铁路工厂职工教材

高中代数

下册

铁路工厂职工教材编辑工作组编

人民铁道出版社

鐵路工厂职工教材
高 中 代 数
下 册
鐵路工厂职工教材編輯工作組編
人民鐵道出版社出版
（北京市霞公府17号）
北京市書刊出版业营业許可証出字第010号
新华書店发行
人民鐵道出版社印刷厂印
書号1413　开本787×1092 $\frac{1}{32}$　印张5 $\frac{3}{8}$　字数136千
1959年6月第1版
1959年6月第1版第1次印刷
印数 0,001—16,500册
統一書号：15043·68　定价（4）0.33元

目 录

第十章　二元二次方程組

106. **二元二次方程組**　我們来研究下面两个問題：

（1）有两块边长不等的正方形的鋼板，它們的面积的和是74平方公分，边长的和是12公分，分别求它們的边长。

設第一个正方形的边长是x公分，另一个正方形的边长是y公分，那么根据题目的条件，就得

$$\begin{cases} x^2+y^2=74, \\ x+y=12。\end{cases}$$

（2）要下一块矩形的板料，面积是50平方公分，周长是30公分，問下这块板料时长与寬各应有多少公分？

設矩形板料的长是x公分，寬是y公分，根据条件得：

$$\begin{cases} xy=50, \\ 2(x+y)=30。\end{cases}$$

上面两个方程組中的第一个方程：$x^2+y^2=74$，$xy=50$，有两个未知数，它們的最高次項是二次的，像这样的方程叫做**二元二次方程**。

二元二次方程的一般形式是：

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0。$$

其中a，b，c不同时为0，ax^2，bxy和cy^2叫做**二次項**，dx和ey叫做**一次項**，f叫做**常数項**。

很明显，一个二元二次方程一般可以有无数組解，事实上，任意假定未知数的一个值，代入已知的二元二次方程，就可得出另一个未知数的一元方程，只要这个方程有一个根或者两个根，我們就可以得出已知的二元二次方程的一組或

者两組解。

由含有两个未知数的两个方程組成的方程組，其中一个方程是二次的，另一个不高于二次（二次或者一次），就叫二元二次方程組。

107. 由一个二元二次方程和一个二元一次方程組成的方程組 这种方程組的一般形式是：

$$\begin{cases}ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0, & (a,b,c\text{ 不同时为}0)\\ mx+ny+p=0 & (m,n\text{ 不同时为}0)\end{cases}$$

这种形式的二元二次方程組，一般用代入法来解，就是把二元一次方程里的一个未知数用另一个未知数来表示（例如把 y 用 x 来表示），然后代入二元二次方程，这样原来的二元二次方程就变成了一元方程，并且它的次数不大于 2，解这个方程我們就可以求得一个未知数（例如 x）的值，用这个值代入已知的二元一次方程，又可以求得另一个未知数（例如 y）的值。

例 1 解我們在第 106 节問題 1 中所列出的方程組。

$$\begin{cases}x^2+y^2=74, & (1)\\ x+y=12。 & (2)\end{cases}$$

解 从（2）得 $y=12-x$， （3）

将（3）代入（1）$x^2+(12-x)^2=74$，

整理后得 $2x^2-24x+70=0$，

解这个方程，得 $x_1=5$， $x_2=7$。

用 $x_1=5$ 代入（3），得 $y_1=7$，

用 $x_2=7$ 代入（3），得 $y_2=5$。

因此这个方程組有两組解：

$$\begin{cases}x_1=5,\\ y_1=7;\end{cases}\qquad\begin{cases}x_2=7,\\ y_2=5。\end{cases}$$

解 2 解方程組：

$$\begin{cases} x^2-2xy-3y^2+2x-3y+14=0, & (1) \\ x-3y-2=0。 & (2) \end{cases}$$

解 从（2）得 $\quad x=3y+2,\qquad (3)$

代入（1），得 $(3y+2)^2-2(3y+2)y-3y^2+$
$+2(3y+2)-3y+14=0,$

整理后得到： $\quad 11y+22=0,$

$$\therefore \quad y=-2,$$

代入（3），得 $\quad x=-4。$

因此这个方程組有一組解：

$$\begin{cases} x=-4, \\ y=-2。 \end{cases}$$

例3 解方程組：

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{5}{2}, \\ x+y=10。 \end{cases}$$

解 这个方程組經过变形后可以化成二次方程組：

$$\begin{cases} 4x^2-17xy+4y^2=0, \\ y=10-x。 \end{cases}$$

解这个方程組得： $\begin{cases} x_1=8, \\ y_1=2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=2, \\ y_2=8。 \end{cases}$

从方程組的变形过程，有增根的可能，需要檢驗，驗算后，知道这两組解都是原方程的解。

习 题 六 十 二

解下列各方程組：

1. $\begin{cases} x^2+xy=2, \\ y-3x=7。 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x^2+y^2-6x=0, \\ x+2y=0。 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x^2-5xy+y^2+10x+12y=1000, \\ 2x-3y-1=0。 \end{cases}$

4. $\begin{cases}\dfrac{3}{x+5}+\dfrac{2}{y-3}=2, \\ \dfrac{4}{x-2}=\dfrac{1}{y-6}。\end{cases}$　　5. $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{41}{20}, \\ x+y=41。\end{cases}$

6. $\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=\dfrac{5}{6}, \\ x-y-5=0。\end{cases}$

7. $\begin{cases}(x+2)(y-2)=xy, \\ \sqrt{(x+1)(y+4)}-x=3。\end{cases}$

8. $\begin{cases}\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=2, \\ x+y=a+b。\end{cases}$

9. （1）如果方程組

$$\begin{cases}y^2-4x-2y+1=0, \\ y=mx+2,\end{cases}$$

有相同的兩組实数解，求m的值；

（2）m取什么值的时候，这个方程組沒有实数解?

10. 解方程組:

$$\begin{cases}x-y=2, \\ y+z=7, \\ x^2+z^2=41。\end{cases}$$

提示：把前兩个方程里的x和z都用y来表示。

11. 互相垂直的兩个力的合力是10千克。已知第一个力比第二个力大2千克，求这兩力。

108. 几个方程組的特殊解法

（1）方程組　$x\pm y=a$，$xy=b$的特殊解法。

① 方程組　$\begin{cases}x+y=a, \\ xy=b。\end{cases}$

除了可以用上面的一般方法来解，还可以用韦达定理来解，由这个方程組，我們知道两个未知数的和是a；积是

b，所以这两个未知数就是方程

$$z^2-az+b=0$$

的两个根。

例 1 解我們在第106节問題 2 中所列出的方程組。

$$\begin{cases}2(x+y)=30, \\ xy=50;\end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases}x+y=15。\\ xy=50。\end{cases}$$

解 x 和 y 是方程 $z^2-15z+50=0$，的两个根，

解这个方程，得 $z_1=10$，$z_2=5$。

$$\therefore \quad \begin{cases}x_1=10, \\ y_1=5;\end{cases} \quad \begin{cases}x_2=5, \\ y_2=10。\end{cases}$$

例 2 解方程組：

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=8, \\ \dfrac{1}{xy}=7。\end{cases}$$

解 把 $\dfrac{1}{x}$ 和 $\dfrac{1}{y}$ 作为未知数，它們就是方程

$$z^2-8z+7=0$$

的两个根。

解这个方程得 $z_1=7$，$z_2=1$。

$$\therefore \quad \begin{cases}\dfrac{1}{x_1}=7, \\ \dfrac{1}{y_1}=1;\end{cases} \quad \begin{cases}\dfrac{1}{x_2}=1, \\ \dfrac{1}{y_2}=7。\end{cases}$$

即：

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{7}, \\ y_1=1;\end{cases} \quad \begin{cases}x_2=1, \\ y_2=\dfrac{1}{7}。\end{cases}$$

驗算后，知道这两組解都是原方程組的解。

② 方程組：

$$\begin{cases} x-y=a, \\ xy=b。\end{cases}$$

也可以利用韦达定理来解，它可变形为

$$\begin{cases} x+(-y)=a, \\ x(-y)=-b。\end{cases}$$

所以 x 和 $-y$ 是方程

$$z^2-az-b=0$$

的两个根。

例 3 解方程组：

$$\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=1, \\ xy=36。\end{cases}$$

解 原方程可变为：$\begin{cases} \sqrt{x}+(-\sqrt{y})=1, \\ \sqrt{x}(-\sqrt{y})=-6。\end{cases}$

由此可知，$\sqrt{x}$ 和 $-\sqrt{y}$ 是方程 $z^2-z-6=0$ 的两个根。

解这个方程，得

$$z_1=3, \qquad z_2=-2。$$

因为 $\sqrt{x}$ 和 $\sqrt{y}$ 分别是 x 和 y 的算术平方根，

$$\therefore \qquad \begin{cases} \sqrt{x}=3, \\ -\sqrt{y}=-2; \end{cases}$$

因此

$$\begin{cases} x=9, \\ y=4。\end{cases}$$

験算后，知道这組解是原方程組的解。

（2）**方程組** $x^2+y^2=a$，$x\pm y\ b$ **的特殊解法。**

方程組 $\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ x+y=b; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ x-y=b。\end{cases}$

也可以利用韦达定理来解，只要設法求出 xy 的值就可以了。

例 1　解方程組：

$$\begin{cases} x^2+y^2=25, & (1) \\ x+y=7。 & (2) \end{cases}$$

解　（2）平方，得　$x^2+2xy+y^2=49$。

（3）－（1），得　$2xy=24$，　（3）

即　$xy=12$。　（4）

从（2）和（4）知道 x 和 y 是方程

$$z^2-7z+12=0$$

的两个根。

解这两个方程，得　$z_1=4$，　$z_2=3$。

$$\therefore \begin{cases} x_1=4, \\ y_1=3; \end{cases} \begin{cases} x_2=3, \\ y_2=4。 \end{cases}$$

驗算后，知道这两組解都是原方程組的解。

例 2　解方程組：

$$\begin{cases} x^2+y^2=5, & (1) \\ x-y=-3。 & (2) \end{cases}$$

解　（2）平方，得　$x^2-2xy+y^2=9$。　（3）

（3）－（1），得　$-2xy=4$。　（4）

（4）÷2，得　$-xy=2$。　（5）

把（2）、（5）写为　$x+(-y)=-3$，　（6）

$x(-y)=2$。　（7）

由（6）、（7）知道 x 与 $-y$ 是方程

$$z^2+3z+2=0$$

的两个根。

解这个方程，得　$z_1=-1$，　$z_2=-2$。

$$\therefore \quad \begin{cases} x_1 = -1, \\ y_1 = 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -2, \\ y_2 = 1。\end{cases}$$

驗算后，知道这两組解都是原方程組的解。

（3）方程組　$x^2-y^2=a$，$x\pm y=b$　的特殊解法。

因为　$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$，所以在 $b\neq 0$ 时，可以把方程組：

$$\begin{cases} x^2-y^2=a, \\ x+y=b \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} x^2-y^2=a, \\ x-y=b \end{cases}$$

中的第一个方程两边分別除以第二个方程的两边，把原方程組变形为：

$$\begin{cases} x+y=b, \\ x-y=\dfrac{a}{b}; \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} x-y=b, \\ x+y=\dfrac{a}{b}。\end{cases}$$

这样，只要解变形后的方程組就可以了。

例 1　解方程組：

$$\begin{cases} x^2-y^2=48, & (1) \\ x+y=6。 & (2) \end{cases}$$

解　（1）÷（2），得　　$x-y=8$。

解方程組：
$$\begin{cases} x+y=6, \\ x-y=8, \end{cases}$$

可得：

$$\begin{cases} x=7, \\ y=-1。\end{cases}$$

这就是原方程的解。

例 2　解方程組：

$$\begin{cases} x^2-y^2=a^4-1, & (1) \\ x-y=a^2+1。 & (2) \end{cases}$$

解 (1)÷(2)，得 $\quad x+y=a^2-1$。

解方程組：

$$\begin{cases} x+y=a^2-1, \\ x-y=a^2+1; \end{cases}$$

可得：

$$\begin{cases} x=a^2, \\ y=-1 \end{cases}$$

即为原方程的解。

上面的方法也可以用来解下列形式的方程組。

例 3 解方程組：

$$\begin{cases} x^3+y^3=7, & (1) \\ x+y=1。 & (2) \end{cases}$$

解 由(1)÷(2)，得

$$x^2-xy+y^2=7。$$

?

解方程組：

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2=7, \\ x+y=1, \end{cases}$$

可得：

$$\begin{cases} x_1=2, \\ y_1=-1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=-1, \\ y_2=2。 \end{cases}$$

这两組解都是原方程的解。

习 題 六 十 三

1. 解下列各方程組：

(1) $\begin{cases} 2(y+3)=(3x-y)(3y-x), \\ 5(x-y)=2(x+y)。 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+y=2, \\ xy=-15。 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} xy+y=a+2b, \\ xy=ab+b^2。 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x-y=16, \\ xy=-48。 \end{cases}$ (5) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=3, \\ xy=4。 \end{cases}$

(6) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6}, \\ xy=6。 \end{cases}$

(7) $\begin{cases}\sqrt{x+1}-\sqrt{y-1}=1,\\(x+1)(y-1)=4。\end{cases}$

(8) $\begin{cases}x^2+y^2=13,\\x+y=5。\end{cases}$　　(9) $\begin{cases}x+y=5,\\\sqrt{x}+\sqrt{y}=3。\end{cases}$

(10) $\begin{cases}\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{9}{y^2}=6,\\\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}=2。\end{cases}$

(11) 解方程組$\begin{cases}x^2+y^2=a,\\xy=b;\end{cases}$并且加以討論。

2. 利用除法解下列各方程組:

(1) $\begin{cases}x^2-y^2=2+\sqrt{3},\\x-y=2-\sqrt{3}。\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}=5,\\\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=3。\end{cases}$　　(3) $\begin{cases}x-y=6,\\\sqrt{x}-\sqrt{y}=2。\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x^3+y^3=-217,\\x+y=-7。\end{cases}$

3. 用图象方法解下列方程組并且用代数方法进行檢驗①:

(1) ① $\begin{cases}x^2+y^2=25,\\x+y=7;\end{cases}$　　② $\begin{cases}x^2+y^2=16,\\x-y=2。\end{cases}$

(2) ① $\begin{cases}x^2-y^2=8,\\x-y=2。\end{cases}$　　② $\begin{cases}x^2-y^2=9,\\2x+3y=18。\end{cases}$

4. 已知等腰三角形的周長等于18公分，底上的高等于3公分，求它的底和腰的長。

5. A城和B城相距130公里，甲車从A城，乙車从B城同时相向出发，兩車相遇后，甲車再过2小时到B城，乙車再过4小时30分

① 此題根据情况，老師給予講授。

到A城，求各車的速度。

6. 甲乙兩列車从相距600公里的兩城相向开行。如果乙車比甲車早出发1小时30分，那末兩車就可以在路途的中点相遇；如果同时出发，那末5小时后兩車还相距90公里，求各車的速度。

7. 已知矩形的周長是68公尺，对角綫的長是26公尺，求它的長和寬。

8. 已知直角三角形的弦長25公尺，勾股的和等于31公尺，求它的面积。

9. 三角形的周長等于42公分，面积等于84平方公分。已知它的一边長14公分，求其他兩边的長。

109. 由兩个二元二次方程組成的方程組 这种方程的一般形式是：

$$\begin{cases} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2+d_1x+e_1y+f_1=0\text{；} \\ (a_1,\ b_1,\ c_1\text{ 不同时为零}) \\ a_2x^2+b_2xy+c_2y^2+d_2x+e_2y+f_2=0\text{。} \end{cases}$$

$(a_2,\ b_2,\ c_2$ 不同时为零$)$

这种形式的方程組，消去一个未知数后，一般情况要得出一个一元四次方程，这种方程的一般解法，我們現在还未学到，但是在某些特殊情形，有些二元二次方程組可以化成我們能解的方程組，下面是比較常見的几种情形：

（1）用加减消去法降低次数或消去一个未知数来解二元二次方程組。

例1 解方程組：

$$\begin{cases} x+y+xy=5\text{；} & (1) \\ 2x+y-xy=2\text{。} & (2) \end{cases}$$

解 （1）+（2），得 $3x+2y=7$，

$$\therefore\ y=\frac{1}{2}(7-3x)\text{；} \qquad (3)$$

代入（1）整理后得 $x^2-2x+1=0$，

解这个方程得　　　$x_1=1$，　$x_2=1$。

代入（3），得　　$\begin{cases}x_1=1,\\ y_1=2;\end{cases}$　　$\begin{cases}x_2=1,\\ y_2=2.\end{cases}$

例 2　解方程組：

$$\begin{cases}2x^2+5y^2-4x+y-6=0; & (1)\\ x^2+2y^2-2x+y-3=0. & (2)\end{cases}$$

解　（2）乘以2，得

$$2x^2+4y^2-4x+2y-6=0, \quad (3)$$

（1）－（3），得　$y^2-y=0$，

$\therefore$　$y=0$，　　　$y=1$。

以 $y=0$ 代入（2）得　　$x^2-2x-3=0$，

$\therefore$　$x=3$，　　　$x=-1$。

以 $y=1$ 代入（2），得　$x^2-2x=0$，

$\therefore$　$x=0$，　　$x=2$。

$\therefore$　$\begin{cases}x_1=3,\\ y_1=0;\end{cases}$　$\begin{cases}x_2=-1,\\ y_2=0;\end{cases}$　$\begin{cases}x_3=0,\\ y_3=1;\end{cases}$　$\begin{cases}x_4=2,\\ y_4=1.\end{cases}$

（2）利用因式分解来解二元二次方程組。

例 3　解方程組。

$$\begin{cases}x^2+xy+y^2=7, & (1)\\ 6x^2-5xy+y^2=0. & (2)\end{cases}$$

解　把（2）分解因式，得

$$(3x-y)(2x-y)=0;$$

$\therefore$　　　　$y=3x$；$y=2x$。

分别解下面的两个方程組

$\begin{cases}x^2+xy+y^2=7,\\ y=2x;\end{cases}$　　　$\begin{cases}x^2+xy+y^2=7,\\ y=3x.\end{cases}$

即得出：

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = -2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = \frac{1}{13}\sqrt{91}, \\ y_3 = \frac{3}{13}\sqrt{91}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4 = -\frac{1}{13}\sqrt{19}; \\ y_4 = -\frac{3}{13}\sqrt{19}。 \end{cases}$$

例4 解方程組：

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 9, & (1) \\ (x-y)^2 - 3(x-y) + 2 = 0。 & (2) \end{cases}$$

解 由（1）得 $x+y=3$， $x+y=-3$，

由（2）得 $x-y=2$， $x-y=1$。

分别解下面四个方程組，

$$\begin{cases} x+y=3, \\ x-y=2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=3, \\ x-y=1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=-3, \\ x-y=2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=-3, \\ x-y=1。 \end{cases}$$

就得：

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{2}, \\ y_1 = \frac{1}{2}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = -\frac{1}{2}, \\ y_3 = -\frac{5}{2}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4 = -1, \\ y_4 = -2。 \end{cases}$$

例5 解方程組：

$$\begin{cases} x^2 + 3xy = 28; & (1) \\ xy + 4y^2 = 8。 & (2) \end{cases}$$

解 （1）乘以2，得

$$2x^2 + 6xy = 56, \qquad (3)$$

（2）乘以7，得