高职高专“十一五”规划教材

● 公共基础课系列

应用数学

（经管类）上册

总主编　庞进生　韩可众

本册主编　庞进生　潘晓伟

数学是研究数量关系与空间形式的一门科学。学习数学有助于提高学生分析问题和解决问题的能力、抽象思维的能力、空间图形想象的能力。本书根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，突出“以学生发展为本”的教育思想，以“必需、够用、好用、实用”为原则，讲解了函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微分学等内容。

大象出版社

高职高专"十一五"规划教材·公共基础课系列

应·用·数·学

（经管类）

上册

总 主 编　庞进生　韩可众
本册主编　庞进生　潘晓伟

大象出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用数学. 上册:经管类/庞进生,韩可众主编;庞进生,潘晓伟分册主编. —郑州:大象出版社,2006. 9
高职高专“十一五”规划教材. 公共基础课系列
ISBN 7-5347-4288-9

Ⅰ. 应… Ⅱ. ①庞… ②韩… ③庞… ④潘…
Ⅲ. 应用数学-高等学校:技术学校-教材
Ⅳ. 029

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 105908 号

本书编委会名单

总 主 编　庞进生　韩可众
本册主编　庞进生　潘晓伟
副 主 编　刘洪运　张承恩
编　　委　朱福梅　许艳芳　刘翠桃
　　　　　刘美娥　庞进丽

策划组稿　王茂森
责任编辑　王小军(特约)
责任校对　崔　新　王　艳
封面设计　杜晓燕
出　　版　大象出版社(郑州市经七路 25 号　邮政编码 450002)
网　　址　www. daxiang. cn
发　　行　全国新华书店
印　　刷　河南省瑞光印务股份有限公司
版　　次　2006 年 9 月第 1 版　　2006 年 9 月第 1 次印刷
开　　本　787×1092　1/16
印　　张　14. 25
字　　数　329 千字
印　　数　1—4 200 册
定　　价　19. 20 元

若发现印、装质量问题,影响阅读,请与承印厂联系调换。
印厂地址　郑州市二环支路 35 号
邮政编码　450012　　　　电话　(0371)63955319

前　言

本套教材是根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》,组织了河南省内十多所高职院校负责教学工作的领导和多年从事一线教学的教师,经过深入研讨,结合省内高职院校专业、学生以及教育教学的特点而编写的。

在贯彻"必须、够用"的指导思想下,本书重视基本概念、基本运算技能的训练,内容由浅入深、循序渐进,结构严谨、通俗易懂,既保持了数学学科理论体系的完整,同时又注重数学在经济管理中的应用,重视培养学生运用数学分析方法解决实际问题的能力,而不拘泥于理论推导和烦琐的运算。

本书针对管理类学生的特点,对概念、定理等采用了学生容易理解的方式叙述,便于高职高专的教学和学生自学。本书在各章节内容编写过程中,首先编排了本章"学习目标",使学生开始就有较明确的方向;其次在章末编写了"本章小结",便于学生系统了解本章内。各章选配了适量的习题以便学生练习之用,并于书后附有习题参考答案。

本套教材分上、下两册,内容包括微积分、线性代数和概率论与数理统计等三篇。本书为上册,讲述第一篇微积分的内容,包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分和多元函数微分学等七章。

本书可作为高职高专的学生用书,同时也可作为成人高校、本科院校举办的二级职业技术学院和民办高校经管类专业的教材及经济管理人员的自学参考书。

本书由庞进生、潘晓伟任主编,刘洪运、张承恩任副主编,参与编写的有朱福梅、许艳芳、刘翠桃、李美娥、庞进丽。庞进生、刘洪运定稿。

本书的出版得到商丘职业技术学院、许昌职业技术学院、鹤壁职业技术学院、郑州职业技术学院、郑州航院信息统计职业技术学院的大力支持,在此深表感谢。

由于作者水平所限,书中不妥之处,敬请读者批评指正。

编者

2006.8

目 录

第1章 函 数

学习目标

1.掌握函数的概念及特性,掌握基本初等函数.

2.理解分段函数、反函数以及复合函数的概念,会对复合函数进行分解.

3.会建立经济分析中常见的需求、供给、成本、收入和利润等实际问题的函数关系.

1.1 函数的概念

1.1.1 常量与变量

在日常生活、生产活动和经济活动中,经常遇到各种不同的量.例如:身高、气温、产量、收入、成本等.这些量可以分为两类,一些量在考察的过程中不发生变化,只取一个固定值,我们把它称为**常量**,例如,圆周率 π 是个不变的量,某种商品的价格,某个班的学生人数在某一段时间内保持不变,这些量都是常量;另一些量在考察的过程中是变化的,可以取不同的数值,我们把它称作**变量**,例如,一天中的气温,生产过程中的产量都是不断变化的,它们都是变量.

在理解常量与变量时,应注意下面几点:

(1)常量和变量依赖于所研究的过程.同一个量,在某个过程中可以认为是常量,而在另一个过程中则可能是变量;反过来也是同样的.例如,某种商品的价格在一段时间内是常量,但在较长的时间内则是变量.

(2)从几何意义上讲,常量对应着实数轴上的定点,变量则对应着实数轴上的动点.

(3)变量所能取的数值的集合叫做这个变量的**变动区域**.

有一些变量,例如,时间可以取介于两个实数之间的任何实数值,叫做**连续变量**,连续变量的变动区域常用区间表示.

常量习惯用字母 a,b,c,d 等表示;变量习惯用字母 x,y,z,u,v,w 等表示.

1.1.2 函数的定义

在某个变化过程中,往往出现多个变量,这些变量彼此不是孤立的,而是相互影响和相互制约的,一个量或一些量的变化会引起另一个量的变化,如果这些影响是确定的,是依照某一规则的,那么我们说这些变量之间存在着函数关系.

例如,某工厂每天生产产品的件数为 x,机械设备等固定成本为 5700 元,生产每一件产品所花费的人工费和原材料费用等单位产品变动成本为 48 元,那么每天日产量 x 与每天的生产总成本 y 可用下面的式子给出:

$$y = 48x + 5700,$$

当产量 x 取一个值时,成本 y 有确定的值和它对应,我们说成本 y 是产量 x 的函数.

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量,若当变量 x 在非空数集 D 内任取一数值时,变量 y 依照某一规则 f 总有一个确定的数值与之对应,则称变量 y 为变量 x 的**函数**,记作

$$y = f(x).$$

这里,x 称为**自变量**,y 称为**因变量**或**函数**,f 称为函数符号,它表示 x 与 y 之间的对应关系,有时函数符号也可用其他字母来表示,例如,$y = g(x)$ 或 $y = \varphi(x)$ 等. 集合 D 称为函数的**定义域**,相应的 y 值的集合则称为函数的**值域**.

当自变量 x 在其定义域内取某确定值 x_0 时,因变量 y 按照所给定函数关系 $y = f(x)$ 求出的对应值 y_0 叫做当 $x = x_0$ 时的函数值,记作

$$y_0 = y|_{x = x_0} \text{或} f(x_0).$$

函数的定义域和函数的对应关系称为函数的两个要素. 两个函数只有当它们的定义域和对应关系完全相同时,这两个函数才认为是相同的. 例如,函数 $y = x$ 和 $y = \sqrt{x^2}$. 它们的定义域虽然都是实数集 $\mathbf{R}$,但是因为

$$y = \sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

显然,只有在 $x \geqslant 0$ 时它们的对应关系才相同,所以这两个函数在实数集 $\mathbf{R}$ 上是不同的.

又如,函数 $y = x$ 与 $y = (\sqrt{x})^2$,它们的定义域不同,其中 $y = x$ 的定义域是实数集 $\mathbf{R}$,而 $y = (\sqrt{x})^2$ 的定义域是非负实数集 $\{x | x \geqslant 0\}$,所以这两个函数是不相同的.

又如,函数 $y = x$ 与 $y = \sqrt[3]{x^3}$,它们的对应关系和定义域都分别相同,所以它们是相同的函数.

例 1 已知 $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$,求 $f(0), f(1), f(-1), f\left(\frac{1}{a}\right), f(-x)$.

解 $f(0) = \sqrt{4 - 0^2} = 2, f(1) = \sqrt{4 - 1^2} = \sqrt{3}, f(-1) = \sqrt{4 - (-1)^2} = \sqrt{3},$

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = \sqrt{4 - \left(\frac{1}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{4a^2 - 1}}{|a|}, f(-x) = \sqrt{4 - (-x)^2} = \sqrt{4 - x^2}.$$

例 2 求下列函数的定义域:

(1) $f(x) = \dfrac{5}{3x^2 + x}$;　　(2) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$;

(3) $f(x) = \ln(3 - 4x)$;　　(4) $f(x) = \arccos(2x - 1)$;

(5) $f(x) = \ln(3 - 4x) - \arccos(2x - 1)$.

解 (1) 在分式 $\dfrac{5}{3x^2 + x}$ 中,分母不能为零,所以 $3x^2 + x \neq 0$,解得 $x \neq -\dfrac{1}{3}$,且 $x \neq 0$,即定

义域为$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{3},0\right)\cup(0,+\infty)$.

(2) 在偶次根式中,被开方式必须大于等于零,所以有 $9-x^2\geqslant 0$,解得 $-3\leqslant x\leqslant 3$,即定义域为$[-3,3]$.

(3) 在对数式中,真数必须大于零,所以有 $3-4x>0$,解得 $x<\frac{3}{4}$,即定义域为$\left(-\infty,\frac{3}{4}\right)$.

(4) 反余弦中的式子的绝对值必须小于等于1,所以有 $-1\leqslant 2x-1\leqslant 1$,解得 $0\leqslant x\leqslant 1$,即定义域为$[0,1]$.

(5) 该函数为(3)、(4)两例中函数的代数和,此时函数的定义域为(3)、(4)两例中定义域的交集,即$\left(-\infty,\frac{3}{4}\right)\cap[0,1]=\left[0,\frac{3}{4}\right)$.

应当指出,在实际应用问题中,除了要根据解析式本身来确定自变量的取值范围以外,还要考虑到变量的实际意义,一般来说,与经济活动有关的变量往往取正值,即变量都是大于零的.

1.1.3 函数的表示法

给出一个函数,就是建立了两个变量之间的一种对应关系.表示这种对应关系的方法有解析法(又称公式法)、表格法和图像法.

对自变量和常数通过加、减、乘、除四则运算,作乘幂、对数、指数、三角函数、反三角函数等数学运算所得到的式子称为**解析表达式**,用解析表达式表示一个函数的方法称为**解析法**(也称**公式法**).例如 $y=x^2$,$y=\sqrt{1-x^2}$,$y=\sin x$ 等都是用解析法表示的函数.这种表示方法便于进行各种运算和理论研究,但是不直观,而且某些复杂的问题和社会经济现象很难用一个简单的解析式来表达.

把一系列自变量的值与其对应的因变量的值列成表格,给出函数的对应关系,就称为**表格法**.

例如,某商店一年中各月份毛线的销售量的关系如表1.1所示:

表1.1

月份 x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
销售量 $y/10^2$kg	81	84	54	64	12	31	78	96	132	121	112	45

表1.1表示一年中各月份与销售量之间的函数关系,这种表示法就是表格法.这种方法容易找到自变量与函数的对应值,但是有局限性,通常不可能把自变量的全部值都给出来,有时表达函数关系也不够清楚.

图像法是用坐标系中某一条曲线来表示两个变量之间的对应关系的方法.这种方法比较直观地表示了函数的变化规律和性质,但是从图形上查函数值时,不够准确.

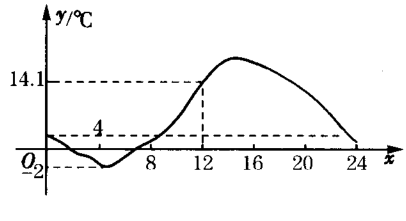

图1.1

图 1.1 是气象站用自动温度仪记录的某地一昼夜气温变化曲线.

这是用图形表示的函数,由曲线给出气温 y 与时间 x 之间的函数关系. 当 x 取 0 到 24 之间的任意一个数时,在曲线上都能找到确定的 y 值与它对应. 例如 $x=12$ 时,$y=14.1$℃.

这三种函数表示法相互之间是有联系的. 例如,有了函数表达式,就可以列出表格,然后再以自变量为横轴、因变量为纵轴建立直角坐标系,按照表中的数据就可以画出函数图像.

1.1.4 函数图像的描绘

函数 $y=f(x)\ (x\in D)$ 的图像是以自变量 x 的取值为横坐标,对应函数值 $f(x)$ 为纵坐标的平面点集

$$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}.$$

描绘函数 $y=f(x)$ 图像的基本方法是描点法. 其主要步骤为:

(1) 确定函数的定义域;

(2) 适当选取自变量 x 的若干值,计算它们对应的函数值 $y=f(x)$,列表;

(3) 以表中 x 的值为横坐标,对应的 y 值为纵坐标描出相应的点;

(4) 判断是否需要连结各点,如果需要,则将描出的点依次连结成光滑的曲线.

函数的图像不一定是一条直线或曲线,也可以是一些孤立的点、线段或曲线的一部分.

1.1.5 分段函数

某旅游风景区的门票有两种,散客票和团体票. 散客票票价为每人 20 元;团体票的收费标准为:团体人数不超过 15 人,按散客对待;超过 15 人时,票价为每人 15 元. 则购票人数 x 与门票收费 y 之间的函数关系可用下面的形式给出:

$$y=\begin{cases}20x, & 0<x\leqslant 15,\\ 15x, & x>15,\end{cases}\quad (x\in\mathbf{N}^*).$$

像这样把定义域分成若干个区间,在不同的区间上函数关系用不同的式子分段表达的函数称为**分段函数**.

分段函数是定义域上的一个函数,不要理解为多个函数,分段函数需要分段求值,分段作出图像. 分段函数是微积分中常见的一种函数. 例如在中学数学课本出现过的绝对值函数可以表示成

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

例 3 设函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & -1<x\leqslant 0,\\ x^2, & 0<x\leqslant 1,\\ 3-x, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

求 $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f(1)$, $f\left(\frac{3}{2}\right)$ 及函数的定义域,并作出函数的图像.

解 因为 $-\frac{1}{2}\in(-1,0]$,所以 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$.

因为 $1\in(0,1]$，所以 $f(1)=1^2=1$.

因为 $\frac{3}{2}\in(1,2]$，所以 $f\left(\frac{3}{2}\right)=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$.

函数的定义域为 $(-1,0]\cup(0,1]\cup(1,2]=(-1,2]$.

该分段函数的图像如图 1.2 所示.

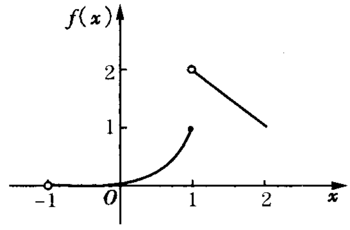

图 1.2

例 4 用分段函数表示 $y=3-|2-x|$，并画出图形.

解 根据绝对值定义可知，当 $x\leqslant 2$ 时，$|2-x|=2-x$；当 $x>2$ 时，$|2-x|=x-2$，于是有

$$y=\begin{cases}3-(2-x), & x\leqslant 2,\\ 3-(x-2), & x>2.\end{cases}$$

即
$$y=\begin{cases}1+x, & x\leqslant 2,\\ 5-x, & x>2.\end{cases}$$

其图像如图 1.3 所示.

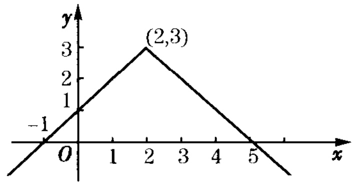

图 1.3

1.2 函数的性质

1.2.1 函数的单调性

图 1.4 反映了某地一日气温 T(℃)随时间 t(h)变化的情况，从图中发现：

(1) 凌晨 4 时，气温最低，最低气温达零下 2℃，下午 4 时，气温达到这一天的最高气温 12℃.

(2) 上午 8 时的气温为 4℃，上午 10 时与晚上 10 时气温都为 8℃.

(3) 随着时间的增加，在时间段 0 时到 4 时内，气温不断地下降；4 时到 16 时内，气温不断地上升；16 时到 24 时内，气温不断地下降.

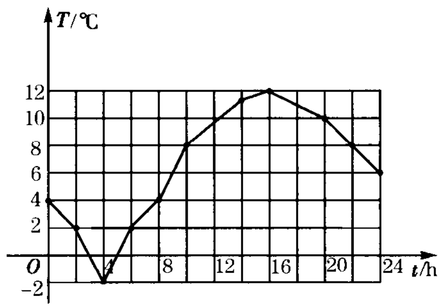

图 1.4

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 有意义，对任意的 $x_1,x_2\in(a,b)$，

(1) 如果当 $x_1<x_2$ 时，有

$$f(x_1)<f(x_2)\,[\text{或 } f(x_1)\leqslant f(x_2)]$$

成立，那么，函数 $f(x)$ 叫做**区间** (a,b) 内的**增函数**(或不减函数)，区间 (a,b) 叫做函数 $f(x)$ 的**增区间**(或不减区间)，如图 1.5 所示.

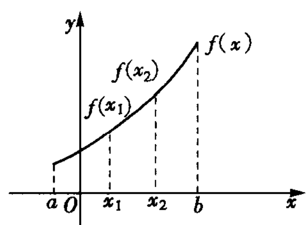

图 1.5

(2) 如果当 $x_1<x_2$ 时，有

$$f(x_1)>f(x_2)\,[\text{或 } f(x_1)\geqslant f(x_2)]$$

成立，那么，函数 $f(x)$ 叫做**区间** (a,b) 内的**减函数**(或不增函数)，区间 (a,b) 叫做函数 $f(x)$ 的**减区间**(或不增区间)，如图

1.6 所示.

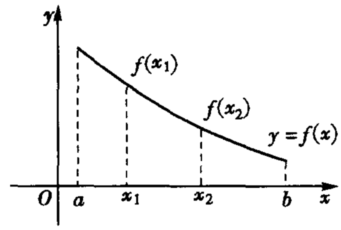

图 1.6

如果函数$f(x)$在区间(a,b)内是增函数或减函数(不减函数或不增函数),那么,就称函数$f(x)$在区间(a,b)内具有**单调性**,区间(a,b)叫做函数$f(x)$的**单调区间**.

注:在区间(a,b)内,增函数的图像从左到右是上升的;减函数的图像从左到右是下降的.

例 1 验证函数$y=3x-2$在区间$(-\infty,+\infty)$内是增函数.

证 在区间$(-\infty,+\infty)$内任取两点$x_1<x_2$,由于

$$f(x_2)-f(x_1)=(3x_2-2)-(3x_1-2)=3(x_2-x_1)>0,$$

即 $f(x_1)<f(x_2)$,所以$y=3x-2$在区间$(-\infty,+\infty)$内是增函数.

1.2.2 对称与函数的奇偶性

1. 函数图像的对称性

一般地,设点$P(a,b)$为平面上的任意一点.

(1) 点$P(a,b)$关于x轴的对称点的坐标为$(a,-b)$,其坐标特征为:横坐标不变,纵坐标变为相反数;

(2) 点$P(a,b)$关于y轴的对称点的坐标为$(-a,b)$,其坐标特征为:纵坐标不变,横坐标变为相反数;

(3) 点$P(a,b)$关于原点O的对称点的坐标为$(-a,-b)$,其坐标特征为:横坐标变为相反数,纵坐标也变为相反数.

例 2 (1) 已知点$P(-2,3)$,写出点P关于x轴的对称点坐标.

(2) 已知点P的坐标为(x,y),写出点P关于y轴的对称点坐标及关于原点O的对称点坐标.

(3) 设函数$y=f(x)$,在函数图像上任取一点$P(a,f(a))$,写出点P关于y轴的对称点坐标及关于原点O的对称点坐标.

解 (1) 点$P(-2,3)$关于x轴的对称点坐标为$P(-2,-3)$.

(2) 点$P(x,y)$关于y轴的对称点坐标为$(-x,y)$,点$P(x,y)$关于原点O的对称点坐标为$(-x,-y)$.

(3) 点$P(a,f(a))$关于y轴的对称点坐标为$P(-a,f(a))$,点$P(a,f(a))$关于原点O的对称点坐标为$P(-a,-f(a))$.

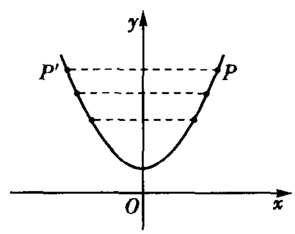

图 1.7

下面重点讨论函数图像关于y轴对称及关于原点对称的情况.

(1) 如果函数图像上的任意一个点P关于y轴的对称点P'仍然在函数图像上,那么,函数图像**关于y轴对称**.y轴叫做这个函数图像的**对称轴**,如图 1.7 所示.

(2) 如果函数图像上的任意一个点 P 关于原点的对称点 P' 仍然在函数图像上，那么，函数图像**关于坐标原点对称**. 原点 O 叫做这个函数图像的**对称中心**，如图 1.8 所示.

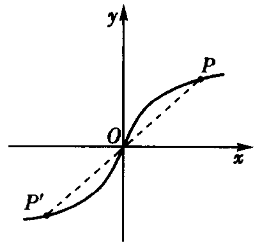

图 1.8

容易验证，函数 $y=\dfrac{2}{x}$ 是关于原点对称的；函数 $y=x^2$ 是关于 y 轴对称的；函数 $y=2x+1$ 既不关于原点对称，也不关于 y 轴对称. 验证过程请同学们自己完成.

函数 $y=f(x)$ 的图像关于 y 轴对称时，图像上任意点 $P(x, f(x))$ 关于 y 轴的对称点 $P'(-x, f(x))$ 仍在图像上，如图 1.9 所示. 所以

$$f(-x)=f(x).$$

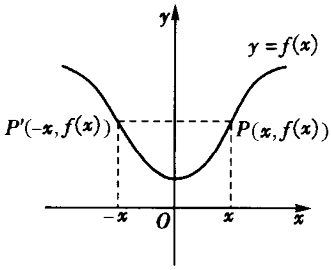

图 1.9

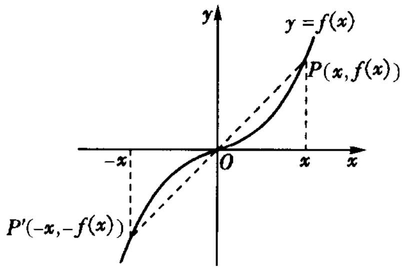

图 1.10

同理，函数 $y=f(x)$ 的图像关于坐标原点对称时，图像上任意点 $P(x, f(x))$ 关于坐标原点的对称点 $P(-x, -f(x))$ 仍在图像上，如图 1.10 所示. 所以

$$f(-x)=-f(x).$$

2. 函数的奇偶性

定义 1.3 设函数 $y=f(x)$ 在集合 D 上有定义，如果对于任意的 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；如果对于任意的 $x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

如果一个函数是奇函数或偶函数，那么，就说这个函数具有**奇偶性**. 不具有奇偶性的函数叫做**非奇非偶函数**. 奇函数的图像关于原点对称；偶函数的图像关于 y 轴对称.

由定义可知，对任意的 $x\in D$，必有 $-x\in D$，否则，$f(-x)$ 没有意义. 因此，奇函数及偶函数的定义域都必须是关于原点对称的区间.

例 3 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x\sin x$； (2) $f(x)=\sin x-\cos x$；

(3) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$； (4) $f(x)=\sqrt{x}$.

解 (1) $f(x)=x\sin x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，是关于原点对称的区间，且

$$f(-x)=-x\sin(-x)=x\sin x=f(x).$$

所以函数 $f(x)=x\sin x$ 是偶函数.

(2) $f(x)=\sin x-\cos x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，是关于原点对称的区间，由于

$$f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)=-\sin x-\cos x\neq -f(x),$$

且 $f(-x)\neq f(x)$.

所以 $f(x)=\sin x-\cos x$ 是非奇非偶函数.

(3) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，是关于原点对称的区间，且

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1})=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})$$

$$=\ln\left[(\sqrt{x^2+1}-x)\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right]$$

$$=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=-f(x).$$

所以 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 是奇函数.

(4) $f(x)=\sqrt{x}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，不是一个关于原点对称的区间，所以函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 是非奇非偶函数.

1.2.3 函数的有界性

定义 1.4 设函数 $y=f(x)$ 在集合 D 上有定义，如果存在一个正数 M，对于所有的 $x\in D$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上是**有界的**. 如果不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$ 在 D 上是**无界的**.

对于函数的有界性，要注意以下两点：

(1) 当一个函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有界时，正数 M 的取法不是唯一的. 例如 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，有 $|\sin x|\leqslant 1$，但我们也可以取 $M=2$，即 $|\sin x|<2$ 总是成立的，实际上 M 可以取任意大于 1 的数.

(2) 有界性是依赖于区间的. 例如函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内是无界的，因为对于区间 $(0,1)$ 内的一切 x，不存在正数 M，使 $\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant M$ 成立. 但是 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $[1,2]$ 内是有界的，因为对于区间 $[1,2]$ 上的一切 x，都有 $\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$ 成立，这里 $M=1$，如图 1.11 所示.

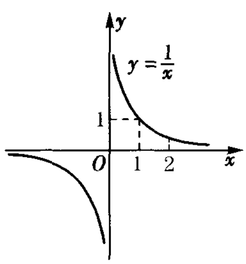

图 1.11

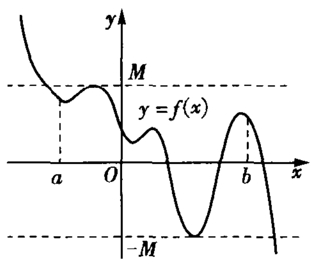

图 1.12

显然，如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内是有界的，那么它的图像在区间 (a,b) 内必介于两条平行线 $y=-M$ 和 $y=M$ 之间，如图 1.12 所示.

1.2.4 函数的周期性

定义 1.5 设函数 $y=f(x)$，如果存在一个不为零的常数 l，对于定义域 D 内的每一个

x，有 $x+l\in D$，并且总有

$$f(x+l)=f(x)$$

成立，那么，函数 $y=f(x)$ 叫做**周期函数**，常数 l 叫做这个函数的**周期**.

显然，如果函数 $f(x)$ 以 l 为周期，那么 $2l,3l,\cdots,nl(n\in\mathbf{N}^*)$ 也是它的周期. 通常把周期中最小的正数叫做函数的**最小正周期**，简称**周期**.

今后我们研究函数的周期，都是指最小正周期.

例如，函数 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数. $y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数，函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 是以 $\frac{2\pi}{\omega}$ 为周期的周期函数.

一个以 l 为周期的周期函数，它的图像在定义域内每隔长度为 l 的相邻区间上，有相同的形状，如图 1.13 所示.

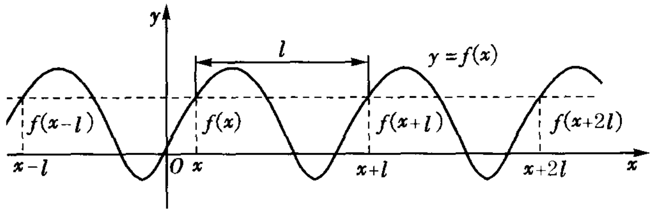

图 1.13

对于周期函数的性态，只要在长度等于 l 的任意一个区间上考虑即可.

对于周期函数的图像的描绘，也只要按长度等于 l 的任意一个区间上的一段曲线从区间的两端延伸出去就可以了，自变量每增加或减少一个周期后图形重复出现一段，如图1.13所示.

1.3 反函数

1.3.1 反函数的概念

在函数的定义中有两个变量，一个是自变量，一个是因变量，但在实际问题中，哪一个是自变量，并不是绝对的，要根据所研究的具体问题来决定.

例如，设某种商品的单价为 p，销售量为 x，则收入 y 是 x 的函数：

$$y=px,$$

这时 x 是自变量，y 是 x 的函数. 若已知收入为 y，反过来求销售量 x，则有

$$x=\frac{y}{p},$$

这时 y 是自变量，x 就是 y 的函数了.

上面的两个式子是同一个关系的两种写法，但从函数的角度来看，由于对应关系不同，它们是不同的函数，我们称它们互为反函数.

定义 1.6 设函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 M，如果对于任意的 $y\in M$，都可以从关系式 $y=f(x)$ 确定唯一的 $x\in D$ 与之对应，这样就确定了一个以 y 为自变量的新函数，叫

做函数 $y=f(x)$ 的**反函数**,记作 $x=f^{-1}(y)$,其定义域是 M,值域是 D.

在上面的例子中,$x=\frac{y}{p}$ 就是 $y=px$ 的反函数.

函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 是以 y 为自变量,x 为函数. 但是习惯上都以 x 表示自变量,以 y 表示函数,因此反函数通常改写为 $y=f^{-1}(x)$. 虽然在这里改变了表示变量的字母,但它的定义域和对应关系这两个确定函数的要素并未改变.

因此,在求给定解析式的函数的反函数时,可首先对解析式进行变形,得到 $x=f^{-1}(y)$,然后再将字母 x 与 y 互换,从而得到以 x 为自变量的反函数 $y=f^{-1}(x)$.

从反函数的概念可知,函数 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数. 而且,函数 $y=f(x)$ 的定义域,是它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的值域;函数 $y=f(x)$ 的值域,是它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域.

例 1 求函数 $y=2x-3$ 的反函数,并在同一直角坐标系中作出它们的图像.

解 由 $y=2x-3$ 得 $x=\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}$,将 x 与 y 互换,得所求的 $y=2x-3$ 反函数为

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}.$$

如图 1.14 所示,函数 $y=2x-3$ 的图像是经过点 $(0,-3)$ 与 $\left(\frac{3}{2},0\right)$ 的直线,而其反函数 $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ 的图像是经过点 $(-3,0)$ 与 $\left(0,\frac{3}{2}\right)$ 的直线.

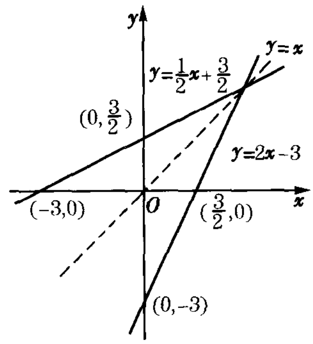

图 1.14

例 2 求函数 $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的反函数,并写出反函数的定义域.

解 因为 $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$,

$$e^x-e^{-x}=2y,$$
$$e^{2x}-2ye^x-1=0,$$

所以 $$e^x=\frac{2y\pm\sqrt{4y^2+4}}{2}=y\pm\sqrt{y^2+1}.$$

由于 $e^x>0$,上式的根号前取正号,即 $e^x=y+\sqrt{y^2+1}$,取以 e 为底的对数,

于是 $$x=\ln(y+\sqrt{y^2+1}).$$

所以所求反函数为 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$,其定义域为 **R**.

例 3 求函数 $y=10^{x+1}$ 的反函数.

解 由 $y=10^{x+1}$ 得 $x=\lg y-1$,将 x 与 y 互换,得所求的反函数为

$$y=\lg x-1.$$

对于函数 $y=f(x)$,在它的定义域内并不一定都有反函数,因为对于 y 的某些值,满足关系式 $y=f(x)$ 的 x 值可能不止一个,这样,就确定不了一个以 y 为自变量的新函数. 例如,

$y=x^2(x\in\mathbf{R})$，由于 $x=\pm\sqrt{y}$不是单值的，即不满足对于任意的 $y\in M$，都可以从关系式 $y=f(x)$确定唯一的 $x\in D$ 与之对应，故在整个定义域 $\mathbf{R}$ 内没有反函数. 但若将定义域限制在 $[0,+\infty)$，则它有反函数 $y=\sqrt{x}$；若将定义域限制在 $(-\infty,0)$，则它又有反函数$y=-\sqrt{x}$.

由反函数的定义可知，只有 x 与 y 的取值是一一对应的，才有反函数. 因此单调函数一定有反函数.

1.3.2　互为反函数的函数图像间的关系

一般地，函数 $y=f(x)$的图像和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$的图像关于直线 $y=x$ 对称.

利用上述互为反函数的函数图像间的关系，可由函数 $y=f(x)$的图像作其反函数 $y=f^{-1}(x)$的图像.

例 4　在同一直角坐标系内利用函数 $y=x^2,x\in(-\infty,0]$的图像作其反函数 $y=-\sqrt{x}$的图像.

解　如图 1.15 所示，在直角坐标平面内作出直线 $y=x$. 在函数 $y=x^2,x\in(-\infty,0]$的图像上取 M_1、M_2、M_3 等点，并分别作出它们关于直线 $y=x$ 对称的点 N_1、N_2、N_3 等. 由于 $y=x^2$ 的图像经过原点 O，而 O 点在直线 $y=x$ 上，所以 O 点关于 $y=x$ 对称的点仍为 O 点本身. 把点 O、N_1、N_2、N_3 等连成光滑的曲线，它就是反函数 $y=-\sqrt{x}$的图像.

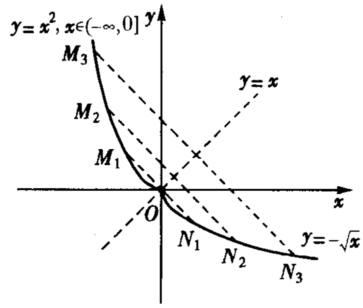

图 1.15

1.3.3　基本初等函数

基本初等函数包括常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数六大类. 它们是微积分中所研究对像的基础，我们在这里重点讨论它们的定义域、值域、图像和性质.

1. 常数函数 $y=c$（c 为常实数）

它的定义域是$(-\infty,+\infty)$，由于无论 x 取何值，都有 $y=c$，所以，它的图像是过点$(0,c)$平行于 x 轴的一条直线，如图 1.16所示. 它是偶函数.

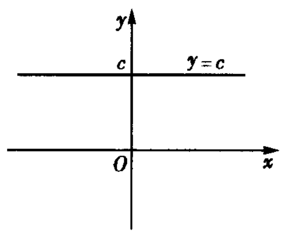

图 1.16

2. 幂函数 $y=x^\alpha$（α 为实数）

幂函数 $y=x^\alpha$ 的定义域随 α 而异. 例如，当 $\alpha=3$ 时，$y=x^3$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$；当 $\alpha=\frac{1}{2}$时，$y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$的定义域为$[0,+\infty)$；当 $\alpha=-\frac{1}{2}$时，$y=x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$的定义域为$(0,+\infty)$. 但不论 α 为何值，幂函数在$(0,+\infty)$内一定有定义，且其图像都经过点$(1,1)$.