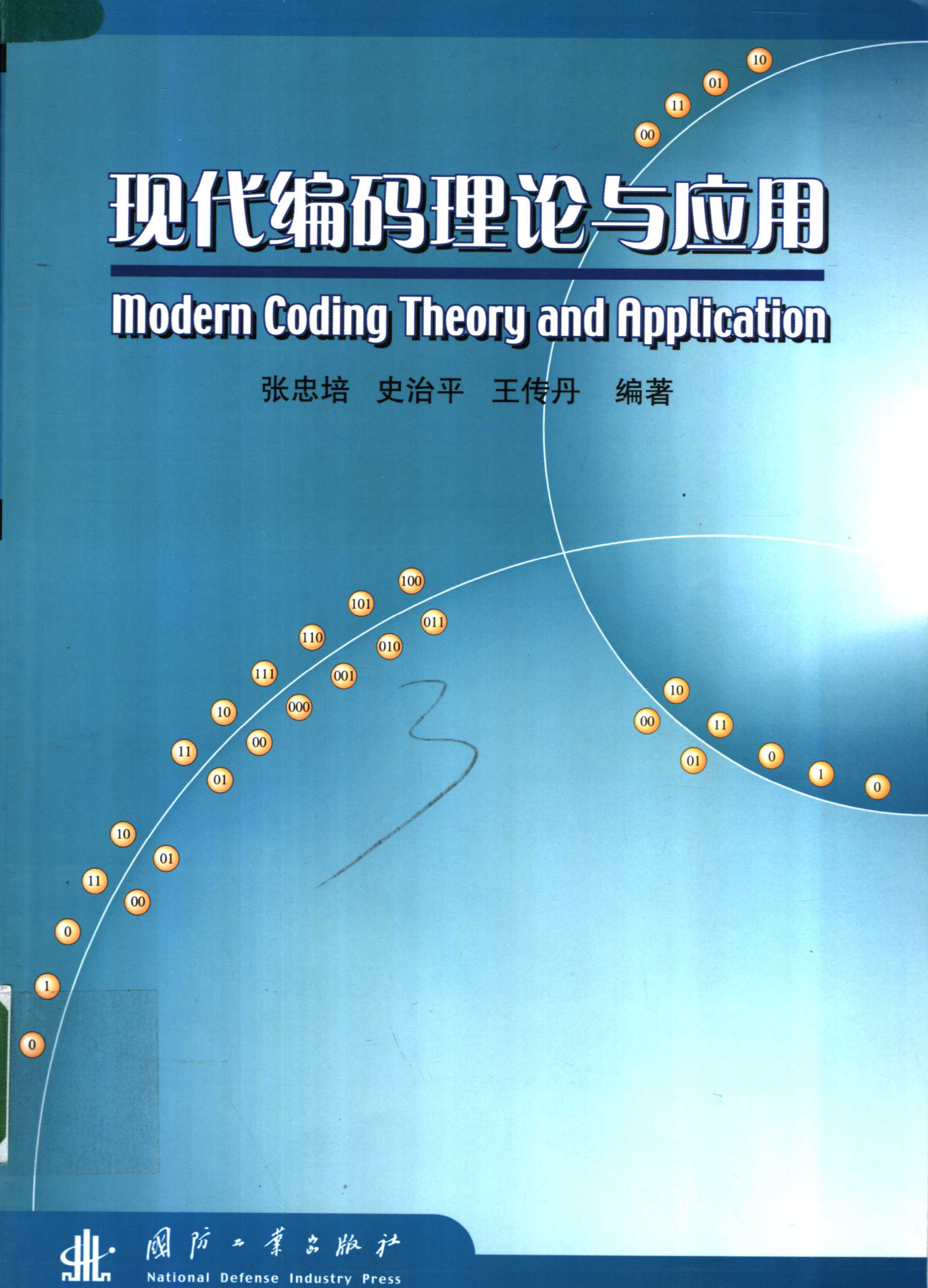

现代编码理论与应用

Modern Coding Theory and Application

张忠培　史治平　王传丹　编著

国防工业出版社
National Defense Industry Press

现代编码理论与应用

Modern Coding Theory and Application

张忠培　史治平　王传丹　编著

国防工业出版社

·北京·

内容简介

自 1993 年 Turbo 码出现以来，信道编码技术进入了一个崭新的时代。1996 年通过低密度奇偶校验码再发现，接近香农容量限的信道编码引起了通信与编码界的广泛研究。本书旨在展示近几年来信道编码技术的革命性变革与最新进展，这些创新性成果与经典的编码有着本质区别，经浓缩提炼为现代编码理论。本书给出了现代编码理论的整体框架与在通信系统中的具体应用，共 12 章，分别介绍了信道编码的基本原理和现代编码的基本概念；与信道编码紧密相连的信道容量；现代编码的理论基础因子图与和积算法；近几年来三大主流编码的基本编译码方法（Turbo 码、LPDC 码和类 Turbo 码）；基于置信传播算法的 Turbo 译码；码的优化设计及性能分析；现代编码理论在通信系统中的应用和现代编码在通信标准中的应用；现代编码的 FPGA 设计与实现。

本书在编写时考虑了各种读者的需求，读者可以通读，也可以根据需要选择性的阅读。

本书适用于大专院校信息类各专业本科高年级学生、研究生、教师以及从事信道编码、通信系统设计、通信信息处理等研究领域的科研及工程人员。

图书在版编目(CIP)数据

现代编码理论与应用/张忠培，史治平，王传丹编著.
北京：国防工业出版社，2007.1
ISBN 7-118-04854-2

Ⅰ.现… Ⅱ.①张…②史…③王… Ⅲ.编码理论 Ⅳ.0157.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 134759 号

※

国防工业出版社出版发行
（北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100044）
涿中印刷厂印刷
新华书店经售
*
开本 787×1092 1/16 印张 18¾ 字数 428 千字
2007 年 1 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—4000 册 定价 32.00 元

（本书如有印装错误，我社负责调换）

国防书店：(010)68428422 发行邮购：(010)68414474
发行传真：(010)68411535 发行业务：(010)68472764

序　言

1948年香农(shannon)在他的开创性论文《通信中的数学理论》中,首次阐明了在有扰信道中实现可靠通信的方法,提出了著明的有扰信道编码定理,是纠错码的奠基石。至今接近60年的发展,人们一直在追求达到香农限的好码。随着信息时代的到来及飞速发展,今天的纠错编码不单是一个理论问题,它已成为现代通信领域不可缺少的一项标准技术。通信系统要求实现对话音、数据以及图像等大量数据信息量实现高速实时传输,都离不开高效的纠错编码。

在1993年的国际会议(ICC'93)上,法国不列颠通信大学的C.Berrou教授等人提出的Turbo码方案,由于很好地应用于了香农信道编码定理中的随机性编译码条件而获得到了接近香农理论极限的译码性能,在编码界引起了轰动,成为自信息论提出以来最重大的研究进展。特别是它的迭代译码思想,广泛应用于通信信号检测技术,如迭代多用户检测、迭代均衡、迭代信道估计等。

1996年,英国的Mackay教授"再发现"了1962年由美国的Gallager教授提出的低密度校验(LDPC)码,在高斯信道下,引人因子图的概率和基于置信传播的和积算法,1/2码率的二元LDPC码与香农限只差0.0045dB。Turbo码及LDPC码的发展,极大地刺激了信道编码研究工作的兴趣,使人们开始从新的思路与数学工具去寻找和解释接近香农的好码。经过最近10多年的发展,一些新的编译码理论与方法日渐成熟,本书试图将这些新提出的编码码字之间的关系与内在联系,用现代编码理论来统一整个新的编码理论框架。本书的主要目的是想通过现代编码理论来统一信道编码,以及基于现代编码理论在通信系统中的应用,为通信系统的接收机设计、信道估计等找出新方法。由于作者水平有限,这种统一方法难免还有些不恰当之处,希望能起一个抛砖引玉的作用,同时希望各位同行批评指正。

现代编码理论是MIT的G.David Forney,Jr.教授在2004年首次提出的概念,试图从概率论与因子图为工具来统一编码理论,提出了现代编码理论的三大特征,即基于信息传递的和积算法、因子图和信道输出软信息的利用,而将以前基于代数方法的编译码称之为经典编码。现在国外已有一本与本书内容相近的书——*modern coding theory*,由T.Richardson,R.Urbanke两人合写,但还没正式出版,整个书的内容较深,很难用于国内一般读者。本书在编写中参考了*modern coding theory*的一些章节组织方法,但具体内容不相同。

本书共分12章,第1章和第2章介绍编码理论基础,也给出了编码理论的基本概念。使没有学过信道编码的读者也能读懂本书。第3章和第4章是现代编码理论基础,介绍了因子图以及和积算法;第5章介绍了Turbo码和Turbo码的编译码方法;第6章介绍了

LDPC码的编译码方法，是因子图与和积算法的具体应用；第7章介绍了类Turbo码，主要是重复累积码以及它的变形，是一种性能与Turbo码非常接近、而编译码更为灵活的编码方案；第8章介绍了基于信息传播算法的Turbo译码；第9章介绍了码的优化设计及性能分析；第10章讨论了现代编码理论在通信系统设计中的应用，给出了基于因子图的迭代接收机的统一框架、迭代信道估计方法以及在符号间干扰信道中的因子图的处理方法；第11章介绍了现代编码在通信标准中的应用；第12章介绍了现代编码的FPGA的设计与实现。

本书充分反映了现代编码领域最有实际意义的研究成果与最新的研究进展，不仅对读者的工程实践有直接的帮助，还有助于他们了解该领域的前沿课题，为进一步深入研究打下基础。同时，在本书的写作中，照顾了不同读者的需要，尽量让各个部分都自成体系，读者可以根据自己的需要选择部分章节读取，不会影响对问题的理解。

在本书的编写过程中，参考了国内外有关的现代编码理论相关的众多文献，特别是国内外的研究生学位论文，对某些内容进行了较好的综述与算法阐述，所有参考过的论文在每一章的参考文献中都已列出。在此对所有参阅与引用了的文献与论文作者表示衷心感谢！

本书的第2章、第6章、第7章、第8章、第10章由张忠培博士编写，第1章、第3章、第4章、第6章、第9章由史治平博士编写，第11章、第12章由王传丹博士生编写，全书由张忠培博士统稿。另外抗干扰重点实验室的硕士生：晏辉、马晶、尹元勇、赵聪、张博、崔炳华、周晔等对本书的完成做了一定的仿真、编排、画图及整理校对工作。感谢文红博士对本书的体系结构提出了有益的建议，本书在编写中得到她的大力支持！最后还要感谢国防工业出版社，没有他们的大力支持和辛勤工作，本书就没有机会与广大读者见面。

由于作者水平有限，错误、遗漏之处在所难免，恳请专家和读者批评指正。

目　录

第1章 绪 论

信道编码是编码理论的重要组成部分，在计算机科学与通信领域有着重要的应用价值。特别是近几年信道编码的发展，具有里程碑的意义，在通信领域与编码界引起了广泛的研究兴趣。为了对近几年信道编码取得的成果进行研究，与经典的或传统的编码理论相区别，人们提出了现代编码的概念。本章是现代编码理论的绪论，深入浅出地阐述了信道编码的基本概念和基本原理，如速率(码率)与错误率、最大后验概率译码与最大似然译码、编码复杂度以及信道编码定理等；其次介绍了信道编码的分类和纠错编码技术的发展过程；最后给出现代编码的概念，通过基于图的线性分组码的基本编译码方法阐述了现代编码的基本特征。通过本章的介绍，能够使读者通过对信道编码的基本原理、分类、发展过程的深入理解，对经典编码与现代编码建立初步的认识。

1.1 信 道 编 码

1.1.1 编码及其应用

编码学是应用数学、计算机和通信技术的交叉学科，在科学领域中，起着重要的作用。例如，在数学上，它促进了格的发展；在计算机领域中，基于编码的公共密钥体系解决了大量用户的安全通信问题；在通信领域中，基于编码的信源表示(即信源编码)节省了信道资源；信道编码(纠错编码)可以对抗信道噪声，降低发射功率，减小多用户间的干扰等。根据不同的编码属性，产生了不同的编码应用。因此，编码理论(coding theory)主要包括以下三方面的内容：

(1) 以保证数字信息传输和处理的可靠性为目的的差错控制编码(error - control coding)，又称为信道编码(channel coding)；

(2) 以提高数字信息传输、存储处理的有效性为宗旨的信源编码(source coding)；

(3) 以增加数字信息传输、存储的安全性为目标的数据加密编码(data encryption)；

这三方面内容与通信系统的三大关键问题，即可靠性、有效性和安全性是相对应的。

差错控制编码技术类别繁多，应用面广，在上述三类编码中占有较大的比例。因此通常使用的编码这一术语，常常指差错控制编码译码技术。

本书只考虑信道编码，信道编码的目的是在一个有噪声干扰的信道上，以尽可能高的准确性、以尽可能低的复杂度、最大限度地接近香农(Shannon)量限来进行信息传输。

1.1.2 通信与编码

通信的目的是要把对方不知道的消息及时可靠地传送给对方。图 1.1 是基本的点对点通信模型。信源就是发送方发送的话音、图像等数据，信宿就是指接收方接收到的数

据。信源通过有噪信道传输后到达接收方(信宿)。一个有效的通信系统总是希望这种传输是可靠的，而且希望接收方以最小的误差来重建发送的信息，这就是通信的可靠性。

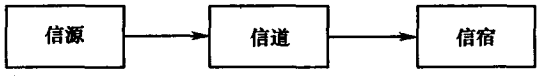

图 1.1　基本的点对点通信模型

香农在 1948 年发表的重要论文中，系统阐述了这个问题，并且指出点对点通信问题可以分解为独立的两部分，如图 1.2 所示。首先发送方信源编码器将信息进行编码，形成比特流；理想情况下，信源编码器应该在保持足够准确度的前提下，尽量去除掉原信息中的冗余，而用最少的比特来表示出该信息。接下来信道编码器对比特流进行编码，添加上一些冗余比特，这些冗余比特经过仔细选择，使得比特在传输时能够最大限度地对抗信道干扰。

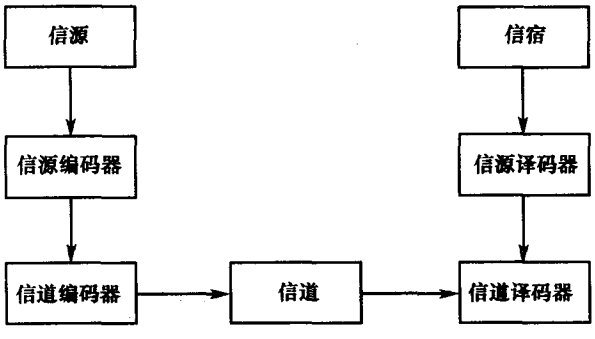

图 1.2　信源—信道点对点通信基本模型

如果用数学语言来描述这个模型，将发送方所发出的信息看做一个马尔可夫过程(比如，可以将一篇文章用马尔可夫链来描述各个字母间的相互关联)，那么信源编码器的任务就是在给定最高失真度的前提下，用尽可能少的比特来表示出这篇文章。失真度由用户自己选择决定，它反映了表示后的比特相对于原文的失真程度。如果信源发送出来的是二进制比特流，那失真度就可通过计算信源编码后的比特流同原比特流 0 和 1 不同的数目来求得。接下来，就由信道编码器给这些比特流加上一些冗余比特，以对抗信道中的随机干扰。在本书中，我们都把信道视为随机过程，所以关心的是其统计特性。

香农的信道编码定理指出：存在一个最大信息传输量，称为信道容量，用 C 表示，如果传输速率 $R(d) < C$，那么信息就可以在接收端以不超过最大失真度 d 的性能重建；否则，再没有更好的传输方案。信源—信道独立考虑的好处在于一条通信链路可服务于多种信源，也就是说一个好的信道编码方案可同时服务于多类信源。因此香农不仅提出了关键的编码定理，而且还架构了整个通信理论和通信模型。所以说香农是通信理论和编码理论的奠基人。

本书是在假设信息已经过理想的信源编码，得到等概率的、相互独立 0 和 1 比特流的情况下讨论信道编码的。

1.1.3 速率与错误率

经过上面的阐述，知道通过在原信息上增加冗余比特，能够实现一定速率下有噪信道的可靠传输，可靠性一般通过接收错误率来衡量。增加冗余比特虽然提高了通信的可靠性，但是它也降低了信息的传输速率。因此，速率与错误率是一对相互制约的量。下面以二进制对称信道为例，介绍速率与错误率的关系。

图 1.3 是 BSC 信道概率转移模型。用 BSC(ε)表示错误概率(或转移概率)为 ε 的二进制对称信道。对这一信道，输入 x_t 和输出 Y_t 均为 ±1(照惯例，用小写字母代表输入，因为它可以是确定的；用大写的代表输出，因为它经常是一个随机变量)。比特经过传输后，在输出端要么被正确接收，要么以概率 ε 被错误接收。不失一般性，假定比特之间是相互独立的，$0 < \varepsilon < 1/2$。BSC(ε)信道，可以看做二进制无记忆信道上接收端为硬判决时的一种特殊情况。

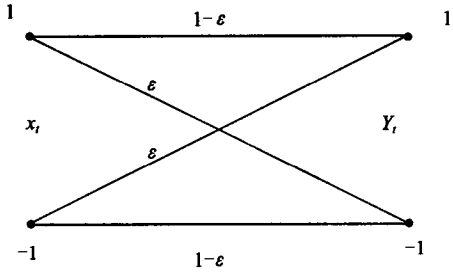

图 1.3 BSC 信道概率转移模型

首先考虑未经编码的比特在 BSC(ε)信道上传输的情况，也就是说，对信源比特流不添加冗余比特就放到信道上进行传输。在接收端，使用最佳估计器 $\hat{x}^{\mathrm{MAP}}(y) \triangleq \arg\max_{x\in\{\pm1\}} p_{X|Y}(x|y)$，根据 Y 来估计传输的 X。由于比特等概率发送，且 $\varepsilon < 1/2$，则 $\hat{x}^{\mathrm{MAP}}(y) = y$，故估计错误概率 $P_{\mathrm{b}} \triangleq P\{\hat{x}^{\mathrm{MAP}}(Y) \neq X\}$ 等于 ε，所以得到无信道编码的(速率，误比特率)对(1，ε)。

当错误率太大时，需要采取编码方法来降低错误率，最简单的方案就是重复编码。假设每个比特重传 k 次，简单起见，假设 k 为奇数。所以一个待传比特 x，在放入 BSC(ε)信道进行传输的时候，就成了 k 重 $x \ldots x_k$。将接收端表示成 $Y_1 \cdots Y_k$。

那么最佳估计器的大数判决原则为 $\hat{x}^{\mathrm{MAP}}(y_1, \ldots, y_k) = \{y_1, \ldots, y_k\}$ 的大多数，所以误比特率为

$$P_{\mathrm{b}} = P\{\hat{x}^{\mathrm{MAP}}(Y) \neq X\}^k \overset{\text{odd}}{=\!=} P\{\text{至少}\lceil k/2\rceil\text{个错误}\} = \sum_{i>k/2}\binom{k}{i}\varepsilon^i(1-\varepsilon)^{k-i} \tag{1.1}$$

所以通过码字的重复传输，得到(速率，误比特率)对为 $\left(\frac{1}{k}, \sum_{i>k/2}\binom{k}{i}\varepsilon^i(1-\varepsilon)^{k-i}\right)$。为了使 P_{b} 趋于零，k 必须取很大，结果，速率也接近于零。

1.1.4 信道编码的基本概念

下面是信道编码中的一些基本概念。

定义 1.1 码：$\mathbb{F}$ 域上长度为 n、码字个数为 M 的码是集合 $\mathbb{F}^n$ 的一个子集，也就是说

$$C(n, M) \triangleq \{x^{[1]}, \ldots, x^{[M]}\}, x^{[i]} \in \mathbb{F}^n, 1 \leqslant i \leqslant M$$

其中，码集合中的每一个元素称为码字。

例:设$\mathbb{F}=\mathbb{F}_2$,二进制,那么 $C(n=3,M=2)=\{000,111\}$称为重复码。000 和 111 分别称为码字。

定义 1.2 速率:$C(n,M)$的编码速率(信息符号和传输符号之比)为 $r\triangleq\frac{1}{n}\log_{|\mathbb{F}|}M$。

例:设$\mathbb{F}=\mathbb{F}_2$,有 $r(C(3,2))=\frac{1}{3}\log_2 2=\frac{1}{3}$。

定义 1.3 汉明(Hamming)重量和汉明距离:设 $u,v\in\mathbb{F}^n$,一个码字 u 的汉明重量记为 $w(u)$,等于该码字非 0 符号的个数。(u,v)的汉明距离记为 $d(u,v)$,是 u 和 v 之间不同符号的个数。另外汉明距离和汉明重量具有以下性质:

$d(u,v)=d(u-v,0)=w(u-v)$

$d(u,v)=d(v,u),d(u,v)\geqslant 0$,当且仅当 $u=v$ 时,等号成立。

$d(\cdot,\cdot)$满足三角形不等式

$$d(u,v)\leqslant d(u,t)+d(t,v) \tag{1.2}$$

式中:u,v,t 是满足 $u,v,t\in\mathbb{F}^n$ 的任意三个元素。

定义 1.4 码字的最小距离:设 C 为一码,其最小距离 $d(C)$定义为

$$d(C)\triangleq\min\{d(u,v):u,v\in C,u\neq v\} \tag{1.3}$$

设 $x\in\mathbb{F}^n$,一个半径为 $t\in\mathbb{N}$、以 x 为球心的球体是集合$\mathbb{F}^n$中所有与 x 的距离不超过 t 的元素的集合。如果,一个码字的最小距离为 d,那么以半径 $t\triangleq\left[\frac{d-1}{2}\right]$在每个码字周围画圆,则这些圆之间互不相交。

半径 t 是经典编码理论中非常重要的参数,也是着重构造具有最大、最小距离码的主要原因。假设码 $C(n,M,d)$通过 BSC(ε)信道进行传输,译码器的有限距离为 t,也就是说,收到 y 以后,译码器选择满足下列条件的 $\hat{x}^{\mathrm{BD}}(y)$作为输出,即

$$\hat{x}^{\mathrm{BD}}(y)\triangleq\begin{cases}x\in C, & \text{如果 } d(x,y)\leqslant t \text{ 及 } d(x',y)>t,\forall\, x'\in C\setminus\{x\}\\ \text{错误} & \text{其他}\end{cases}$$

这里错误表示译码器宣布它无法进行解码。这样的结构使得译码器能够正确纠正所有重量小于或等于 t 的码字错误,所以,t 越大,则意味着纠错能力越强。

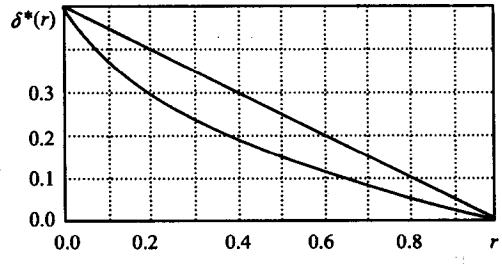

图 1.4 对于 $\delta^*(r)$的上、下限

但是,t 的取值是与 d 密切相关的。对于二元情况和确定的速率 $r(0<r<1)$,设 $\delta\triangleq d/n$ 为归一化距离,则

$$\delta^*(r)\triangleq\limsup_{n\to\infty}\max\left\{\frac{d(C)}{n}\,\middle|\,C\in C(n,2^{\lfloor nr\rfloor})\right\},h^{-1}(1-r)\leqslant\delta^*(r) \tag{1.4}$$

其中 $h(x) \triangleq -x\log_2(1-x)$为二进制熵函数。对于 $y \in [0,1]$是 $h(x)=y$ 是唯一的,其中 $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$。这个下界称为 Gilbert - Varshamov 界,后来 Elias 又得到一个上界,表示为

$$\delta^*(r) \leqslant 2h^{-1}(1-r)[1-h^{-1}(1-r)] \tag{1.5}$$

但是构造任何意义上的好码都是困难的。1948 年香农的信道编码定理为码的构造指引了一个方向——随机编码。

定义 1.5 香农的随机编码:令$\mathbb{F}$ 固定,考虑一个码集 $C(n,M)$,其长度为 n,维数为 M。把每一个码 $C(n,M)$看做长度为 n 的 M 维向量的有序排列,共有 nM 种自由选择码字的方式,在$|\mathbb{F}|^{nM}$ 下,所有的编码都服从均匀分布。这样选择编码:随机选择码字 $x^{[1]},\dots,x^{[M]}$,使得 $x_j^{[i]}$ 之间相互独立并且在$\mathbb{F}$ 下等概率选择。显然,这样得到的码在很多情况下都是好码。

1.1.5 最大后验概率译码(MAP)与最大似然译码(MLD)

译码器的任务是从受损的信息序列中尽可能正确地恢复原信息。

假设码字 $C(n,M)=\{x^{[1]},\dots,x^{[M]}\}$,在转移概率为 $p_{Y|X}(y|x)$的信道上传输。也就是说,发送方以概率 $p_X(x)$从码集 C 中选择码字 X,$X \in C(n,M)$进行传输,Y 表示接收端的输出信息。那么信道和 Y 决定了输入 X 的概率分布,即 $p_{Y|X}(y|x)$。如果将 Y 译码成$\hat{x}(Y) \in C$,那么错误概率为 $1-p_{X|Y}(\hat{x}(Y)|y)$。所以,为了使错误概率最小化,应选择 $\hat{x}(Y)$使 $p_{X|Y}(\hat{x}(Y)|y)$最大化,这就是最大后验概率译码(Maximum A Posteriori, MAP),表示为

$$\begin{aligned}\hat{x}^{\mathrm{MAP}}(y) &\triangleq \arg\max_{x\in C} p_{X|Y}(x|y) = \\ &\arg\max_{x\in C} p_{Y|X}(y|x)\frac{p_X(x)}{p_Y(y)} = \qquad \text{(由 Bayes 的规则)} \\ &\arg\max_{x\in C} p_{Y|X}(y|x)p_X(x)\end{aligned}$$

这样的译码器能使错误概率最小化。

下面用 $P_B \triangleq P\{\hat{x}^{\mathrm{MAP}}(Y) \neq X\}$来进一步阐述这一点,令 $\Lambda^{[i]}=\{y:\hat{x}^{\mathrm{MAP}}(y)=x^{[i]}\}$为与码字 $x^{[i]}$相关的译码范围,那么$\cup\Lambda^{[i]}=y$,令 $P_B^{[i]}$ 为出错概率,即

$$P_B^{[i]} = P\{\hat{x}(Y) \neq X | X = x^{[i]}\} = 1 - \int_{\Lambda^{[i]}} p_{Y|X}(y|x^{[i]})$$

那么

$$P_B = \sum_{i=1}^{M} p_{X^{[i]}}(x^{[i]})P_B^{[i]} = \sum_{i=1}^{M} p_{X^{[i]}}(x^{[i]})\left[1-\int_{\Lambda^{[i]}} p_{Y|X^{[i]}}(y|x^{[i]})\,\mathrm{d}y\right] =$$

$$1-\sum_{i=1}^{M}\int_{\Lambda^{[i]}} p_{Y|X^{[i]}}(y|x^{[i]})\,p_{X^{[i]}}(x^{[i]})\,\mathrm{d}y$$

所以

$$1-P_B = \sum_{i=1}^{M}\int_{\Lambda^{[i]}} p_{Y|X^{[i]}}(y|x^{[i]})\,p_{X^{[i]}}(x^{[i]})\,\mathrm{d}y =$$

$$\sum_{i=1}^{M}\int_{\Delta^{[i]}} p_{X^{[i]}|Y}(x^{[i]}|y)p_Y(y)\,\mathrm{d}y$$

因此，最大后验概率译码使得错误概率最小化。如果所有码元都等概率传送，也就是说，p_X 相等，那么

$$\hat{x}^{\mathrm{MAP}}(y) = \arg\max_{x\in C} p_{Y|X}(y|x)p_X(x) = \arg\max_{x\in C} p_{Y|X}(y|x) \triangleq \hat{x}^{\mathrm{ML}}(y)$$

等式最右边表示的是最大似然译码(Maximum Likelihood Decoding, MLD)。最大似然译码就是在已知接收序列的条件下使先验概率最大的译码算法，先验概率和后验概率之间的联系可以通过贝叶斯公式建立。所以，对于先验概率相等的情况，MAP 和 MLD 是等效的。

1.1.6 信道编码定理

在如图 1.5 所示的通信模型中，假设对于给定的码 $C(n,M)$，发送方等概率地选择一个码字 $X\in C(n,M)$在 BSC(ε)信道上进行传输，那么，接收端接收到的 Y 可能是错的。接收端以 MAP 准则在观测空间 Y 里对发送的码字进行估计。下面的信道编码定理说明了给定 n 和 M 的前提下，分组错误概率(block error probability) $P_{\mathrm{B}}^{\mathrm{MAP}}(C,\varepsilon) \triangleq P\{\hat{X}^{\mathrm{MAP}} \neq X\}$的变化，设 $\hat{P}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{MAP}}(n,M,\varepsilon)$是 $C\in C(n,M)$最小的 $P_{\mathrm{B}}^{\mathrm{MAP}}(C,\varepsilon)$。

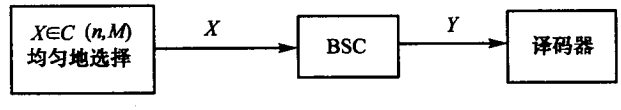

图 1.5 经过 BSC 信道的数据传输

定理 1.1 (香农信道编码定理)如果 $0<r<1-h(\varepsilon)$，那么 $\hat{P}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{MAP}}(n,2^{\lfloor rn\rfloor},\varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0$。

证明：从 $C(n,2^{\lfloor rn\rfloor})$ 中选择一个 C。因为 MAP 译码器很难分析，因此选择次最佳的译码器。对于固定的 Δ，$\Delta>0$，定义 $\rho = n\varepsilon + \sqrt{2n\varepsilon(1-\varepsilon)/\Delta}$，如果 $x^{[i]}$ 是唯一使 $d(y,x^{[i]})\leqslant\rho$ 的码字，那么将 y 译作 $x^{[i]}$；否则，报错。

对于 $u,v\in\{\pm1\}^n$，令

$$f(u,v) \triangleq \begin{cases} 0, & d(u,v)>\rho \\ 1, & d(u,v)\leqslant\rho \end{cases}$$

并且定义

$$g^{[i]}(y) \triangleq 1 - f(x^{[i]},y) + \sum_{j\neq i} f(x^{[i]},y)$$

当 $g^{[i]}(y)$等于零时，$x^{[i]}$是唯一使 $d(y,x^{[i]})\leqslant\rho$ 的码字，因为如果 $x^{[i]}$不是唯一的，那么 $g^{[i]}(y)$起码为 1。设 $P_{\mathrm{B}}^{[i]}$ 表示可能发生的码字错误概率，即

$$X = x^{[i]}$$

$$P_{\mathrm{B}}^{[i]} = P\{\hat{x}(Y)\neq X|X=x^{[i]}\}$$

$$P_{\mathrm{B}}^{[i]}(C,\varepsilon) = \sum_{y:g^{[i]}(y)\geqslant 1} p_{Y|X^{[i]}}(y|x^{[i]}) \leqslant \sum_{y\in\{\pm1\}^n} p_{Y|X^{[i]}}(y|x^{[i]})\,g^{[i]}(y) =$$