21世纪高等院校精品教材

高等数学

GAODENGSHUXUE

庞进生 段学新 范建华 主编

经济日报出版社

高 等 数 学

主　审　李效民
主　编　庞进生　段学新　范建华
副主编　刘庆芝　刘洪运　任学军
　　　　闫明刚　闫杰生　贺学海

经济日报出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学 / 庞进生，段学新，范建华主编．—北京：经济日报出版社，2006
ISBN 7－80180－596－8
Ⅰ．高…　Ⅱ．①庞…②段…③范…　Ⅲ．高等数学　Ⅳ．O18

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 103837 号

高 等 数 学

编　　者	庞进生 等
责任编辑	雷　伟
责任校对	齐　欣
出版发行	经济日报出版社
地　　址	北京市宣武区白纸坊东街 2 号（邮政编码：100054）
电　　话	（010）63588446（编辑部）63567683（发行部）63567687（邮购部）
网　　址	edp.ced.com.cn
E － mail	edp@ced.com.cn
经　　销	全国各地新华书店
印　　刷	北京金明盛印刷有限公司
开　　本	787 × 1092 mm　1/16
印　　张	22.75
字　　数	500 千字
版　　次	2006 年 9 月第一版
印　　次	2006 年 9 月第一次印刷
书　　号	ISBN 7－80180－596－8/O·003
定　　价	38.00元

目　　录

第一章　函数、极限与连续

17世纪笛卡尔(Descartes)把变量引入数学,对数学产生了巨大的影响.它反映了社会的客观发展对数学这门科学的推动,在此基础上促使高等数学的一个重要部分——微积分学的形成和进一步的发展.为讨论微积分,本章将介绍函数、极限和连续基本概念,并着重说明极限这个重要工具.

第一节　函　　数

一、函数的定义

1.函数的概念

在观察自然现象或工程问题时,常常发现几个变量在变化,它们并不是孤立的,而是相互依赖地按照一定的规律在变化,先看几个实例:

例1　圆的面积与它的半径之间的关系由公式 $S=\pi r^2$ 确定,即 $\forall r\in[0,+\infty)$,圆面积 S 有一个确定的数值.

例2　在自由落体运动中,设物体下落的时间为 t,下落的距离为 h,如果取开始下落的时刻 $t=0$,则 S 与 t 之间的依赖关系由公式 $h=\frac{1}{2}gt^2$ 表示,其中 g 为重力加速度.若物体到达地面的时刻 $t=T$,则当 t 在 $[0,T]$ 上任取一个数值时,就可由上式确定出 h 的对应值.

例3　由实验测得某金属轴在不同温度 t(℃)下的长度 L(m),数据由下表所示.

t(℃)	10	20	30	40	50	60
$L(m)$	1.00012	1.00024	1.00035	1.00048	1.00061	1.00072

这里 t 和 L 是两个相互依赖的变量,上表显示了变量 L 与 t 之间的依赖关系.

上面三个例子的实际意义虽不相同,但却有共同之处.每个例中都出现有两个变量,当其中一个变量在一定的范围内取定一数值后,按照一个确定的规则,另一个变量有惟一确定的数值与它相对应,两个变量之间的这种对应关系,就是数学上函数概念的实质.

定义　设有两个变量 x 和 y,D 为一非空实数集.如果变量 x 在 D 内任取一个确定数值时,变量 y 按照一定的规则 f 有惟一确定的数值和它对应,则称对应规则 f 为定义在集合 D 上的一个函数.x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为函数的定义域,记为:$y=f(x)$.

x 所对应的 y 称为 x 的函数值,函数值全体称为函数的值域,记为 Y.

常常是通过函数值来研究函数,因此也称 $y=f(x)$ 是 x 的函数.

例1中,对应规则 $s=f(r)=\pi r^2$ 是定义域为 $D=[0,R]$ 的一个函数,其值域 $y=[0,\pi R^2]$.

例2中对应规则 $h=f(t)=\frac{1}{2}gt^2$ 是定义域为 $D=[0,T]$ 的一个函数,其值域 $y=[0,$

$\frac{1}{2}gT^2]$.

例3则由上表确定温度 t 与轴长 L 的对应规则，$D=\{10,20,30,40,50,60\}$.

如果 $x_0\in D$，函数值 $f(x_0)$ 存在，称函数在 x_0 有定义．函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的函数值记为：$y|_{x=x_0}=f(x_0)$，有时对于变量 x 的每一个值，对应的 y 值有多个的情形，为了叙述方便称之为多值函数．而符合上述定义的函数称为单值函数．对于多值的情形，我们可以限制 y 的值域使之成为单值再进行研究．例如：$y=\mathrm{Arcsin}x$，则可限制 $y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，而使它转化为函数 $y=\arcsin x$，从而通过对 $y=\arcsin x$ 的研究，了解 $y=\mathrm{Arcsin}x$ 的性态．

例4 确定函数：$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$ 的定义域．

解 显然，其定义域为满足不等式：$x^2-2x-3>0$ 的 x 值的集合，解此不等式，则得其定义域为：$x>3$ 或 $x<-1$，即：$(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$.

也可以用集合形式表示为 $D=\{x\,|\,x\in(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)\}$.

例5 确定函数：$f(x)=\sqrt{3+2x-x^2}+\ln(x-2)$ 的定义域．

解 函数的定义域应为满足不等式组：$\begin{cases}3+2x-x^2\geqslant 0\\ x-2>0\end{cases}$ 的 x 值的全体，解此不等式组，得其定义域 $2<x\leqslant 3$ 即 $x\in(2,3]$.

例6 设函数 $f(x)=x^3-2x+3$，求 $f(1)$，$f(-\frac{1}{a})$，$f(t^2)$，$[f(b)]^2$，$\frac{1}{f(c)}$.（其中 $a\neq 0$，$f(c)\neq 0$）

解 $f(1)=1^3-2\cdot 1+3=2$;

$$f(-\frac{1}{a})=(-\frac{1}{a})^3-2(-\frac{1}{a})+3=-\frac{1}{a^3}+\frac{2}{a}+3=\frac{3a^3+2a^2-1}{a^3};$$

$$f(t^2)=(t^2)^3-2(t^2)+3=t^6-2t^2+3;$$

$$[f(b)]^2=(b^3-2b+3)^2;$$

$$\frac{1}{f(c)}=\frac{1}{c^3-2c+3}.$$

注意 函数 $y=C$（C 为常数）的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，这时不论自变量取何值，对应的函数值均为 C.

2．分段函数

有些函数虽然也是以数学式子表示，但是它们在定义域的不同范围具有不同的表达式，这样的函数称为分段函数．

例如，函数 $y=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$ 是定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $y=[0,+\infty)$ 的一个分段函数，它的图形如图 1-1 所示．当自变量 x 取 $(-\infty,0)$ 内的数值时，函数值由 $y=-x$ 确定，而当自变量 x 取 $[0,+\infty)$ 内的数值时，函数值由 $y=x$ 确定．

例7 旅客乘坐火车可免费携带不超过20公斤的物品，超过20公斤而不超过50公斤的部分每公斤交费0.20元，超过50公斤的部分每公斤交费0.30元．求运费与携带物品重量的

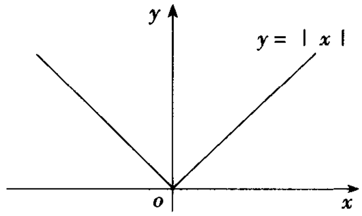


图 1 - 1

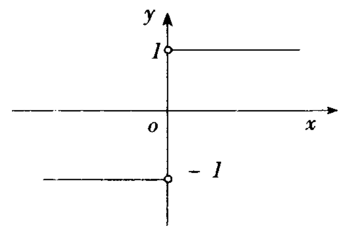


图 1 - 2

函数关系.

解 设物品重量为 x 公斤,应交运费为 y 元.由题意可知这时应考虑三种情况:

第一种情况是重量不超过 20 公斤,这时 $y=0, x\in[0,20]$.

第二种情况是重量大于 20 公斤但不超过 50 公斤,这时 $y=(x-20)\times 0.2, x\in(20,50]$.

最后是重量超过 50 公斤,这时 $y=(50-20)\times 0.2+(x-50)\times 0.3, x>50$.

因此,所求的函数是一个分段函数 $y=\begin{cases}0, & x\in[0,20],\\ 0.2(x-20), & x\in(20,50],\\ 0.2(50-20)+0.3(x-50), & x>50.\end{cases}$

例 8 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ 求 $f(2), f(0)$ 和 $f(-2)$.

解 因为 $2\in(0,+\infty), 0\in\{0\}, -2\in(-\infty,0)$,所以 $f(2)=1, f(0)=0, f(-2)=-1$.

在求分段函数的函数值时,应先确定自变量取值的所在范围,再按相应的式子进行计算.例 8 给出的函数称为符号函数,记为 $sgnx$.其定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $\{-1,0,1\}$,它的图形如图 1 - 2 所示.我们有时可以运用它将某些分段函数写得简洁一些.

例如,函数 $f(x)=\begin{cases}-x\sqrt{1+x^2}, & x\leqslant 0,\\ x\sqrt{1+x^2}, & x>0\end{cases}$ 可以记为 $f(x)=x\sqrt{1+x^2}\cdot\mathrm{sgn}x$.

例 9 函数 $f(x)=\begin{cases}\cos(x^2), & -\infty<x\leqslant 0,\\ 1, & 0<x\leqslant 2\end{cases}$ 为定义在 $(-\infty,2]$ 上的一个分段函数.对于任何一个 $x\in(-\infty,0]$,其函数值均以 $\cos(x^2)$ 计算;对于任何一个 $x\in(0,2]$,其函数值均为 1.

3.反函数

设 $y=f(x)$ 为定义在 D 上的函数,值域为 Y,若对于数集 Y 中的每个 y,数集 D 中都有惟一的一个数 x 使 $f(x)=y$,这就是说变量 x 是变量 y 的函数.这个函数称为函数 $y=f(x)$ 的反函数,记为 $x=f^{-1}(y)$.其定义域为 Y,值域为 D,函数 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 二者的图形是相同的.

由于人们习惯于用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,为了照顾习惯,我们将函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 用 $y=f^{-1}(x)$ 表示,注意,这时二者的图形关于 $y=x$ 对称.

由函数 $y=f(x)$ 求它的反函数的步骤是:由方程 $y=f(x)$ 解出 x,得到 $x=f^{-1}(y)$.将函数 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x 与 y 分别换为 y 和 x,这样得到反函数 $y=f^{-1}(x)$.

例 10 求函数 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 的反函数.

解 由 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 可解得 $x=\log_2(\dfrac{y}{1-y})$，交换 x、y 的位置，即得所求的反函数

$$y=\log_2\frac{x}{1-x}\text{或}y=\log_2x-\log_2(1-x).$$

其定义域$(0,1)$.

应当指出，函数 $y=f(x)$与其反函数 $y=f^{-1}(x)$之间存在着这样的关系.

$$f^{-1}[f(x)]=x\text{ 和 }f[f^{-1}(x)]=x.$$

例如，$y=\log_ax$ 的反函数是 $y=a^x$，则 $\log_a(a^x)=x$，$a^{\log_ax}=x$.

二、初等函数

1. 基本初等函数

下列六种函数称为基本初等函数.

(1)常数函数　　$y=C$;

(2)幂函数　　$y=x^a$(a 为实数);

(3)指数函数　　$y=a^x(a>0,a\neq1)$;

(4)对数函数　　$y=\log_ax(a>0,a\neq1)$;

(5)三角函数　　$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\mathrm{tg}x$，$y=\mathrm{ctg}x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$;

(6)反三角函数　　$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\mathrm{arctg}x$，$y=\mathrm{arcctg}x$ 等.

在中学数学里已经详细介绍了上述函数的主要特性及图形，本书不再赘述.

2. 复合函数

若函数 $y=f(u)$，定义域为 u_1，函数 $u=\varphi(x)$的值域为 u_2，其中 $u_2\subseteq u_1$. 则 y 通过变量 u 成为 x 的函数，这个函数称为由函数 $y=f(u)$和函数 $u=\varphi(x)$构成的复合函数，记为 $y=f[\varphi(x)]$. 其中变量 u 称为中间变量.

例 11 试求函数 $y=u^2$ 与 $u=\cos x$ 构成的复合函数.

解 将 $u=\cos x$ 代入 $y=u^2$ 中，即为所求的复合函数 $y=\cos^2x$，其定义域为$(-\infty,+\infty)$.

例 12 试求函数 $y=\sqrt{u}$与 $u=1-x^2$ 构成的复合函数.

解 仿例 11 的解法，容易得到该复合函数 $y=\sqrt{1-x^2}$，其定义域为$[-1,1]$.

例 13 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，$\varphi(x)=\sqrt{\sin x}$，求 $f[\varphi(x)]$，$\varphi[f(x)]$.

解 求 $f[\varphi(x)]$时，应将 $f(x)$中的 x 视为 $\varphi(x)$，因此 $f[\varphi(x)]=\dfrac{1}{1+\sqrt{\sin x}}$

求 $\varphi[f(x)]$时，应将 $\varphi(x)$中的 x 视为 $f(x)$，因此 $\varphi[f(x)]=\sqrt{\sin\dfrac{1}{1+x}}$.

例 14 设 $f(x-1)=x^2$，求 $f(2x+1)$.

解〔方法一〕 令 $u=x-1$，得 $f(u)=(u+1)^2$，再将 $u=2x+1$ 代入，即得复合函数 $f(2x+1)=[(2x+1)+1]^2=4(x+1)^2$.

〔方法二〕 因为 $f(x-1)=x^2=[(x-1)+1]^2$，于是问题转化为求 $y=f(x)=(x+1)^2$ 与 $\varphi(x)=2x+1$ 的复合函数 $f[\varphi(x)]$，因此，$f(2x+1)=[(2x+1)+1]^2=4(x+1)^2$.

有时，一个复合函数可能由三个或更多的函数构成. 比如，由函数 $y=\ln u$，$u=\sin v$ 和 $v=$

x^2+1 可以构成复合函数 $y=ln\sin(x^2+1)$,其中 u 和 v 都是中间变量.

与此同时,我们还应掌握复合函数的复合过程,即“分解”复合函数,这对于后面的学习有帮助,读者对此应予以重视.

例 15 指出 $y=(3x+5)^{10}$, $y=\sqrt{\log_a(\sin x+2^x)}$ 是由哪些函数复合而成的.

解 $y=(3x+5)^{10}$,是由 $y=u^{10}$ 和 $u=3x+5$ 复合而成的.

$y=\sqrt{\log_a(\sin x+2^x)}$ 是由 $y=\sqrt{u}$, $u=\log_a v$, $v=\sin x+2^x$ 复合而成的.

3.初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合构成,并且可以用一个数学式子表示的函数,称为初等函数.例如

$$y=\sqrt{\ln 5x-3^x+\sin^2 x},\ y=\frac{\sqrt[3]{2x}+\operatorname{tg}3x}{x^2\sin x-2^{-x}}$$

等等,都是初等函数,而

$$y=\begin{cases}3^x, & x\geqslant 0\\ x^2, & x<0.\end{cases}\quad y=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

等,都不是初等函数.

三、函数的几种特性

1.函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 D 上有定义,如果存在正数 M,使得对 $\forall x\in D$ 所对应的函数值都满足不等式 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界,如果这样的正数 M 不存在,则称函数 $f(x)$ 在 D 上无界.例如 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界,因为 $|\sin x|\leqslant 1$ 对任何 $x\in(-\infty,+\infty)$ 都成立,而函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内是无界的,因为不存在正数 M,使 $|\frac{1}{x}|\leqslant M$ 对于 $(0,1)$ 内的一切 x 都成立.

2.函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 D 上有定义,如果对于区间 D 内任意两点 x_1, x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),就称函数 $f(x)$ 在区间 D 上单调增加,如图 1-3(a)所示(或单调减少,如图 1-3(b)所示).单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

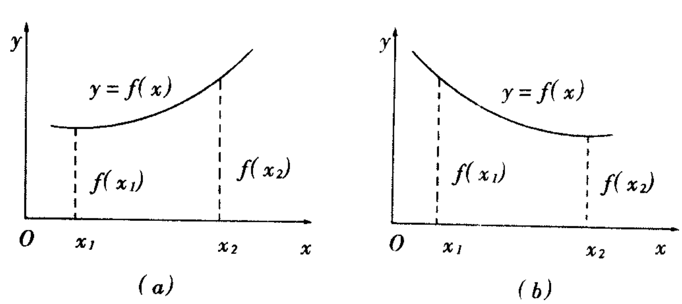


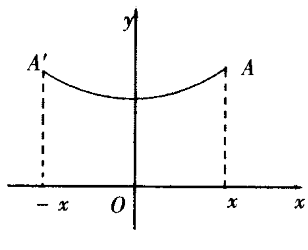
图 1-3

例如,函数 $y=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 内单调增加,在 $(-\infty,0]$ 内单调减少.又如 $y=x^3$ 在

$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的.

3.函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$的定义域 D 关于原点对称.如果对于任何 $x\in D$,都有 $f(-x)=f(x)$(或$f(-x)=-f(x)$),则称 $f(x)$为偶函数(或奇函数).偶函数的图形关于 y 轴对称(如图 1-4(a)所示).奇函数的图形关于原点对称(如图 1-4(b)所示).



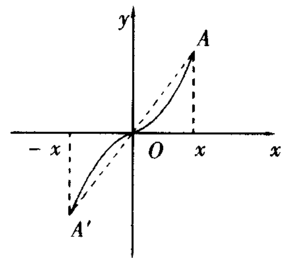


图 1-4

例如,$y=x^2$ 与 $y=\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$上是偶函数,$y=x^3$ 与 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上是奇函数.而 $y=x+\cos x$ 则既非奇函数也非偶函数.

4.函数的周期性

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,如果存在一常数 $T\neq0$,使得对于任何 $x\in D$,有$(x\pm T)\in D$,且 $f(x\pm T)=f(x)$,则称 $f(x)$为周期函数,T 称为$f(x)$的周期.周期函数的周期通常是指它的最小正周期.周期为 T 的函数,在其定义域内间隔为 T 的区间上,函数图形有相同的形状(如图 1-5 所示).

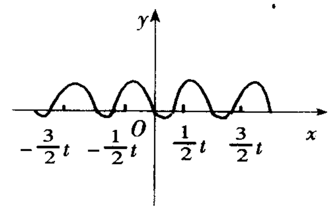


图 1-5

例如,函数 $y=\sin x$,$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数.

四、建立函数关系应用举例

例 16 设有一块边长为 a 的正方形薄板,将它的四角剪去边长相等的小正方形制作一只无盖盒子,试将盒子的体积表示成小正方形边长的函数(如图 1-6 所示).

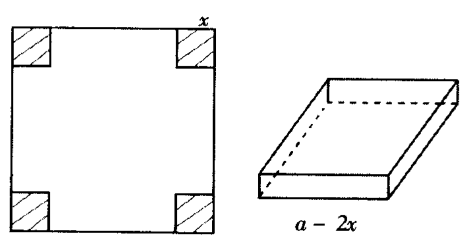


图 1-6

解 设剪去的小正方形的边长为 x,盒子的体积为 V.则盒子的底面积为$(a-2x)^2$,高为 x,因此所求的函数关系为

$$V=x(a-2x)^2,x\in(0,\frac{a}{2}).$$

例 17 在直线 $y=x$,$y=2-x$ 及x 轴所围的等腰三角形底边上任取一点 $x\in[0,2]$,过 x 作垂直 x 轴的直线,如图 1-7所示,将图上阴影部分的面积表示成 x 的函数.

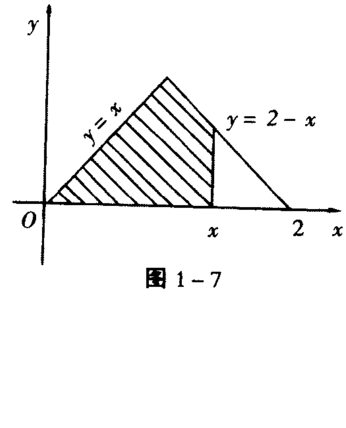


图 1-7

解 设阴影部分的面积为 A,当 $x\in[0,1)$时,

$$A=\frac{1}{2}x^2,$$

当 $x\in[1,2]$时，

$$A=1-\frac{1}{2}(2-x)^2.$$

所以

$$A=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2 & x\in[0,1),\\ 2x-\frac{1}{2}x^2-1 & x\in[1,2].\end{cases}$$

例 18 圆的内接正多边形中(如图 1-8 所示),当边数改变时，正多边形的面积也改变,试求这两个变量之间的函数关系.

解 设圆的半径为 R,其内接正多边形的边数为 $n(n\geqslant3)$,正多边形的面积用 A_n 表示.若把各顶点与圆心联结起来,则得 n 个全等的等腰三角形.任取一个,如 ΔOPQ,则 ΔOPQ 的面积为$\frac{1}{2}\cdot R\cdot h=\frac{1}{2}R\cdot(R\cdot\sin\frac{2\pi}{n})$,因此,所求函数关系为

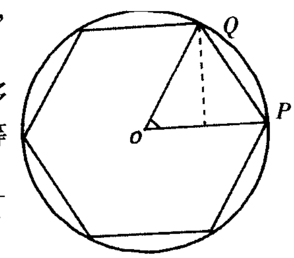


图 1-8

$$A_n=\frac{n}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{n}\qquad(n=3,4,5\cdots)$$

例 19 某厂生产某产品 1000 吨,每吨定价为 130 元,销售量在 700 吨以内时,按原价出售;超过 700 吨时,超过部分按九折出售,试求销售收入与销售量之间的关系.

解 设销售量为 x,销售收入为 y,显然,当$0\leqslant x\leqslant700$ 时,$y=130x$;当 $700<x\leqslant1000$ 时,收入由两部分组成:700 吨的收入为 130×700,超过 700 吨的部分的收入为 $130\times0.9(x-700)$.所以 y 与 x 之间构成如下的函数

$$y=\begin{cases}130x & 0\leqslant x\leqslant700,\\ 130[700+0.9(x-700)] & 700<x\leqslant1000.\end{cases}$$

习 题 1-1

1.指出下列函数哪些是同一函数:

(1)$f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x+3}$与 $g(x)=x-1$;　　(2)$f(x)=\lg x^3$ 与 $g(x)=3\lg x$;

(3)$f(x)=\lg x10$ 与 $g(x)=10\lg x$;　　(4)$f(x)=(1-\cos^2x)^{\frac{1}{2}}$ 与 $g(x)=\sin x$.

2.求下列函数定义域:

(1)$y=\frac{1}{4-x^2}-\sqrt{x+3}$;　　(2)$y=\arcsin\frac{x-1}{2}$;

(3)$y=10^{\frac{1}{x}}$;　　(4)$y=\sqrt{5-x}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2x}$;

(5)$y=\frac{1}{\sqrt{x+2}}+\sqrt{x(x-1)}$;　　(6)$y=\lg\sin x$;

(7)$y=\begin{cases}-x, & -1\leqslant x\leqslant0,\\ \sqrt{3-x}, & 0<x<2.\end{cases}$

3.求 $y=f(\lg x)$的定义域,其中 $f(u)$的定义域为$(0,1)$

4.判断下列函数的奇偶性：

(1) $y=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$；

(2) $y=\frac{a^x+1}{a^x-1},(a>0)$；

(3) $y=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0;\end{cases}$

(4) $y=\begin{cases}-x, & x<-1,\\ 1, & |x|\leqslant 1,\\ x, & x>1.\end{cases}$

5.判断下列函数的单调性：

(1) $y=2^x$；

(2) $y=3^{-x}$；

(3) $y=\lg x$；

(4) $y=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\frac{\pi}{2},\\ 2-|x|, & |x|>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

6.求下列函数的反函数：

(1) $f(x)=x^2$；

(2) $f(x)=2^x+1$；

(3) $f(x)=1+2\sin\frac{x-1}{x+1}$.

7.下列函数中哪些是周期函数？如果是周期函数，指出其周期：

(1) $y=\cos 2x$；

(2) $y=\sin x^2$；

(3) $y=\sin 2x+\cos\frac{x}{2}$；

(4) $y=\sin x+\cos x$.

8.设 $f(x)=2x^2+2x-4$，求 $f(1),f(x^3),f(a)+f(b)$.

9.设 $f(x)=\begin{cases}2+x, & x\leqslant 0,\\ 2^x, & x>0,\end{cases}$ 求 $f(x)-f(0)$.

10.已知 $f(x)$ 是二次多项式，且 $f(x+1)-f(x)=8x+3$，求 $f(x)$ 的表达式.

11.求函数 $f(x)=\frac{1}{x(x-3)(x+7)}$ 的有界区间.

12.指出下列复合函数的复合过程：

(1) $y=\cos 5x$；

(2) $y=A\sin^2(\omega x+\phi)$，其中 A、ω、ϕ 为常数；

(3) $y=e^{\sin 3x}$；

(4) $y=a^{1-x}$；

(5) $y=\lg(\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2})$.

13.设 $f(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ x+1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f(x+1),f(x-1)$.

14.火车站收取行李费的规定如下：当行李不超过 50 千克时，按基本运费计算，如从上海到某地每千克收 0.30 元，当超过 50 千克时，超重部分按每千克 0.45 元收费.试求上海到该地的行李费 y(元)与重量 x(千克)之间的函数关系式，并画出这函数的图形.

15.某公共汽车运行路线全长 20 公里，票价规定如下：乘坐 4 公里以下者收费 1 角，乘坐 4～10 公里收费 2 角，10 公里以上收费 3 角，试建立票价与路程的函数关系，并作图.

16.用铁皮做一个容积为 V 的圆柱体罐头.试将它的表面积表示成底面半径的函数，并确定此函数的定义域.

17.甲船以每小时 20 海里的速度向东行驶，同一时间乙船在甲船正北 80 海里处以每小时 15 海里的速度向南行驶，试将两船间的距离表示成时间的函数.

18.某工厂生产某产品，每日最多生产 100 单位.它的日固定成本为 130，生产一个单位产品可变成本为 6 元，求该厂日总成本函数及平均单位成本函数.(注：日总成本为固定成本与可变成本之和).

19.有一抛物线拱形桥，跨度 20 米，高为 4 米，选择适当的坐标系，把拱形上的点的坐标表示成横坐标 x

的函数.

20.将一块半径为 a,中心角为 θ 的扇形铁片,围成一圆锥形容器.试将此容器的容积表示成中心角 θ 的函数.

21.作出下列函数的图形:

(1) $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ x^2-1, & x<0;\end{cases}$　　(2) $y=|x|$.

第二节　数列的极限

定义　设函数 $u_n=f(n)$,其中 n 为正整数,那么按自变量 n 增大的顺序排列的一串数 $f(1),f(2),f(3),\cdots,f(n),\cdots$,称为数列,记作 $\{f(n)\}$ 或 $\{u_n\}$,其中 u_n 称为第 n 项或通项.

数列的有界性、单调性定义与函数的相应定义基本一致.即若存在一个常数 $M>0$,使得 $|u_n|\leqslant M(n=1,2,\cdots)$ 恒成立,则称数列 $\{u_n\}$ 为有界数列,或称该数列有界;若数列 $\{u_n\}$ 满足条件 $u_n\leqslant u_{n+1}(n=1,2,\cdots)$ 或 $u_n\geqslant u_{n+1}(n=1,2,\cdots)$,则分别称 $\{u_n\}$ 为单调递增数列或单调递减数列.单调递增数列和单调递减数列统称单调数列.

例如:

$$\{u_n\}:2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\cdots,1+\frac{1}{n},\cdots$$

为单调递减数列,且是有界的;

$$\{u_n\}:0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,1-\frac{1}{n},\cdots$$

是单调递增数列,也是有界的;

$$\{u_n\}:1,-1,1,\cdots,(-1)^{n-1},\cdots$$

是有界数列,但不单调;

$$\{u_n\}:1,4,9,\cdots,n^2,\cdots$$

是单调递增且无界的数列;

$$\{u_n\}:-1,-2,-3,\cdots,-n,\cdots$$

是单调递减且无界的数列;

$$\{u_n\}:-1,2,-3,4,\cdots,(-1)^n n,\cdots$$

既不是单调又不是有界的数列.

数列的变化趋势即极限问题可定义如下:

定义　设数列 $\{u_n\}$ 和常数 A,若对于任意给定的正数 ε,总存在一个自然数 N,使得当 $n\geqslant N$ 时,都有

$$|u_n-A|<\varepsilon$$

则称 A 为数列 $\{u_n\}$ 的极限,或称数列收敛于 A,记为:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=A \text{ 或 } u_n\to A \quad (n\to+\infty).$$

极限存在的数列称为收敛数列,极限不存在的数列称为发散数列.

数列极限的几何意义：

将数列的项 x_n 用数轴上的对应点表示，对于任给的 $\varepsilon>0$，因 $|x_n-A|<\varepsilon$ 即 $A-\varepsilon<x_n<A+\varepsilon$，所以数列 $\{x_n\}$ 以 A 为极限的几何意义就是对于任意给定的正数 ε，总可以找到相应的 N，使得从 $N+1$ 项开始，后面所有的项都落在以 A 为中心，ε 为半径的开区间 $(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$ 内（如图 1－9 所示），而开区间外，至多只有有限项 $x_1,\cdots,x_N$.

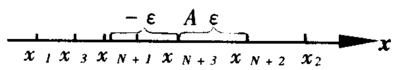


图 1－9

例 1 验证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$.

分析 $x_n=\dfrac{1}{2^n}$，对于任给的 $\varepsilon>0$，由于 $|x_n-A|=\left|\dfrac{1}{2^n}-0\right|=\dfrac{1}{2^n}$，要使 $|x_n-A|=\dfrac{1}{2^n}<\varepsilon$，即 $2^n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，只要 $n>\log_2\dfrac{1}{\varepsilon}$ 即可，故可取 N 为大于 $\log_2\dfrac{1}{\varepsilon}$ 的正整数.

证 对于任给的 $\varepsilon>0$，取正整数 $N>\log_2\dfrac{1}{\varepsilon}$，当 $n>N$ 时，不等式 $\left|\dfrac{1}{2^n}-0\right|=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n<\left(\dfrac{1}{2}\right)^N\leqslant\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_2\frac{1}{\varepsilon}}=\varepsilon$ 总成立，由极限定义有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$.

例 2 说明数列 $\{n^2\}$，$\left\{\cos\dfrac{n\pi}{2}\right\}$ 是发散数列.

解 因为数列 $\{n^2\}$ 当 $n\to+\infty$ 时的值无限变大，所以该数列发散.

因为数列 $\left\{\cos\dfrac{n\pi}{2}\right\}$ 各项值依次为：

$$0,-1,0,1,\cdots$$

即 $n\to+\infty$ 时它不趋向于一个确定的常数，故该数列发散.

数列 $\left\{\cos\dfrac{n\pi}{2}\right\}$ 发散这个事实说明：有界数列不一定收敛，但它们之间还是有一定的联系，请看下面的定理.

定理 若数列收敛则数列有界.

证 不妨设 $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=A$，则对于一个给定正数 ε_0，一定存在一个自然数 N，当 $n>N$ 时，恒有 $|u_n-A|<\varepsilon_0$. 即有 $A-\varepsilon_0<u_n<A+\varepsilon_0$，在 $u_1,u_2,\cdots,u_N,A-\varepsilon_0,A+\varepsilon_0$ 中取一个绝对值最大作为 M，即 $M=\max\{|u_1|,|u_2|,\cdots,|u_N|,|A-\varepsilon_0|,|A+\varepsilon_0|\}$，即有 $|u_n|\leqslant M$. 因而数列 $\{u_n\}$ 有界.

最后我们不加证明地给出关于数列收敛的一个充分条件.

定理 单调有界数列一定收敛.

这个定理的直观意义是明显的，比如单调递增数列，当 n 增大时，它在数轴上的对应点不会向左移动，而又不会超过某一定点，因此当 n 充分大时所有的点都会在某一定点的充分小的邻域的左侧.

习 题 1－2

1.观察下列数列的变化趋势,哪些数列收敛?其极限为何?哪些数列发散?

(1) $x_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$; (2) $n_n=\dfrac{n+1}{2n-1}$;

(3) $x_n=(-1)^n\cdot n$; (4) $x_n=n\cdot\sin\dfrac{n\pi}{2}$;

(5) $x_n=\dfrac{n^2-1}{(n+2)(n+3)}$.

2.用定义证明下列极限:

(1) $\lim\dfrac{3n+1}{2n}=\dfrac{3}{2}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{3})^n=0$.

3.用极限定义证明下列数列的极限,并说明 n 应从何值开始,才能使数列的一般项与其极限值之差的绝对值小于 10^{-4}.

(1) $x_n=\dfrac{2n-1}{3n+1}\to\dfrac{2}{3}\quad(n\to\infty)$; (2) $x_n=\dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{\sqrt{n}}\to0\quad(n\to\infty)$.

第三节 函数的极限

一、$x\to\infty$ 时函数的极限

先看一个例子,考察函数 $f(x)=\dfrac{x+1}{x}(x\neq0)$,可以看到当 $|x|$ 无限增大时,对应的函数值 $f(x)=\dfrac{x+1}{x}=1+\dfrac{1}{x}$ 无限接近于常数 1.一般地如果当 $|x|$ 无限增大时(记为 $x\to\infty$),对应的函数值 $f(x)$ 无限地接近于某常数 A,则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限,$x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限可看做数列 $x_n=f(n)$ 当 $n\to\infty$ 时的极限的推广,下面给出 $x\to\infty$ 时函数极限的精确定义.

定义 设函数 $f(x)$ 对充分大的 $|x|$ 有定义,A 是一个常数,如果对于任意给定的正数 ε 总存在正数 X,使得对于满足 $|x|>X$ 的一切 x,都有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限,记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\qquad(x\to\infty)$$

如果 $x>0$ 且无限增大(记为 $x\to+\infty$),只要把定义中的 $|x|>X$ 改为 $x>X$,就可得出 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 的定义;类似的,如果 $x<0$ 且绝对值无限增大(记为 $x\to-\infty$),只要把 $|x|>X$ 改为 $x<-X$,就可得出 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 的定义.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的几何意义:

对于任意给定的 $\varepsilon>0$,当 x 落在区间 $(-\infty,-X)$ 及 $(X,+\infty)$ 之内时,曲线 $y=f(x)$ 上的点都位于平行直线 $y=A+\varepsilon$ 与 $y=A-\varepsilon$ 所围成的带形区域内(图 1－10).