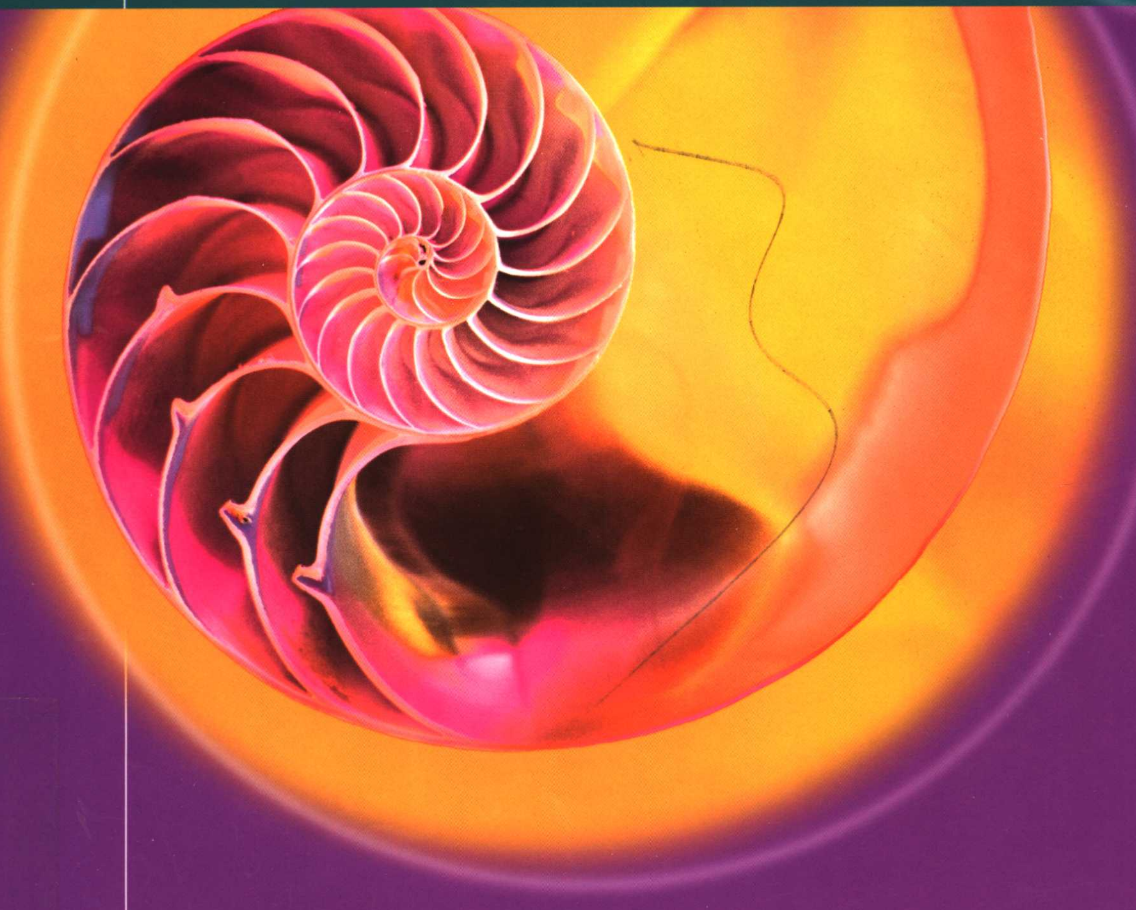
■ 高等学校理工科数学类规划教材

# 复变函数

FUNCTIONS OF COMPLEX VARIABLES

大连理工大学应用数学系 组编



大连理工大学出版社

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

■ 高等学校理工科数学类规划教材

# 复变函数

# FUNCTIONS OF COMPLEX VARIABLES

大连理工大学应用数学系 组编
刘西民 卢玉峰 陈明罡 编著

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

**图书在版编目(CIP)数据**

复变函数/大连理工大学应用数学系组编. —大连:大连理工大学出版社,2007.2
高等学校理工科数学类规划教材
ISBN 978-7-5611-3434-4

Ⅰ.复… Ⅱ.大… Ⅲ.复变函数—高等学校—教材 Ⅳ.O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 022003 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023
电话:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm 印张:11 字数:243 千字
2007 年 2 月第 1 版 2007 年 2 月第 1 次印刷

责任编辑:梁 锋 王 伟 责任校对:碧 海
封面设计:宋 蕾

ISBN 978-7-5611-3434-4 定 价:16.00 元

# 前　言

培养基础扎实、勇于创新的人才是我国高等教育的一个重要目标. 随着知识经济时代的到来，这一目标显得更加突出. 在工科大学的教育体系中，数学是基础学科，在培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和科学计算能力等方面都起着重要作用.

复变函数是一门古老而又富有生命力的学科. 复变函数的理论和方法在数学、自然科学和工程技术中有着广泛的应用，是解决诸如流体力学、电磁学、热学、弹性理论中的平面问题的有力工具，是工科数学中理工科院校学生继高等数学之后的又一门数学基础课. 复变函数又称为复分析，是实变函数微积分的推广和发展. 因此，它不仅在内容上与实变函数微积分有许多类似之处，而且在研究问题的方法与逻辑结构方面也很类似. 当然，复变函数也有其自身的特点，有自己的研究工具和方法，在学习过程中，应注意与微积分理论的比较，从而加深理解，同时也需注意复变函数本身的特点，并掌握其固有的理论和方法.

本教材具有以下几个主要特色：

(1)为了使数学方法更具生动性，基本知识的引入和基本方法的阐述采用启发式；基本理论的推导深入浅出、循序渐进. 尤其体现在第 3 章中对复变积分的计算，第 5 章中用残数理论计算实积分等.

(2)强调复变量 $z$ 和 $\bar{z}$ 的作用，利用其实现实变量和复变量之间对于各种关系和公式的互换，突出级数和积分表示方法，这两种方法交替出现成为本书的主线.

(3)在编写过程中，为使理论完善，适当增加了理论方面的知识，如在第 3 章介绍了解析函数的最大模原理，在第 4 章介绍了级数的一致收敛性. 这样为学生展望新知识留下窗口，为进一步拓宽数学知识指明了方向.

(4)本书全面介绍了复变函数的基本理论及其在工程问题上的应用，理论和实际应用密切结合. 通过学习本课程，读者不仅能学到复变函数的基本理论和工程数学中的常用数学方法，同时还可以复习和巩固高等数学的基础知识.

(5)重视学生能力的培养，注重提高学生的基本素质，以达到培养创新能力的目的.

(6)例题和习题丰富，有利于学生掌握基本内容，提高分析问题和解决实际问题的能力.

本教材可以供高等工科院校各专业本科生使用，也可以作为工程技术人员自学的参考书.

由于作者的水平所限，书中缺点在所难免，恳请专家、同行及广大读者批评指正.

**编者**

**2007 年 2 月于大连理工大学**

# 目 录

# 第0章 绪 论

复数的概念起源于求方程的根，在二次、三次代数方程的求根中就出现了负数开平方的情况. 16 世纪中叶，意大利数学家卡丹在解三次方程时，首先产生了负数开平方的思想. 他把 40 看做 $5+\sqrt{-15}$ 与 $5-\sqrt{-15}$ 的乘积. 但在很长时间里，人们对复数不能理解，直到 17 世纪和 18 世纪，随着微积分的发明和发展，情况才逐渐有了改变，复数的重要性才日益显现出来.

以复数作为自变量的函数就叫做复变函数，而与之相关的理论就是复变函数论. 解析函数是复变函数中一类具有解析性质的函数，复变函数论主要研究复数域上的解析函数，因此通常也称复变函数论为解析函数论.

复变函数论产生于 18 世纪. 1774 年，欧拉在他的一篇论文中考虑了由复变函数的积分导出的两个方程. 在这之前，法国数学家达朗贝尔在他的关于流体力学的论文中就已经得到了这两个方程. 因此，后来人们提到这两个方程时，把它们叫做“达朗贝尔 - 欧拉方程”. 到了 19 世纪，柯西和黎曼在研究流体力学时对上述两个方程作了更详细的研究，所以现在这两个方程也叫做“柯西 - 黎曼方程”或“柯西 - 黎曼条件”.

复变函数论的全面发展是在 19 世纪，就像微积分的直接扩展统治了 18 世纪的数学那样，复变函数这个新的数学分支统治了 19 世纪的数学. 当时的数学家公认复变函数论是最丰饶的数学分支，并且把它称为是世纪的数学享受，也有人称赞它是抽象科学中最和谐的理论之一.

为复变函数论的创建做了最早期工作的是欧拉、达朗贝尔，法国的拉普拉斯也随后研究过复变函数的积分，他们都是创建这门学科的先驱. 后来为这门学科的发展作了大量奠基工作的是柯西、黎曼和维尔斯特拉斯. 20 世纪初，复变函数论又有了很大的进展，维尔斯特拉斯的学生，瑞典数学家列夫勒、法国数学家彭加勒、阿达玛等都作了大量的研究工作，开拓了复变函数论的研究领域，为这门学科的发展做出了贡献.

复变函数论有着广泛的应用，很多复杂的计算都可用它来解决. 如物理学上对很多不同的稳定平面场的计算就是通过复变函数论来解决的. 俄国的茹柯夫斯基在设计飞机的时候，就用复变函数论解决了飞机机翼的结构问题，他在运用复变函数论解决流体力学和航空力学方面的问题上也做出了贡献. 复变函数论不但在其他学科得到了广泛应用，而且已经深入到微分方程、积分方程、概率论和数论等学科，对这些学科的发展很有影响.

复变函数论主要包括单值解析函数理论、黎曼曲面理论、几何函数论、残数理论、广义解析函数等方面的内容. 如果当函数的变量取某一定值的时候，函数就有一个唯一确定的值，那么这个函数就叫做单值解析函数，多项式就是这样的函数.

复变函数也研究多值函数，黎曼曲面理论是研究多值函数的主要工具. 由许多层面安

放在一起而构成的一种曲面叫做黎曼曲面. 利用这种曲面，可以使多值函数的单值分支和支点概念在几何上有非常直观的表示. 对于一个多值函数，如果能作出它的黎曼曲面，那么函数在黎曼曲面上就变成单值函数. 黎曼曲面理论是复变函数域和几何间的一座桥梁，能够把比较深奥的函数的解析性质和几何联系起来. 近年来，关于黎曼曲面的研究还对另一门数学分支 —— 拓扑学有比较大的影响，逐渐地趋向于讨论它的拓扑性质.

复变函数论中用几何方法来说明、解决问题的内容，一般叫做几何函数论，复变函数可以通过保形映射理论为它的性质提供几何说明. 导数处处不是零的解析函数所实现的映射都是保形映射，保形映射也叫做保角变换. 保形映射在流体力学、空气动力学、弹性理论、静电场理论等方面都得到了广泛应用.

残数理论是复变函数论中的一个重要理论. 应用残数定理不仅可以简化复变函数积分的计算，还可以有效地计算某些实积分，在计算实变函数积分时，可以化为复变函数沿闭曲线的积分后，再用残数定理化为被积分函数在闭曲线内部孤立奇点求留数的计算，当奇点是极点的时候，计算更加简洁.

把单值解析函数的一些条件适当地改变和补充，以满足实际研究工作的需要，这种经过改变的解析函数叫做广义解析函数. 广义解析函数所代表的几何图形的变化叫做拟保角变换. 解析函数的一些基本性质，只要稍加改变后，同样适用于广义解析函数. 广义解析函数的应用范围很广泛，不但应用在流体力学的研究方面，而且也应用在固体力学中. 因此，近年来这方面的理论发展十分迅速.

复变函数已有 200 多年的历史，它以其完美的理论与精湛的技巧成为数学的一个重要组成部分. 它曾经推动过一些学科的发展，并且常常作为一个有力的工具应用在实际问题中，它的基础内容已成为理工科很多专业的必修课程. 现在，复变函数论中仍然有不少尚待研究的课题，所以它将继续向前发展，并将取得更多应用.

# 第1章 复数和复变函数

复变函数就是自变量为复数的函数. 我们研究的主要对象就是在某种意义下可导的复变函数，也就是解析函数. 为建立这种解析函数的理论基础，首先必须对复数以及复变量的函数有清晰的认识. 在这一章中我们首先引入复数和复平面的概念，其次引入复平面上的点集、区域以及复变函数的极限与连续等概念.

## 1.1 复数与复平面

在解实系数一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$$

时，如果判别式 $b^2-4ac<0$，就会遇到负数开平方的问题. 最简单的例子就是在解方程 $x^2+1=0$ 时，就遇到 $-1$ 开平方的问题. 为了使负数开平方有意义，需要进一步扩大数系，为此引入一个虚数单位 i，并规定 $\mathrm{i}^2=-1$，从而 i 是方程 $x^2+1=0$ 的一个解. 这样数就由实数扩充到复数. 下面给出复数的定义.

**定义 1-1**

称 $a+b\mathrm{i}$ 为复数，其中，$a,b$ 是实数，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 称为虚数单位.

两个复数 $a+b\mathrm{i}$ 和 $c+d\mathrm{i}$ 相等当且仅当 $a=c$ 且 $b=d$.

记全体复数组成的集合为 **C**，复数的加法运算定义为

$$(a+b\mathrm{i})+(c+d\mathrm{i})=(a+c)+(b+d)\mathrm{i}. \tag{1-1}$$

复数的乘法运算定义为

$$(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=(ac-bd)+(bc+ad)\mathrm{i}. \tag{1-2}$$

特别地，$n$ 个相同复数 $z$ 的乘积称为 $z$ 的 $n$ 次幂，记作 $z^n$.

复数的减法运算和除法运算分别定义为加法和乘法的逆运算，从而有

$$(a+b\mathrm{i})-(c+d\mathrm{i})=(a-c)+(b-d)\mathrm{i}.$$

$$\frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i} \quad (c^2+d^2\neq 0).$$

**【例 1-1】** 计算 $\dfrac{(-1+\mathrm{i})+(2+3\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})-(1+4\mathrm{i})}$.

**解** $\dfrac{(-1+\mathrm{i})+(2+3\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})-(1+4\mathrm{i})}=\dfrac{1+4\mathrm{i}}{1-3\mathrm{i}}=\dfrac{(1+4\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})}{(1-3\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})}=-\dfrac{11}{10}+\dfrac{7}{10}\mathrm{i}.$

**定义 1-2**

若复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则称 $a$ 和 $b$ 分别为 $z$ 的实部和虚部，记为

$$a=\operatorname{Re} z,\quad b=\operatorname{Im} z.$$

若 $a=\operatorname{Re} z=0$，则称复数 $z$ 为纯虚数. 若 $b=\operatorname{Im} z=0$，则 $z$ 为实数，因此实数集 $\mathbf{R}$ 可以看做复数集 $\mathbf{C}$ 的子集.

从代数的观点出发，复数集 $\mathbf{C}$ 可以定义为有序实数对的集合，即

$$\mathbf{C}=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbf{R}\}.$$

平面直角坐标系建立了有序实数对和 $xy$-平面上的点之间的一一对应. 例如，在图 1-1 中，有序实数对 $(-1,2)$ 对应点 $Q$. 所以对任意复数 $a+bi$，都可以找到 $xy$-平面上的一个点，它的坐标是 $(a,b)$；反之，$xy$-平面上任意一点 $(a,b)$ 都唯一确定一个复数 $a+bi$. 因此，$xy$-平面可以表示复数集 $\mathbf{C}$.

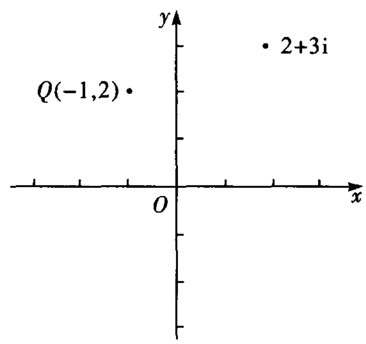



图 1-1

$xy$-平面被用来表示复数集 $\mathbf{C}$ 时称为复平面或 $z$-平面. 由于 $x$-轴表示实数，故 $x$-轴称为实轴. $y$-轴表示纯虚数，故 $y$-轴称为虚轴.

**【例 1-2】** 设复平面上有 $n$ 个质点位于 $z_1,z_2,\cdots,z_n$，其质量分别为 $m_1,m_2,\cdots,m_n$. 证明：这 $n$ 个质点的质心是

$$\hat{z}=\frac{m_1z_1+m_2z_2+\cdots+m_nz_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}.$$

**证明** 记 $z_1=x_1+y_1\mathrm{i},z_2=x_2+y_2\mathrm{i},\cdots,z_n=x_n+y_n\mathrm{i}$，令 $M=\sum\limits_{k=1}^{n}m_k$. 如果质心的坐标是 $(\hat{x},\hat{y})$，则

$$\hat{x}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}m_kx_k}{M},\quad \hat{y}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}m_ky_k}{M}.$$

显然，$\hat{x}$ 和 $\hat{y}$ 恰好是复数 $\hat{z}$ 的实部和虚部.

由勾股定理可知，点 $z=a+bi$ 到原点的距离为 $\sqrt{a^2+b^2}$. 定义

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

为复数 $z$ 的模.

令 $z_1=a_1+b_1\mathrm{i}, z_2=a_2+b_2\mathrm{i}$,则

$$|z_1-z_2|=|(a_1-a_2)+(b_1-b_2)\mathrm{i}|=\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}$$

就是点$(a_1,b_1)$和$(a_2,b_2)$之间的距离,因此点 $z_1$ 和 $z_2$ 之间的距离用 $|z_1-z_2|$ 表示. 在描述平面上的曲线时,这种距离的表示方法很有用. 例如,设 $z_0$ 是一个固定的复数,$r$ 是一个固定的正实数,则方程

$$|z-z_0|=r \tag{1-3}$$

表示与 $z_0$ 的距离是 $r$ 的所有复数的集合. 通常式(1-3)称为圆周方程.

**【例 1-3】** 在平面上描述满足下列方程的点 $z$ 的集合.

(1) $|z+2|=|z+1|$; (2) $|z-\mathrm{i}|=\mathrm{Im}\,z+1$.

**解** (1) 点 $z$ 满足方程(1)当且仅当它到点 $-2$ 和 $-1$ 的距离相等,因此方程(1)是连接点 $-2$ 和 $-1$ 的线段的垂直平分线,即方程(1)表示直线 $x=-\dfrac{3}{2}$(图 1-2).

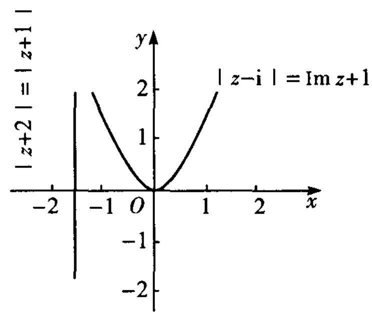


图 1-2

求解方程(1)的通常方法是设 $z=x+\mathrm{i}y$ 是方程的解,则可以得

$$|x+\mathrm{i}y+2|=|x+\mathrm{i}y+1|.$$

从而

$$x=-\frac{3}{2}.$$

(2) 设 $z=x+\mathrm{i}y$ 是方程的解,直接计算可以得到 $\sqrt{x^2+(y-1)^2}=y+1$,即 $x^2=4y$,它表示一条抛物线(图 1-2).

点 $z=a+b\mathrm{i}$ 关于实轴的对称点是 $a-b\mathrm{i}$. 称 $a-b\mathrm{i}$ 为复数 $a+b\mathrm{i}$ 的共轭复数,记为 $\bar{z}=a-b\mathrm{i}$.

容易验证,$z=\bar{z}$ 当且仅当 $z$ 是一个实数;两个复数的和(差)的共轭等于共轭的和(差),即

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2},\quad \overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}.$$

**【例 1-4】** 证明两个复数乘积的共轭等于复数的共轭的乘积.

**证明** 即要证明

$$\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}. \tag{1}$$

记 $z_1=a_1+b_1\mathrm{i}, z_2=a_2+b_2\mathrm{i}$,则

$$\overline{z_1z_2}=a_1a_2-b_1b_2-(a_1b_2+a_2b_1)\mathrm{i}.$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}&=(a_1-b_1\mathrm{i})(a_2-b_2\mathrm{i})=a_1a_2-b_1b_2-a_1b_2\mathrm{i}-a_2b_1\mathrm{i}\\&=a_1a_2-b_1b_2-(a_1b_2+a_2b_1)\mathrm{i}.\end{aligned}$$

因此式(1)成立.

下面是复数模与其共轭的另外一些基本性质,读者很容易自己验证.

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad (z_2 \neq 0), \quad |z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

$$\operatorname{Re} z = \frac{z+\bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}, \quad \bar{\bar{z}} = z, \quad |z| = |\bar{z}|, \quad z\bar{z} = |z|^2.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2} \quad (z_2 \neq 0).$$

特别地,

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

**【例 1-5】** 用复数表示圆的方程

$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0,$$

其中,$A,B,C,D$ 是常数,$A \neq 0$.

**解** 令 $z = x+\mathrm{i}y$,则

$$x^2+y^2 = z\bar{z}, \quad x = \frac{z+\bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}.$$

将上面这些式子代入圆的方程得

$$\alpha z\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + d = 0.$$

其中,$\alpha = A, \beta = \dfrac{B+C\mathrm{i}}{2}, d = D$.

**【例 1-6】** 设 $z_1, z_2$ 是两个复数,证明:

$$|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}).$$

**证明**

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)} = (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) \\ &= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}).\end{aligned}$$

## 习题 1-1

**1.** 计算下面各题,结果写成 $a+b\mathrm{i}$ 的形式.

(1) $\dfrac{(8+2\mathrm{i})-(1-\mathrm{i})}{(4+\mathrm{i})^2}$;　　(2) $\dfrac{2+3\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} - \dfrac{8+\mathrm{i}}{7-\mathrm{i}}$;

(3) $\left[\dfrac{2+\mathrm{i}}{8\mathrm{i}-(1-2\mathrm{i})}\right]^2$;　　(4) $\mathrm{i}^3(1+5\mathrm{i})^2$;

(5) $(2+\mathrm{i})(13-\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})$;　　(6) $[(5-\mathrm{i})^2-3]\mathrm{i}$.

**2.** 证明:若 $z_1 z_2 = 0$,则必有 $z_1 = 0$ 或 $z_2 = 0$.

**3.** 证明:对任意复数 $z$,$\operatorname{Re}(\mathrm{i}z) = -\operatorname{Im} z$.

**4.** 解下列方程:

(1) $\mathrm{i}z = 6 - 5z\mathrm{i}$;　　(2) $\dfrac{1-z}{z} = 1-5\mathrm{i}$;

(3) $(2-\mathrm{i})z^2 + 6z = 0$;　　(4) $z^2 + 25 = 0$.

**5.** 设 $z$ 是复数且 $\operatorname{Re} z > 0$，证明 $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) > 0$.

**6.** 设 $z$ 是复数且 $\operatorname{Im} z > 0$，证明 $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) < 0$.

**7.** 设 $z_1, z_2$ 都是复数，且 $z_1 + z_2$ 和 $z_1 z_2$ 都是负实数，证明 $z_1$ 和 $z_2$ 都是实数.

**8.** 证明：平面上直线方程可以写成

$$a\bar{z} + \bar{a}z = c,$$

其中，$a$ 是非零复常数，$c$ 是实数.

**9.** 证明：

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{j=1}^{n} z_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Re} z_j;$$

$$\operatorname{Im}\left(\sum_{j=1}^{n} z_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Im} z_j.$$

**10.** 设 $n$ 是正整数，证明复数的双线性公式

$$(z_1 + z_2)^n = z_1^n + \binom{n}{1} z_1^{n-1} z_2 + \cdots + \binom{n}{k} z_1^{n-k} z_2^k + \cdots + z_2^n,$$

其中，双线性系数 $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

**11.** 证明：点 $1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 和 $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 是一个等边三角形的三个顶点.

**12.** 证明：点 $3 + \mathrm{i}, 6$ 和 $4 + 4\mathrm{i}$ 是一个直角三角形的三个顶点.

**13.** 在平面上描述满足下列方程的点的集合.

(1) $\operatorname{Im} z = -2$；　　(2) $1 < |z - 1 + \mathrm{i}| < 3$；

(3) $|z - 2| = \operatorname{Re} z + 2$；　　(4) $|z - 1| + |z + 1| = 7$；

(5) $\operatorname{Re} z \geqslant -3$；　　(6) $-2 < \operatorname{Im} z < 4$.

**14.** 证明：如果 $(\bar{z})^2 = z^2$，则 $z$ 是实数或纯虚数.

**15.** 求复数 $w = \frac{1+z}{1-z}\,(z \neq 1)$ 的实部、虚部和模.

**16.** 若 $|a| < 1, |b| < 1$，证明：

$$\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| < 1.$$

**17.** 若 $|z| = 1$，证明：

$$\left|\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right| = 1.$$

**18.** 若 $z = x + \mathrm{i}y$，证明：

$$\frac{|x| + |y|}{\sqrt{2}} \leqslant |z| \leqslant |x| + |y|.$$

**19.** 证明：如果 $|z| = 1\,(z \neq 1)$，则 $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{1}{2}$.

**20.** 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是实常数，$z_0$ 是多项式方程

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

的一个根,证明:$\overline{z}_0$ 也是该方程的根.

**21.** 证明:点 $z$ 关于直线 $ax + by = c$($a,b,c$ 都是实数)的对称点是 $\dfrac{2c\mathrm{i} + (b - a\mathrm{i})\overline{z}}{b + a\mathrm{i}}$.

## 1.2 复数的向量表示和极坐标表示

对复平面上任意一个点 $z$,连接原点和 $z$ 可以得到一条有向线段,称其为由复数 $z$ 决定的向量,简称为向量 $z$.

向量由其长度和方向所决定,向量在平移变换下保持不变. 例如,如图 1-3 所示,由 $1 + \mathrm{i}$ 决定的向量和以点 $2 + \mathrm{i}$ 为起点,以点 $3 + 2\mathrm{i}$ 为终点的向量是相同的. 因此,全体复数与平面上的全体向量可建立一一对应关系. 每个平行于实轴的向量是一个实数,平行于虚轴的向量是一个虚数. 由点 $z$ 决定的向量的长度为 $|z|$.

设 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 分别是由点 $z_1$ 和 $z_2$ 决定的向量. 由平行四边形法则得到向量的和 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$(图 1-4). 若 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1, z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$,则图 1-4 中向量 $\boldsymbol{v}$ 的终点坐标为 $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$,即向量 $\boldsymbol{v}$ 对应于点 $z_1 + z_2$. 因此复数加法和平面上的向量加法是一致的.

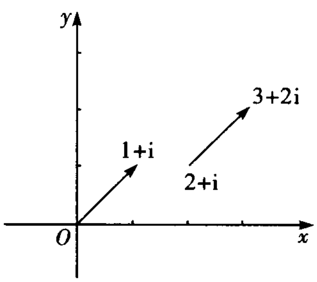



图 1-3

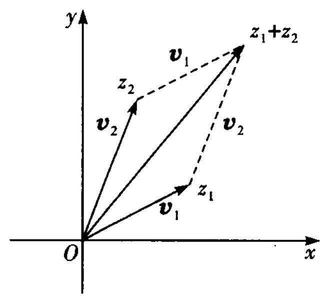



图 1-4

关于复数的长度有下面的三角不等式.

**三角不等式** 对任意两个复数 $z_1$ 和 $z_2$ 都有

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|,$$

即三角形两边之和大于或等于第三边.

同时有另一个三角不等式

$$|z_2| - |z_1| \leqslant |z_2 - z_1|,$$

或

$$|z_2| \leqslant |z_1| + |z_2 - z_1|,$$

即三角形两边之差小于或等于第三边.

**【例 1-7】** 设 $z_1, z_2$ 和 $z_3$ 为不同的三点,证明此三点共线当且仅当存在实数 $c$,满足

$$z_3 - z_2 = c(z_2 - z_1).$$

**证明** 两个向量平行当且仅当其中一个向量是另一个向量与一个实数的乘积. 用复数来描述就是,$z$ 与 $w$ 平行当且仅当 $z = cw$,其中,$c$ 是实数. 从图 1-5 可以看到,$z_1, z_2$ 和 $z_3$ 三点共线当且仅当向量 $z_3 - z_2$ 与向量 $z_2 - z_1$ 平行,因此结论成立.

复平面上的点 $z=x+\mathrm{i}y$ 也可以用极坐标$(r,\theta)$ 表示，即

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,$$

其中，$r=|z|$，$\theta$ 表示向量 $z$ 的倾角，是从正实轴沿着逆时针方向度量的(图 1-6). 称 $\theta$ 是向量 $z$ 的辐角. 用 $\operatorname{Arg} z$ 表示向量 $z$ 的辐角. 显然，辐角 $\theta$ 不是唯一的，故 $\operatorname{Arg} z$ 是一个多值函数. 如果 $\theta_0$ 是辐角 $\operatorname{Arg} z$ 的一个值，则 $\operatorname{Arg} z=\theta_0+2k\pi$($k$ 为任意整数) 给出了 $z$ 的全部辐角. 例如，辐角 $\operatorname{Arg}\mathrm{i}$ 的所有值为

$$\operatorname{Arg}\mathrm{i}=\frac{\pi}{2}+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\cdots).$$

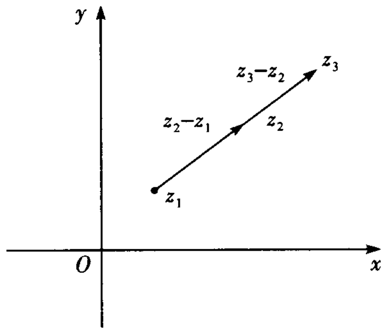



图 1-5

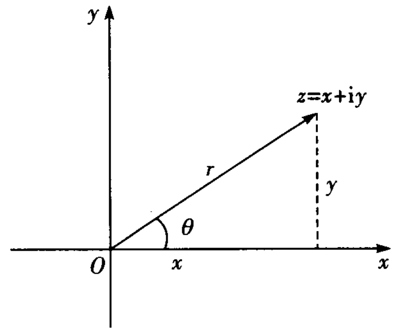



图 1-6

任意长度为 $2\pi$ 的半开区间都包括辐角 $\operatorname{Arg} z$ 的一个值且只有一个值，称这样的区间为 $\operatorname{Arg} z$ 的一个分支. 区间$(-\pi,+\pi]$ 称为 $\operatorname{Arg} z$ 的主分支，把区间$(-\pi,+\pi]$ 内 $\operatorname{Arg} z$ 的值称为 $\operatorname{Arg} z$ 的主值，记为 $\arg z$，并称 $\arg z$ 为 $z$ 的辐角主值. $\arg z$ 在负实轴处是不连续的且有 $2\pi$ 的跳跃，将负实轴称为 $\arg z$ 的支割线. $\operatorname{Arg} z$ 的任意一个分支必定在某处有 $2\pi$ 的跳跃. 利用记号 $\operatorname{Arg}_\tau z$ 表示取值在$(\tau,\tau+2\pi]$ 中 $\operatorname{Arg} z$ 的一个分支. 因此 $\operatorname{Arg}_{-\pi} z$ 即辐角主值 $\arg z$.

有了上面的约定，则 $z=x+\mathrm{i}y$ 的极坐标表示为

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),\tag{1-4}$$

其中，$r=|z|$，$\theta$ 是复数 $z$ 的辐角，称式(1-4) 为 $z$ 的极坐标形式.

再利用欧拉(Euler) 公式：$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，又可以得到

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.\tag{1-5}$$

这种表示方法称为复数的指数表示法.

**【例 1-8】** 求 $\operatorname{Arg}(2+2\sqrt{3}\mathrm{i})$.

**解** $r=|2+2\sqrt{3}\mathrm{i}|=4$，方程组 $\cos\theta=\frac{1}{2}$ 和 $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 有解 $\theta=\frac{\pi}{3}$，因此

$$\operatorname{Arg}(2+2\sqrt{3}\mathrm{i})=\frac{\pi}{3}+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\cdots).$$

特别地，

$$\arg(2+2\sqrt{3}\mathrm{i})=\frac{\pi}{3}.$$

若

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1),\quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2),$$

则

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + \mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)].$$

所以

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)].$$

从而得到

$$\operatorname{Arg} z_1 z_2 = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2. \tag{1-6}$$

由此得到复数乘法的几何解释：向量 $z_1 z_2$ 的长度与辐角分别等于向量 $z_1, z_2$ 的长度之积与辐角之和(图 1-7). 例如，向量 i 的长度为 1，辐角为 $\frac{\pi}{2}$，则向量 $\mathrm{i}z$ 可由向量 $z$ 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 得到.

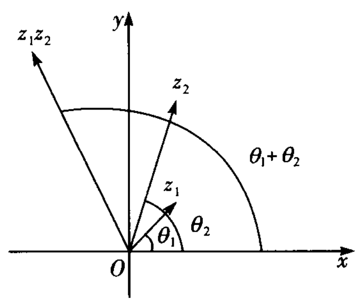



图 1-7

由于除法运算是乘法运算的逆运算，立即可得

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)],$$

因此

$$\operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2. \tag{1-7}$$

复数除法的几何解释是向量 $\frac{z_1}{z_2}$ 的长度与辐角分别等于向量 $z_1, z_2$ 的长度之商与辐角之差.

由式(1-6) 和(1-7) 得

$$\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k_1\pi, \tag{1-8}$$

$$\arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k_2\pi, \tag{1-9}$$

其中，$k_1$ 和 $k_2$ 为某个整数.

**【例 1-9】** 写出 $\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}$ 的极坐标形式.

**解** 由于 $1+\mathrm{i}$ 和 $\sqrt{3}-\mathrm{i}$ 的极坐标形式分别是

$$1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

和

$$\sqrt{3}-\mathrm{i}=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right].$$

因此

$$\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{12}\right).$$

**【例 1-10】** 证明:过点 $z_1$ 和 $z_2$ 的直线 $l$ 垂直于过点 $z_3$ 和 $z_4$ 的直线 $L$ 当且仅当

$$\arg\frac{z_1-z_2}{z_3-z_4}=\pm\frac{\pi}{2}.$$

**证明** 直线 $l$ 和 $L$ 垂直的充要条件是 $z_1-z_2$ 与 $z_3-z_4$ 垂直,即向量 $z_1-z_2$ 旋转 $\frac{\pi}{2}$ 或 $-\frac{\pi}{2}$ 得到向量 $z_3-z_4$.因此

$$z_1-z_2=(z_3-z_4)\mathrm{e}^{\pm\frac{\pi}{2}\mathrm{i}},$$

故

$$\arg\frac{z_1-z_2}{z_3-z_4}=\pm\frac{\pi}{2}.$$

**【例 1-11】** 证明三角形内角和等于 $\pi$.

**证明** 设三角形的三个顶点分别为 $z_1,z_2,z_3$,对应的三个顶角分别为 $\alpha,\beta,\gamma$.于是

$$\alpha=\arg\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1},\quad \beta=\arg\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2},\quad \gamma=\arg\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}.$$

由于

$$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2}\cdot\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}=-1,$$

根据式(1-7),得

$$\arg\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}+\arg\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2}+\arg\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}=\arg(-1)+2k\pi,$$

其中,$k$ 是某个整数.即

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi+2k\pi.$$

但由于 $0<\alpha<\pi,0<\beta<\pi,0<\gamma<\pi$,因此

$$0<\alpha+\beta+\gamma<3\pi.$$

故必有 $k=0$,即 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

## 习题 1-2

**1.** 证明复平面上三点 $a+b\mathrm{i},0,\dfrac{1}{-a+b\mathrm{i}}$ 共线.

**2.** 设 $z_1=2-\mathrm{i},z_2=1+\mathrm{i}$,运用平行四边形法则表示下面的向量.

(1)$z_1+z_2$; (2)$z_1-z_2$; (3)$3z_1-2z_2$.

**3.** 证明:对任意的整数 $n$,$|z^n|=|z|^n$(当 $n$ 是负数时,$z\neq 0$).