来,黎曼几何的研究从局部发展到整体,产生了许多深刻的并在其他数学分支(如代数拓扑学,偏微分方程,多复变函数论等)及现代物理学中有重要作用的结果。时至今日,黎曼几何无论在基础理论上还是在实际应用上,都日益显示出它的重要性和巨大价值。

本书是以大学高年级学生及低年级研究生为对象而写的有关微分流形和黎曼几何的初步知识,曾作为讲义在杭州大学试讲多次,几经增删修改而成。内容共分五章:

第一章　准备知识;

第二章　微分流形;

第三章　联络与曲率;

第四章　测地线;

第五章　黎曼子流形;

另加四个附录,以便于阅读和充实内容。

对于已经熟悉多元微积分和多线性代数的读者,可以略去第一章。如果已掌握微分流形方面的内容,则也可以跳过第二章。由于这是一本入门的“初步”,不可能面面俱到;不少内容只得忍痛割爱,但尽可能注出参考文献。书中的习题,有较易的练习,也有较难的专题,目的是引导读者作进一步的研究。因此,本书习题可看作正文的有机补充,应尽可能浏览一下。

限于笔者水平,书中不妥之处在所难免,欢迎大家提出宝贵意见,以供将来作进一步修订之用。

最后,对高等教育出版社的大力支持谨致深切谢意。

编　者

1990 年 6 月

郑 重 声 明

目　　录

第一章　准备知识

§1　欧氏空间的映射

1.1　映射的微分　链规则

设 $\mathbf{R}^m$ 是 m 个有序实数组的全体，它的点用一个字母表示，记作 $x=(x^1,\cdots,x^m)$，其中 $x^i\in\mathbf{R}(i=1,\cdots,m)$ 称为点 x 的第 i 个坐标. 以

$$d(x,y)=\|x-y\|=\left[\sum_{i=1}^{m}(x^i-y^i)^2\right]^{1/2}\tag{1.1.1}$$

表示 $\mathbf{R}^m$ 中两点 x 与 y 之间的距离，这时 $\mathbf{R}^m$ 成为一个度量空间，称为**欧氏空间**，常用 E^m 表示之. 坐标全为零的一点 O 称为**原点**；于是 x 也可看作从原点出发的一个向量，它的长度 $\|x\|=\|x-0\|$. 以后在不引起混淆的地方，我们不再区分 $\mathbf{R}^m$ 和 E^m.

设 U 为 $\mathbf{R}^m$ 的开子集，F 是 U 到 $\mathbf{R}^n$ 的映射

$$F:U\to F(U)\subset\mathbf{R}^n,x\mapsto y=F(x),$$

其中 $x=(x^1,\cdots,x^m)$，$y=(y^1,\cdots,y^n)$.

用 $\pi^\alpha:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 表示到第 α 个坐标的投影，即

$$\pi^\alpha(y^1,\cdots,y^n)=y^\alpha\quad(\alpha=1,\cdots,n),\tag{1.1.2}$$

则映射 F 可表示成

$$y=F(x)=(f^1(x),\cdots,f^n(x)),x\in U,\tag{1.1.3}$$

其中 $f^\alpha=\pi^\alpha\circ F:U\to\mathbf{R}$ 是通常的 m 元函数，它称为映射 F 的第 α 个**分量函数**. 反过来，借助(1.1.3)式，任何 n 个定义在 U 上的 m 元函数 $f^1,\cdots,f^n$，确定了一个映射 $F:U\to\mathbf{R}^n$，$F(x)$ 的坐标函数为 $(f^1(x),\cdots,f^n(x))$.

例　设 $m=1$，U 为 $\mathbf{R}$ 中的开区间 (a,b)，映射 $F:U\to\mathbf{R}^n$，$t\mapsto F(t)=(f^1(t),\cdots,f^n(t))(t\in(a,b))$ 即为 $\mathbf{R}^n$ 中的曲线.

定义 1.1.1　如果 F 的每一个分量函数在点 $a\in U$(或在 U 上)是可微分的(C^k,C^∞,C^ω)，则称映射 F 在点 a(或在 U 上)是**可微分**的(C^k,C^∞,C^ω). 一个 C^∞ 映射亦称**光滑映射**.

如果 F 在 U 上可微分，则矩阵

$$\frac{\partial(f^1,\cdots,f^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f^1}{\partial x^1}, & \cdots, & \frac{\partial f^1}{\partial x^m}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1}, & \cdots, & \frac{\partial f^n}{\partial x^m}\end{pmatrix}$$

在 U 的每一点有定义,此矩阵的每一个元素均为 U 上的函数. 当 F 为 C^k 映射时,它们是 U 上的 C^{k-1} 函数. 上述矩阵称为映射 F 的 Jacobi **矩阵**,简记为 DF.

定理 1.1.1 设 U 是 $\mathbf{R}^m$ 的开子集,映射 $F:U\to\mathbf{R}^n$ 在点 $a\in U$ 为可微的充分必要条件是存在一个线性映射 $A:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^n$ 和 n 维向量函数 $R(x,a)=(r^1(x,a),\cdots,r^n(x,a))$,使得

$$F(x)=F(a)+A(x-a)+\|x-a\|R(x,a),\qquad(1.1.4)$$

且

$$\lim_{x\to a}\|R(x,a)\|=0.\qquad(1.1.5)$$

证明 利用分量函数将(1.1.4)式写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix}f^1(x)\\ \vdots\\ f^n(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f^1(a)\\ \vdots\\ f^n(a)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}A_{11} & \cdots & A_{1m}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{n1} & \cdots & A_{nm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^1-a^1\\ \vdots\\ x^m-a^m\end{pmatrix}+$$

$$\|x-a\|\begin{pmatrix}r^1(x,a)\\ \vdots\\ r^n(x,a)\end{pmatrix},$$

其中矩阵 $(A_{\alpha j})_{n\times m}$ 是 A 的表示. 再根据 m 元函数 $f^\alpha(x)$ $(\alpha=1,\cdots,n)$ 在 a 点可微分的充分必要条件为

$$f^\alpha(x)=f^\alpha(a)+\sum_{i=1}^m C_i^\alpha(x^i-a^i)+\|x-a\|r^\alpha(x,a),$$

其中 $C_1^\alpha,\cdots,C_m^\alpha$ 为常数,且

$$\lim_{x\to a}r^\alpha(x,a)=0.$$

因此,定理得证. ▌

由微积分可知,上式中

$$C_i^\alpha=\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}(a)\quad(i=1,\cdots,m),$$

于是矩阵$(A_{\alpha j})$的元素

$$A_{\alpha j}=\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial x^{j}}(a)\quad(\alpha=1,\cdots,n,j=1,\cdots,m)$$

即$(A_{\alpha j})$为 F 的 Jacobi 矩阵在 a 点计值,记为 $DF(a)$. 这时所对应的线性映射 $A:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^n$ 称为映射 F 在 a 点的**微分**,也用 $DF(a)$表示之. 这样,(1.1.4)式可以写成

$$F(x)=F(a)+DF(a)(x-a)+\|x-a\|R(x,a).\tag{1.1.4$'$}$$

设 U,V 分别为 $\mathbf{R}^m,\mathbf{R}^n$ 中的开子集,且有映射 $F:U\to V$ 和 $G:V\to\mathbf{R}^p$,则映射

$$H=G\circ F:U\to\mathbf{R}^p,x\mapsto G(F(x))$$

称为映射 F 和 G 的**复合**. 设 F 和 G 的分量函数分别为$f^1(x),\cdots,f^n(x)$和 $g^1(y),\cdots,g^p(y)$,则 H 的分量函数为

$$h^{\lambda}(x)=g^{\lambda}\circ F(x)=g^{\lambda}(f^1(x),\cdots,f^n(x)),\lambda=1,\cdots,p.\tag{1.1.6}$$

对于复合映射的可微性,有下述定理.

定理 1.1.2(链规则定理) 设映射 F,G 和 H 如上所述,若 F 在点 $a\in U$,G 在点 $F(a)\in V$ 都是可微分的,则 $H=G\circ F$ 在点 a 也是可微分的,且有

$$DH(a)=DG(F(a))\cdot DF(a).\tag{1.1.7}$$

若 F 在 U 上和 G 在 V 上分别可微分,则 H 在 U 上可微分,且(1.1.7)式对任意的 $a\in U$ 均成立.

证明 设 $y=F(x),x\in U$. 由于映射 F 在点 a,G 在点 $b=F(a)$分别是可微分的,因此有

$$\begin{aligned}H(x)-H(a)&=G(y)-G(b)\\&=DG(b)(y-b)+\|y-b\|R_G(y,b),\end{aligned}$$

$$y-b=F(x)-F(a)=DF(a)(x-a)+\|x-a\|R_F(x,a).$$

于是

$$\begin{aligned}H(x)-H(a)=&DG(b)\cdot DF(a)(x-a)+\\&\|x-a\|\Big\{DG(b)R_F(x,a)+\end{aligned}$$

$$\frac{\| F(x) - F(a) \|}{\| x - a \|} R_G(y,b) \Big\},$$

且因$\lim\limits_{x\to a} \| R_F(x,a) \| = 0$, $\lim\limits_{y\to b} \| R_G(y,b) \| = 0$, $\lim\limits_{x\to a} y = b$,故

$$\| DG(b) R_F(x,a) \| \leqslant \| DG(b) \| \cdot \| R_F(x,a) \| \xrightarrow[(x\to a)]{} 0,$$

这里 $\| DG(b) \|$ 表示矩阵 $DG(b)$ 的范数,它是 $DG(b)$ 中所有元素平方和的平方根. 由于

$$\frac{\| F(x) - F(a) \|}{\| x - a \|} \leqslant \| DF(a) \| + \| R_F(x,a) \|$$

$$\xrightarrow[(x\to a)]{} \| DF(a) \|,$$

从而由定理 1.1.1 即知,映射 $H: U \to \mathbf{R}^p$ 在点 a 是可微分的,且其在 a 的微分 $DH(a)$ 满足(1.1.7). ▌

推论 若 F 和 G 在 U 和 V 上分别都是 C^k 映射,则 $H = G \circ F$ 在 U 上亦是 C^k 映射.

证明 仅对 $k = 1$ 进行证明. 当 F 和 G 均为 C^1 映射时,F 和 G 的 Jacobi矩阵 DF 和 DG 的元素分别是 U 和 V 上的连续函数,因为两个矩阵的乘积矩阵元素为它俩元素的多项式,所以 DH 中的元素是 U 上的连续函数,即 H 的分量函数是 C^1 函数. 因此,映射 H 在 U 上是 C^1 映射. 对于一般的 k,可用归纳法证明①. ▌

下面给出 C^k 函数 $F: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ 的一个重要性质.

定理 1.1.3 设 $C \subset \mathbf{R}^m$ 是闭集,$K \subset \mathbf{R}^m$ 是紧致集,且 $C \cap K = \varnothing$,则存在一个 C^∞ 函数 $\sigma: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$,其值域为$[0,1]$,且在 K 上 $\sigma(x) \equiv 1$,在 C 上 $\sigma(x) \equiv 0$.

证明 分两步进行.

1° 以 $B_\varepsilon(a)$ 表示 $\mathbf{R}^m$ 中以 a 为中心,ε 为半径的开球. 先证明存在一个 C^∞ 函数 $g: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$,它在 $\overline{B}_{\varepsilon/2}(a)$ 上恒等于 1,在 $B_\varepsilon(a)$ 上是正的,而在 $B_\varepsilon(a)$ 的外部恒等于零. 由直接计算可知

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0, \\ e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0 \end{cases}$$

是 C^∞ 函数. 再作 $\tilde{g}: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ 如下:

---

① 参阅[6].

$$\tilde{g}(x) = \frac{h(\varepsilon^2 - \|x\|^2)}{h(\varepsilon^2 - \|x\|^2) + h\left(\|x\|^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)},$$

因为 $h(t)$ 是 C^∞ 的,且上式中分母恒不为零,因此 $\tilde{g}(x)$ 也是 C^∞ 的,且容易看出,它在 $\overline{B}_{\varepsilon/2}(0)$ 上恒等于 1,在 $B_\varepsilon(0)$ 上是正的,而在 $B_\varepsilon(0)$ 的外部恒等于零. 于是 C^∞ 函数

$$g(x) = \tilde{g}(x-a)$$

即为所需求的函数.

2° 因为开集 $\mathbf{R}^m - C \supset K$,且 K 是紧致的,故可以选取 $\mathbf{R}^m - C$ 内有限个开球 $B_{\varepsilon_i}(a_i), i=1,\cdots,s$,使得

$$\mathbf{R}^m - C \supset \bigcup_{i=1}^{s} B_{\varepsilon_i}(a_i) \supset \bigcup_{i=1}^{s} B_{\varepsilon_i/2}(a_i) \supset K$$

对于每一个 $B_{\varepsilon_i}(a_i)$ 作出如 1°中所述的 C^∞ 函数 $g_i(x)$,定义

$$\sigma(x) = 1 - \prod_{i=1}^{s}(1 - g_i(x)).$$

显然,$\sigma(x)$ 是 C^∞ 函数,且 $0 \leqslant \sigma(x) \leqslant 1$. 对于每一个 $x \in K$,至少有一个 $g_i = 1$,故 $\sigma(x) = 1$,而在 $\bigcup_{i=1}^{s} B_{\varepsilon_i}(a_i)$ 外,所有的 $g_i = 0$,故 $\sigma(x) = 0$. 特别,在 $C \subset \mathbf{R}^m - \bigcup_{i=1}^{s} B_{\varepsilon_i}(a_i)$ 上 $\sigma(x) \equiv 0$. ▌

推论 设 $f(x)$ 是开集 $U(\subset \mathbf{R}^m)$ 上的 C^k 函数,$a \in U$. 则存在 a 的一个邻域 $W \subset U$ 及 $\mathbf{R}^m$ 上的一个 C^k 函数 $f^*: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$,使得在 W 上 $f^*(x) = f(x)$,在 U 外 $f^*(x) \equiv 0$.

证明 选取 a 的两个邻域 V_1 和 V_2,使得 $\overline{V}_1 \subset V_2 \subset \overline{V}_2 \subset U$,且使 $\overline{V}_1$ 是紧致的. 令 $K = \overline{V}_1, C = \mathbf{R}^m - V_2$,则它们满足上述定理的条件,故存在 $\mathbf{R}^m$ 上的 C^∞ 函数 $\sigma(x)$,它在 $\overline{V}_1$ 上的值为 1,在 C 上(即 V_2 外)的值为零. 定义函数 $f^*: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ 如下:

$$f^*(x) = \begin{cases} \sigma(x) f(x), & x \in U, \\ 0, & x \in \mathbf{R}^m - \overline{V}_2, \end{cases}$$

因为 $(\mathbf{R}^m - \overline{V}_2) \cap U = U - \overline{V}_2$,而 $\sigma(x)$ 在 $U - \overline{V}_2$ 上为零,所以 $f^*(x)$ 是完全确定的. 又因为 $f^*(x)$ 在开集 U 上是 C^k 的,在开集 $\mathbf{R}^m - \overline{V}_2$ 上是 C^∞ 的,所以 $f^*(x)$ 为 $\mathbf{R}^m$ 上的 C^k 函数. 显然,V_1 即可取为推论中的 W. ▌

1.2　反函数定理

设 A,B 为两个集合，$F:A\to B$ 为一映射．如果它是 A 到整个 B 上的映射，即 $f(A)=B$，则称 f 为**满射**．如果 f 是一对一的，即对于任意的 $x_1,x_2\in A$，$x_1\neq x_2$ 均有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 为**单射**．如果 f 既是满射又是单射，则称 f 为**双射**．设 $F:A\to B$ 是双射，则存在逆映射 $f^{-1}:B\to A$．如果 f 和 f^{-1} 都是连续的，则称 f 为**同胚**．

定义 1.1.2　设 U 和 V 都是 $\mathbf{R}^m$ 中的开集．如果映射 $F:U\to V$ 满足下述条件：

(i) F 为同胚；

(ii) F 和 F^{-1} 都为 $C^k(k\geqslant 1)$ 的，

则称 F 为 C^k - **微分同胚**；称 U 和 V 是 C^k - **微分同胚**的．特别，当 $k=\infty$ 时，简称为**微分同胚**．

例 1　设 $F:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^m$ 是 $a=(a^1,\cdots,a^m)$ 到 $b=(b^1,\cdots,b^m)$ 的平移．F 可表示为

$$F(x^1,\cdots,x^m)=(x^1+(b^1-a^1),\cdots,x^m+(b^m-a^m)),$$

即 $F(x)=x+(b-a)$．它的分量函数 $f^i(x)=x^i+(b^i-a^i)(i=1,\cdots,m)$ 都是解析的．因而 F 是 C^ω 的，F 的逆 $F^{-1}(x)=x+(a-b)$ 同样是 C^ω 的．又因为 F 是同胚，所以 F 是微分同胚．

例 2　设 $F:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^m$ 是齐次线性变换

$$F(x)=A\cdot x,x\in\mathbf{R}^m,\tag{1.1.8}$$

即

$$F(x^1,\cdots,x^m)=\left(\sum_{j=1}^m a_j^1x^j,\cdots,\sum_{j=1}^m a_j^mx^j\right),$$

由直接计算可知 $DF(x)=A$，A 为矩阵 $(a_j^i)_{m\times m}$．

若 $\det A\neq 0$，则 A 有逆矩阵，此时逆映射 F^{-1} 也为齐次线性变换，$F^{-1}(x)=A^{-1}\cdot x$．显然，此时 F 为同胚，且 F 和 F^{-1} 都是 C^∞ 的，从而 F 为微分同胚．若 $\det A=0$，则 F 不是单射，它至少把过原点的一条直线映射为原点．因此得到结论：齐次线性变换(1.1.8)为微分同胚的充分必要条件为 $DF(x)=A$ 是非奇异的．

微分同胚是 $\mathbf{R}^m$ 中开子集的一个等价关系，即具有对称性、反身性和传递性，前两个性质已包含在定义 1.1.2 中，而传递性可叙述如下：

引理 1　设 U,V,W 是 $\mathbf{R}^m$ 的开子集．$F:U\to V$，$G:V\to W$ 都是满射，$H=G\circ F:U\to W$ 是 F 和 G 的复合，若 F,G,H 中有两个是微分同胚，则第

三个也是微分同胚.

证明留给读者作练习.

下面叙述并证明欧氏空间映射的一个基本定理.

定理 1.1.4(反函数定理) 设 U 是 $\mathbf{R}^m$ 的开集,$F:U\to\mathbf{R}^m$ 是 $C^k(k\geqslant 1)$映射. 若 $a\in U$,且 $DF(a)$是非奇异的,则存在 a 的一个开邻域 $W\subset U$,使得 $F:W\to F(W)=V$ 为 C^k 微分同胚;且若 $x\in W,y=F(x)$,则 F^{-1} 在 y 的微分为

$$DF^{-1}(y)=(DF(x))^{-1},\tag{1.1.9}$$

其中$(DF(x))^{-1}$表示 $DF(x)$的逆.

为证明定理,我们给出下述引理.

引理 2(收缩映射定理) 设 M 是度量为 $d(x,y)$的完备度量空间. $T:M\to M$是 M 到自身的映射,若存在一个常数 λ,$0\leqslant\lambda<1$,使得对于任意 $x,y\in M$,有

$$d(T(x),T(y))\leqslant\lambda d(x,y),$$

则 T 在 M 中有一个唯一不动点 a.

证明 重复应用映射 T,得 $d(T^n(x),T^n(y))\leqslant\lambda^n d(x,y)$. 特别,若任取一个点 $x_0\in M$,并令 $x_n=T^n(x_0)$,则 $x_{n+m}=T^{n+m}(x_0)=T^n(T^m(x_0))$. 于是有 $d(x_n,x_{n+m})\leqslant\lambda^n d(x_0,T^m(x_0))$. 根据三角不等式,

$$\begin{aligned}d(x_0,T^m(x_0))&\leqslant d(x_0,T(x_0))+d(T(x_0),T^2(x_0))+\cdots+\\&\quad d(T^{m-1}(x_0),T^m(x_0))\\&\leqslant(1+\lambda+\cdots+\lambda^{m-1})d(x_0,T(x_0))\\&\leqslant\frac{1}{1-\lambda}d(x_0,T(x_0)).\end{aligned}$$

故

$$d(x_n,x_{n+m})\leqslant\lambda^n K,$$

其中

$$K=\frac{1}{1-\lambda}d(x_0,T(x_0))$$

是一个与 m,n 无关的非负常数. 由于 $0\leqslant\lambda<1$,因此$\{x_n\}$是 Cauchy 点列. 记

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=a.$$

而

$$d(T(a),a)=\lim_{n\to\infty}d(T(x_n),x_n)=\lim_{n\to\infty}d(x_{n+1},x_n)=0.$$

所以 $T(a)=a$,即 a 是映射 T 的不动点.若有两个不同的不动点 a,b,则 $d(a,b)=d(T(a),T(b))\leqslant\lambda d(a,b)$.这与 $\lambda<1$ 的假设矛盾.因此 T 在 M 中只有唯一的一个不动点 a. ▮

定理 1.1.4 的证明 我们将证明分成若干步.

1° 由引理 1,结合例 1 和例 2,不失一般性,可以假定 $F(0)=0$, $DF(0)=I$,这里 I 为 $m\times m$ 单位矩阵.然后,定义映射 $G:U\to\mathbf{R}^m$ 如下:

$$G(x)=x-F(x), \tag{1.1.10}$$

显然有

$$G(0)=0, DG(0)=0, \qquad (1.1.10)'$$

上式中最后一个 0 表示 $m\times m$ 零矩阵.

2° 存在一个实数 $r>0$,使得 DF 在闭球 $\overline{B}_{2r}(0)\subset U$ 上是非奇异的,且对于任意的 $x_1,x_2\in\overline{B}_r(0)$,有

$$\|G(x_1)-G(x_2)\|\leqslant\frac{1}{2}\|x_1-x_2\| \tag{1.1.11}$$

和

$$\|x_1-x_2\|\leqslant 2\|F(x_1)-F(x_2)\|. \tag{1.1.12}$$

事实上,因为 F 和 G 都是 $C^k(k\geqslant 1)$ 映射,故 $DF(x)$,$DG(x)$ 的所有元素都是 x 的连续函数.因为 $DF(0)=I$,$DG(0)=0$,因此可适当选取 r,使得在 $\overline{B}_{2r}(0)\subset U$ 上 $\det(DF(x))$ 恒不等于零,且在 $\overline{B}_r(0)$ 上 $DG(x)$ 的所有元素的绝对值不大于 $1/2m$.于是,对于任意的 $x_1,x_2\in\overline{B}_r(0)$,$G$ 的分量函数 $g^i(x)$ 有

$$\begin{aligned}|g^i(x_1)-g^i(x_2)| &= \left|\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial g^i}{\partial x^j}(x_2+\theta(x_1-x_2))(x_1^j-x_2^j)\right|\\ &\leqslant\frac{\sqrt{m}}{2m}\|x_1-x_2\|,\quad 0<\theta<1.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\|G(x_1)-G(x_2)\| &= \left[\sum_{i=1}^{m}(g^i(x_1)-g^i(x_2))^2\right]^{1/2}\\ &\leqslant\frac{1}{2}\|x_1-x_2\|,\end{aligned}$$

此即(1.1.11).由(1.1.10)′,上式又可写为

$$\frac{1}{2}\|x_1-x_2\|\geqslant\|x_1-F(x_1)-x_2+F(x_2)\|$$