科学版

研究生教学丛书

偏微分方程现代数值方法

马逸尘　梅立泉　王阿霞 编著

科学出版社
www.sciencep.com

科学版研究生教学丛书

偏微分方程现代数值方法

马逸尘　梅立泉　王阿霞 编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书内容包括椭圆边值问题的变分原理及其逼近、有限元方法、有限元误差估计、有限体积法和谱方法、分裂算法(包括区域和算子两类)、多重网格算法(包括几何和代数两类). 每章后都附有习题，书末的附录包括本书所需的 Sobolev 空间知识. 书中既有经典的有限元的理论、方法，又有计算方法的新进展；不但有算法的描述，还有算法的实现，可以满足各种读者不同的需要.

本书可作为理工科专业的研究生教材，也可供有关专业的教师和研究人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

偏微分方程现代数值方法/马逸尘，梅立泉，王阿霞编著. —北京：科学出版社，2006

(科学版研究生教学丛书)

ISBN 7-03-017014-8

Ⅰ.偏… Ⅱ.①马…②梅…③王… Ⅲ.偏微分方程-数值计算-研究生-教材 Ⅳ.O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 019990 号

责任编辑：姚莉丽 赵 靖 潘继敏/责任校对：陈丽珠

责任印制：张克忠/封面设计：陈 敬

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2006 年 10 月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2006 年 10 月第一次印刷 印张：14

印数：1—2 500 字数：262 000

定价：25.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈路通〉)

前　　言

有限元方法及偏微分方程数值方法的课程在西安交通大学开设已有 25 年之久. 所用教材是由李开泰、黄艾香和黄庆怀合编的《有限元方法及其应用》(西安交通大学出版社, 1984). 随着计算数学的迅速发展和我们数十年教学实践的积累, 我们在上述教材的基础上, 经过修改、扩充, 编成这本教材.

本教材有以下特点.

(1) 内容丰富. 在变分原理统一的框架下, 构造有限元法、有限体积法和谱方法三类基本算法, 因为这些方法虽然有各自的特点, 但也有相通之处. 在此基础上, 又介绍了区域分裂、算子分裂、虚拟区域以及多重网格 (包括几何和代数多重网格两种) 等新的方法, 使我们可以在这三类基本算法基础上来应用新的方法, 从而提高计算效率和精度.

(2) 重点突出. 在三类基本算法中, 以有限元方法的理论分析、构造及实现为主线, 进行了系统的论述. 由于上述三类基本算法都是在变分原理的框架下讨论的, 在注意到有限体积法和谱方法自身特点的基础上, 可以触类旁通, 举一反三地应用偏微分方程和 Sobolev 空间理论于这两个方法的分析之中, 从而节省了篇幅. 我们希望读者通过对这些算法的学习和研究, 能进一步体会构造算法的原理和方法, 为构造新的高效算法作必要的训练和准备.

(3) 应用性强. 本书不仅有标准协调元和混合有限元的理论, 而且有方法的构造、实施, 如 Delaunay 剖分、边界条件的处理等. 不但可供理科研究生使用, 也为工科研究生的应用提供了方便. 对于只关心算法的读者, 可以按照引言、1.1 节、第 2 章、第 4～6 章的顺序阅读, 略去收敛性的内容.

在本书的写作中, 主要参考了文献 Trottenberg et al, 2001; Quarteroni et al, 1997; Susanne et al, 1994; 李荣华等, 1994; 李开泰等, 1984; Ciarlet, 1978.

在本书编写过程中得到了西安交通大学研究生院、理学院、图书馆和国家自然科学基金 (10371096) 的大力支持, 对此我们表示感谢!

本书编写过程中, 李开泰、黄艾香、李荣华、陈传淼、常谦顺、严宁宁、何银年等教授提出了许多宝贵的建议, 并提供了许多资料, 对此我们表示感谢!

在本书的教学实践中, 许多研究生给出了批评和建议, 并参加了书稿的校对和插图工作, 对此我们表示感谢!

最后, 要感谢科学出版社的编辑耐心细致的工作. 还要感谢沈欣平, 她完成

了全书的打印工作.

“饮水思源”是西安交通大学的校碑铭，谨以此书献给西安交通大学建校110周年和交通大学西迁50周年，以表达我们对母校和老师的感激之情.

我们的目标是夯实基础、开阔视野. 但由于我们水平有限，书中错误疏漏在所难免，恳请专家、读者予以批评指正.

作 者

2005年10月

符 号 说 明

$\mathbf{Z}$	整数集合
$\mathbf{R}$	实数集合
$\mathbf{R}^d$	d 维欧氏空间
$\mathbf{R}^{m,n}$	具有实元素的 $m\times n$ 矩阵向量空间
$\mathrm{card}(E)$	集合 E 的元素个数
$\mathrm{meas}(E)$	$E\subset\mathbf{R}^d$ 的 Lebesgue 测度
$u\|_E$	函数 u 在集合 E 上的限制
$\mathrm{span}\{v_1,\cdots,v_n\}$	由向量 $v_1,\cdots,v_n$ 张成的向量空间，$v_1,\cdots,v_n$ 是线性无关的
$\dim V$	向量空间 V 的维数
δ_{ij}	Kronecker 符号：$\delta_{ij}=1$，当 $i=j$ 时；$\delta_{ij}=0$，当 $i\neq j$ 时
$(u_1,\cdots,u_d)$	$\mathbf{R}^d$ 中向量 u 的 Cartesian 分量
$(u,v)_E$ 或 $u\cdot v$	$\mathbf{R}^d$ 中 Euclid 数积：$u\cdot v=\sum_{i=1}^{d}u_iv_i$
$\Vert u\Vert_E$	$\mathbf{R}^d$ 中 Euclid 范数：$\Vert u\Vert_E=\left(\sum_{i=1}^{d}(u_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$
A,M	矩阵
I	恒等矩阵
a_{ij}	A 的第 i 行，第 j 列元素
A^{T}	矩阵 A 的转置矩阵
$\mathrm{tr}(A)$	A 的迹，$\forall A\in\mathbf{R}^{n,n}$，$\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}A_{ii}$
$\det(A)$	A 的行列式
$\mathrm{diag}(A)$	A 的对角元矩阵，$\forall A\in\mathbf{R}^{n,n}$，$\mathrm{diag}(A)_{ij}=\delta_{ij}a_{ij},1\leqslant i,j\leqslant n$
$A\cdot u$	矩阵向量积，$\forall A\in\mathbf{R}^{n,n}$，$\forall 1\leqslant i\leqslant n$；$(A\cdot u)_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}u_j$
$u\otimes v$	张量积，$\forall u\in\mathbf{R}^m$，$v\in\mathbf{R}^n$，$u\otimes v\in\mathbf{R}^{m,n}$
$\partial_t u$	u 对时间的导数
$\partial_i u$	u 对 x_i 的分布导数
$\partial_\xi u$	u 对 ξ 的分布导数
$\partial_{ij}u$	u 对 x_i 和 x_j 的二阶导数
$\partial^\alpha u$	$\partial_{x_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{x_d}^{\alpha_d}u$，其中 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_d)\in\mathbf{Z}_+^d$
$\|\alpha\|$	$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_d)\in\mathbf{R}^d$ 的长度：$\|\alpha\|=\alpha_1+\cdots+\alpha_d$
∇u	梯度 $\nabla u=(\partial_1 u,\cdots,\partial_d u)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^d$，$u\in\mathbf{R}$

$\nabla\cdot u=\mathrm{div}\boldsymbol{u}$	散度 $\nabla\cdot u=\sum_{i=1}^{m}\partial_i u_i\in\mathbf{R}$，$\forall u\in\mathbf{R}^m$
$\beta\cdot\nabla u$	对流算子：$\beta\in\mathbf{R}^d$，$\beta\cdot\nabla u=\sum_{i=1}^{d}\beta_i\,\partial_i u$
Δu	Laplace 算子：$\Delta u=\sum_{i=1}^{d}\partial_{ii}u$，　$\forall u\in\mathbf{R}$ $\Delta u=\left(\sum_{j=1}^{d}\partial_{jj}u_i\right)_{1\leqslant i\leqslant m}$，　$\forall u\in\mathbf{R}^m$
D^2u	Hessian 算子，$D^2u=(\partial_{ij}u)_{1\leqslant i,j\leqslant d}$，　$u\in\mathbf{R}$ $(D^2u)^{\mathrm{T}}=D^2u$，$\mathrm{tr}(D^2u)=\Delta u$
$\mathscr{L}(E,F)$	由 E 到 F 的有界线性算子的向量空间
$\mathrm{Ker}A=\mathscr{N}(A)$	线性算子 A 的核（零空间）
$\mathrm{Im}A=\mathscr{R}(A)$	线性算子 A 的值域
X'	拓扑空间 X 的拓扑对偶
A^{T}	A 的对偶算子，如果 $A\in\mathscr{L}(E,F)$，$A^{\mathrm{T}}\in\mathscr{L}(F',E')$
$\Vert u\Vert_X$	赋范空间 X 的 u 的范数
P_k	变量 $x_1,\cdots,x_d$ 的总的阶数不超过 k 的多项式向量空间
Q_k	变量 $x_1,\cdots,x_d$ 的每一个变量阶数不超过 k 的多项式向量空间
$C_0^\infty(\Omega)$	Ω 上具有紧支集的无穷次连续可微的函数
$C^0(E,F)$	由拓扑空间 E 到拓扑空间 F 的连续函数空间
$C^0(\Omega)$	$\Omega\subset\mathbf{R}^d$ 上连续函数空间
$C^k(\Omega)$	$\Omega\subset\mathbf{R}^d$ 上 k 次连续可微函数空间
$C^{k,\alpha}(\Omega)$	由直到 k 阶导数均为 α 阶 Hölder 连续函数组成的空间
$C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$	由直到 k 阶导数均为 α 阶有界 Hölder 连续函数组成的空间
$\delta_{x=a}$	支集在 a 处的 Dirac 测度
$L^p(\Omega)$	Ω 上 p 次 Lebesgue 可积函数的全体
$L_0^p(\Omega)$	$\left\{v\in L^p(\Omega);\int_\Omega v=0\right\}$
q	p 的共轭数，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$
$W^{s,p}(\Omega)$	$L^p(\Omega)$ 中直到 s 阶导数都属于 $L^p(\Omega)$ 的广义函数的全体
$W_0^{s,p}(\Omega)$	$C_0^\infty(\Omega)$ 在 $W^{s,p}(\Omega)$ 中的闭包
$W^{-s,p'}(\Omega)$	$W_0^{s,p}(\Omega)$ 的对偶空间，其中 p' 为 p 的共轭数
$[W^{s,p}(\Omega)]^m$	$\mathbf{R}^m$ 的函数，其分量在 $W^{s,p}(\Omega)$ 中
$\Vert u\Vert_{0,p,\Omega}$	$L^p(\Omega)$ 的范数：$\Vert u\Vert_{0,p,\Omega}=\left(\int_\Omega\vert u\vert^p\right)^{1/p}$
$\vert u\vert_{s,p,\Omega}$	$W^{s,p}(\Omega)$ 的半范：$\vert u\vert_{s,p,\Omega}=\sum_{\vert\alpha\vert=s}\Vert\partial^\alpha u\Vert_{0,p,\Omega}$
$\Vert u\Vert_{s,p,\Omega}$	$W^{s,p}(\Omega)$ 的范数：$\Vert u\Vert_{s,p,\Omega}=\sum_{\vert l\vert\leqslant s}\vert u\vert_{l,p,\Omega}$
$H^s(\Omega),H_0^s(\Omega)$	$W^{s,2}(\Omega),W_0^{s,2}(\Omega)$
Γ	边界 $\partial\Omega$

$H_{00}^{1/2}(\Gamma)$	$H_0^1(\Gamma)$ 与 $L^2(\Gamma)$ 的内插空间，即 $(L^2(\Gamma),H_0^1(\Gamma))_{1/2,2}$
$(u,v)_{0,\Omega}$	$L^2(\Omega)$ 上的数积：$\int_\Omega uv\mathrm{d}x$
$H(\mathrm{div},\Omega)$	$H(\mathrm{div},\Omega)=\{v\in[L^2(\Omega)]^d:\mathrm{div}v\in L^2(\Omega)\}$
$H_0(\mathrm{div},\Omega)$	$H_0(\mathrm{div},\Omega)=\{v\in[L^2(\Omega)]^d:\mathrm{div}v\in L^2(\Omega),\ v\cdot n\mid_{\partial\Omega}=0\}$
$C^j([0,T];V)$	对 t 属于 C^j 的 V 值函数
$L^p([0,T];V)$	其 V 范数属于 $L^p([0,T])$ 的 V 值函数
$h_k=\mathrm{diam}(K)$	$K\subset\mathbf{R}^d$ 的直径
N_{geo}	几何节点个数
NE	剖分中元素个数
$\{\mathcal{J}_h\}_{h>0}$	剖分族，h 是剖分参数
(K,P,Σ)	抽象有限元三元集
$(\hat{K},\hat{P},\hat{\Sigma})$	标准（参考）有限元
V_h	试探函数空间
V_{h0}	$S^h\cap H_0^1(\Omega)$
ψ_i	节点变量 i 对应的基函数
n_p	节点 p 的总体编码
S_{pe}	节点 p 的影响元素集合
S_{pn}	节点 p 的影响节点集合
$X\hookrightarrow Y$	赋范空间 X 连续地嵌入到赋范空间 Y，即 $X\subset Y$，且 $\forall x\in X$，有 $\\|x\\|_Y\leqslant c\\|x\\|_X$，$c>0$ 是常数
$X\hookrightarrow\hookrightarrow Y$	赋范空间 X 紧嵌入到赋范空间 Y，即在 X 中任意有界序列中，总可以抽出在 Y 中收敛的子序列

目　录

第0章　引　　言

偏微分方程现代数值方法是指利用变分形式构造求解偏微分方程解的数值方法，如有限元方法、有限体积法及谱方法等．下面用一维的例子来说明，以便更好地理解后面的内容．

考虑两点边值问题

$$\begin{cases} -\dfrac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + \alpha u = f(x), & 0 < x < 1, \\ u(0) = c_0, & u(1) = c_1, \\ \alpha \geqslant 0 \text{ 为常数}. \end{cases} \tag{0.1}$$

为方便起见，这里先设 $c_0 = c_1 = 0$. 如果 u 是方程的解，v 是任意充分光滑的函数且 $v(0) = v(1) = 0$，将(0.1)中方程两端乘 v 后积分．方程左端由分部积分得

$$\begin{aligned} a(u,v) &\triangleq \int_0^1 [-u''(x) + \alpha u(x)] v(x) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 [u'(x)v'(x) + \alpha u(x)v(x)] \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{0.2}$$

在 $a(u,v)$ 中，只要求 $u,v \in C^1([0,1])$，它比原方程(0.1)要求的条件 $u \in C^2((0,1)) \cap C^1([0,1])$ 弱，而且还可以在

$$\begin{aligned} V = \{ v \in L^2(0,1) : a(v,v) = \int_0^1 (|v'|^2 + \alpha |v|^2) \mathrm{d}x < \infty, \\ v(0) = v(1) = 0 \} \end{aligned} \tag{0.3}$$

空间中考虑．记 $(f,v) \triangleq \int_0^1 f v \mathrm{d}x$，则

$$\text{求 } u \in V, \text{使得 } a(u,v) = (f,v), \qquad \forall v \in V. \tag{0.4}$$

称(0.4)为边值问题(0.1)的变分形式或弱形式，其解为(0.1)的弱解．称 v 为检验函数．

当 $f \in C^0([0,1])$，u 为变分形式(0.4)的解且 $u \in C^2([0,1])$ 时，则 u 必然是原边值问题(0.1)的解．

当 $c_0 \neq 0, c_1 \neq 0$ 时，可以构造变量替换 $w = u - (1-x)c_0 - xc_1$，使(0.1)变为齐次边值问题

$$\begin{aligned} &-w'' + \alpha w = F, \qquad \text{其中 } F = f - \alpha(1-x)c_0 - \alpha x c_1, \\ &w(0) = 0, \quad w(1) = 0. \end{aligned}$$

再进行如上的讨论．

在物理上，称变分形式(0.4)为虚功原理.

微分方程数值解实质上是在有限维空间 S 中构造原微分方程的近似解. 设 $S\subset V$ 是有限维子空间，即 $S\triangleq \mathrm{span}\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_l\}$，则变分形式(0.4)写成

$$\text{求 } u_S\in S,\quad \text{使得 } a(u_S,v)=(f,v),\qquad \forall v\in S. \tag{0.5}$$

(0.5)称为(0.4)的逼近形式，又称 Ritz-Galerkin 变分形式. 由 $u_S=\sum_{j=1}^{l}U_j\varphi_j$，$v=\sum_{j=1}^{l}V_j\varphi_j$，及 V_j 的任意性，(0.5)变为线性代数方程组

$$KU=F, \tag{0.6}$$

其中 $U=(U_1,\cdots,U_l)^{\mathrm T}$，$K=\{K_{ij}\}$ 是 $l\times l$ 的矩阵，$K_{ij}=a(\varphi_i,\varphi_j)$，$F=(f_1,\cdots,f_l)^{\mathrm T}$，$f_i=\int_0^1 f\varphi_i\mathrm{d}x$. 这样，变分形式(0.5) 等价于方程组(0.6). (0.6) 称为刚度方程，矩阵 K 称为刚度矩阵.

下面着重描述有限元方法. 把区间$[0,1]$分成 N 份，记小区间 $I_i\triangleq[x_i,x_{i+1}]$，$0\leqslant i\leqslant N-1$. 称 x_i 为节点，记 $x_0=0$，$x_N=1$. 记 $\Omega_h\triangleq\{x_1,\cdots,x_{N-1}\}$(它包含了 $N-1$ 个其值 u 未知的节点)，$\bar\Omega_h\triangleq\{x_0,x_1,\cdots,x_N\}$ 以及 $h_{i+1}=x_{i+1}-x_i$，取 φ_i 如下：

$$\varphi_0(x)=\begin{cases}\dfrac{x_1-x}{x_1-x_0}, & x_0\leqslant x\leqslant x_1,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$$

$$\varphi_i(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & \forall x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i,\\ \dfrac{x_i-x}{x_{i+1}-x_i}, & \forall x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1},\ 1\leqslant i\leqslant N-1,\\ 0, & \text{其他};\end{cases} \tag{0.7}$$

$$\varphi_N(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{N-1}}{x_N-x_{N-1}}, & x_{N-1}\leqslant x\leqslant x_N,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

可以验证 $\varphi_i(x_j)=\delta_{ij}(i,j=1,\cdots,N-1)$. 故$\{\varphi_i(x):1\leqslant i\leqslant N-1\}$构成了 S 的基函数，且 φ_i 的支集是$[x_{i-1},x_{i+1}]$. 而且 $\forall v\in S$，$v=\sum_{i=1}^{N-1}V_i\varphi_i$.

下面由离散变分形式(0.5) 确定代数方程组(0.6). 由 $u_S=\sum_{j=1}^{N-1}U_j\varphi_j$ 有

$$\begin{aligned}K_{i-1,i}&=a(\varphi_{i-1},\varphi_i)=\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x_i-x_{i-1})^{-2}[-1+\alpha(x-x_{i-1})(x_i-x)]\mathrm{d}x\\&=(x_i-x_{i-1})^{-1}\left[-1+\frac{\alpha(x_i-x_{i-1})^2}{6}\right]=h_i^{-1}\left(-1+\frac{\alpha h_i^2}{6}\right),\end{aligned}$$

$$K_{ii}=\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x_i-x_{i-1})^{-2}[1+\alpha(x-x_{i-1})^2]\mathrm{d}x$$
$$+\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x_{i+1}-x_i)^{-2}[1+\alpha(x_{i+1}-x)^2]\mathrm{d}x$$
$$=(x_i-x_{i-1})^{-1}\left[1+\frac{\alpha(x_i-x_{i-1})^2}{3}\right]+(x_{i+1}-x_i)^{-1}\left[1+\frac{\alpha(x_{i+1}-x_i)^2}{3}\right]$$
$$=h_i^{-1}\left(1+\frac{\alpha h_i^2}{3}\right)+h_{i+1}^{-1}\left(1+\frac{\alpha h_{i+1}^2}{3}\right), \tag{0.8}$$
$$K_{i,i+1}=(x_{i+1}-x_i)^{-1}\left[-1+\frac{\alpha(x_{i+1}-x_i)^2}{6}\right]=h_{i+1}^{-1}\left(-1+\frac{\alpha h_{i+1}^2}{6}\right).$$

方程组(0.6)的右端项 F 的分量 f_i 由下式给出：

$$f_i=\int_0^1 f\varphi_i\mathrm{d}x=\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}f\varphi_i\mathrm{d}x$$
$$=(x_i-x_{i-1})^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)(x-x_{i-1})\mathrm{d}x$$
$$+(x_{i+1}-x_i)^{-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)(x_{i+1}-x)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{(h_i+h_{i+1})[f(x_i)+O(h)]}{2},\qquad 1\leqslant i\leqslant N-1, \tag{0.9}$$

其中 $h=\max h_i$. 这样,有限元方程组(0.6) 中第 i 个方程为

$$-\left(\frac{U_{i+1}-U_i}{h_{i+1}}-\frac{U_i-U_{i-1}}{h_i}\right)+\frac{\alpha}{6}[h_{i+1}(U_{i+1}+2U_i)+h_i(2U_i+U_{i-1})]$$
$$=f_i. \tag{0.10}$$

当 $f\in C^0([0,1])$ 时,上式为

$$\frac{2}{h_i+h_{i+1}}\left\{-\left(\frac{U_{i+1}-U_i}{h_{i+1}}-\frac{U_i-U_{i-1}}{h_i}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha}{6}[h_{i+1}(U_{i+1}+2U_i)+h_i(2U_i+U_{i-1})]\right\}$$
$$=f(x_i)+O(h). \tag{0.11}$$

注意在第一个和第 $N-1$ 个方程中,U_0 和 U_N 应用初值 c_0,c_1 代之.

如果 $[0,1]$ 被 N 等分,即 $x_i\triangleq ih,h=1/N$,则分别有

$$\frac{-(U_{i+1}-2U_i+U_{i-1})}{h}+\frac{\alpha h(U_{i+1}+4U_i+U_{i-1})}{6}=f_i, \tag*{(0.10)$'$}$$

$$\frac{-(U_{i+1}-2U_i+U_{i-1})}{h^2}+\frac{\alpha(U_{i+1}+4U_i+U_{i-1})}{6}=f(x_i)+O(h). \tag*{(0.11)$'$}$$

当 $\alpha=0$ 时,方程边值问题 $-\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}=f(x),0<x<1,u(0)=c_0,u(1)=c_1.$

它的变分形式为 $a(u,v)=\int_0^1 u'v'\mathrm{d}x, a(u,v)=(f,v)$. 对于这个方程如果用差分法求解,则由 Taylor 公式有

$$u''(x_i)=\frac{2[u(x_{i-1})+u(x_{i+1})]-4u(x_i)-2u'(x_i)[h_{i+1}-h_i]}{h_{i+1}^2+h_i^2}+O(h_i,h_{i+1}).$$

同样 $[0,1]$ 被 N 等分, $h=h_{i+1}=h_i=1/N$,则把上式代入边值问题,有

$$-\frac{U_{i+1}-2U_i+U_{i-1}}{h^2}=f(x_i)+O(h).$$

此时这个边值问题的差分格式和有限元格式 (0.11)$'$ 是一致的. 系数矩阵也是对称的三对角阵.

在变分形式(0.4) 中,解 u 所在的空间称为试探函数空间,检验函数 v 所在的空间称为检验函数空间. 这里由于 u,v 所在的空间都是 V,故又称 V 为容许空间. 如果这两个空间不同,就导出不同的计算方法.

下面以有限体积法为例说明. 对于$[0,1]$,给出一组剖分 $\bar{\Omega}_h \triangleq \{x_0,x_1,\cdots,x_N\}, x_0=0, x_N=1, I_i$ 定义同前, $h_i=x_{i+1}-x_i$.

如记$[x_{i-1},x_i]$ 的中点为 $x_{i-1/2}$,则包含 x_i 的区间$[x_{i-1/2},x_{i+1/2}]$ 构成 x_i 的控制体或对偶剖分. 由边值问题(0.1)有

$$\begin{aligned}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}\left(-\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+\alpha u\right)\mathrm{d}x&=-\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}+\alpha u(x_i)(x_{i+1/2}-x_{i-1/2})+O(h^2)\\&=-\frac{u(x_{i+1})-u(x_i)}{h_i}+\frac{u(x_i)-u(x_{i-1})}{h_{i-1}}\\&\quad+\frac{\alpha(h_{i-1}+h_i)}{2}u(x_i)+O(h^2)\\&\overset{h=h_i}{=}\frac{-1}{h}(u_{i+1}-2u_i+u_{i-1})+\alpha hu_i+O(h^2).\end{aligned}$$

利用分部积分和差商代替微商,故

$$-\frac{1}{h^2}(u_{i+1}-2u_i+u_{i-1})+\alpha u_i=f_i$$

是问题(0.1)在 x_i 点处的有限体积法逼近方程. 如取检验函数空间为 $W\triangleq\{w\in L^2(0,1):w|_{I_i}$ 是k 次多项式, $w(0)=w(1)=0\}$. 与前面 S 的定义相同的是, w 是分片多项式,不同的是在节点 x_i 处, w 可能有间断,即跳跃间断. 由弱导数(广义导数) 的性质(见附录 A. 1) 易知, w 在 x_i 处的广义导数 Dw 为 w 的古典导数 w' 与 $Jw(x_i)$ 集中在 x_i 点处的测度之和,即

$$Dw(x)=w'(x)+Jw(x_i)\delta(x-x_i). \qquad (0.12)$$

这里 δ 是 Dirac 函数, $\int_\Omega f(x)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x=f(x_0)$,当 $f\in C(\Omega)$ 且 $x_0\in\Omega$ 时.

用 $w\in W$ 乘方程(0.1),设 $u\in C^2(0,1)\cap C^1([0,1])$,$Du=u'$,利用分部积分,有

$$\begin{aligned}\int_0^1(-u''+\alpha u)w\mathrm{d}x&=\int_0^1 u'Dw\mathrm{d}x+\alpha\int_0^1 uw\mathrm{d}x\\&=\int_0^1(u'w'+\alpha uw)\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^{N-1}\int_0^1 Jw(x_i)\delta(x-x_i)u'\mathrm{d}x\\&=\int_0^1(u'w'+\alpha uw)\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^{N-1}Jw(x_i)u'(x_i)\\&=a(u,w)+\sum_{i=1}^{N-1}[w(x_i^+)-w(x_i^-)]u'(x_i)\\&\triangleq\bar{a}(u,w),\end{aligned}\tag{0.13}$$

其中 $a(\cdot,\cdot)$ 与(0.2)中定义一样,而节点 x_i 处的跃度是由 w 在该点的不连续性产生的,此时边值问题(0.1)的变分形式为

$$\text{求 } u\in V,\text{使得 } \bar{a}(u,w)=(f,w),\qquad \forall w\in W.\tag{0.14}$$

而其相应的逼近形式为

$$\text{求 } u_S\in S,\text{使得 } \bar{a}(u_S,w)=(f,w),\qquad \forall w\in W.\tag{0.15}$$

这里 S 是定义在 Ω_h 上的,即 $S\triangleq\{v\in C^0([0,1]),v|_{I_i}$ 是线性的,$v(0)=v(1)=0\}=\mathrm{span}\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{N-1}\}$. 为了构造 W,重新给出一组剖分 $\mathscr{J}_h$,称为 $\bar{\Omega}_h$ 的对偶剖分,即由 $\bar{\Omega}_h$ 的两个端点 x_0,x_N 以及每个区间 I_i 的中点 $x_{i-1/2}=\dfrac{x_i+x_{i-1}}{2}$ 组成. $I_0^*=[x_0,x_{1/2}]$,$I_i^*=[x_{i-1/2},x_{i+1/2}]$,$1\leqslant i\leqslant N-1$;$I_N^*=[x_{N-1/2},x_N]$. W 为 $\mathscr{J}_h$ 上零次多项式(分片常数),即 $W\triangleq\{w\in L^2(0,1):w(x)=0,\ \forall x\in I_0^*$ 或 I_N^*,$w(x)=C,\ \forall x\in I_i^*,1\leqslant i\leqslant N-1\}=\mathrm{span}\{\psi_1,\cdots,\psi_{N-1}\}$. 而其基函数 ψ_i 定义为

$$\psi_i(x)=\begin{cases}1, & \forall x\in I_i^*,\\0, & \text{其他},\end{cases}\qquad 1\leqslant i\leqslant N-1.$$

注意 $\psi_i(x)$ 在 $x_{i\pm1/2}$ 处有跳跃间断,见图 0.1.

又由 $u_S=\sum_{j=1}^{N-1}U_j\varphi_j$ 和(0.15),有

$$\begin{aligned}\bar{a}(u_S,\psi_j)&\triangleq\int_0^1(u_S'\psi_j'+\alpha u_S\psi_j)\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^{N-1}u_S'(x_{i-1/2})[\psi_j(x_{i-1/2}^+)-\psi_j(x_{i-1/2}^-)]\\&=\alpha\int_{x_{j-1/2}}^{x_j}(U_{j-1}\varphi_{j-1}+U_j\varphi_j)\mathrm{d}x+\alpha\int_{x_j}^{x_{j+1/2}}(U_j\varphi_j+U_{j+1}\varphi_{j+1})\mathrm{d}x\\&\quad+U_{j-1}\varphi_{j-1}'(x_{j-1/2})+U_j\varphi_j'(x_{j-1/2})\\&\quad-U_j\varphi_j'(x_{j+1/2})-U_{j+1}\varphi_{j+1}'(x_{j+1/2})\\&=\frac{\alpha[h_{j-1}U_{j-1}+3(h_j+h_{j-1})U_j+h_jU_{j+1}]}{8}-h_{j-1}^{-1}U_{j-1}\end{aligned}$$

$$+(h_j^{-1}+h_{j-1}^{-1})U_j-h_j^{-1}U_{j+1}, \tag{0.16}$$

$$f_j \triangleq (f,\psi_j)=\int_0^1 f\psi_j\,\mathrm{d}x=\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} f\,\mathrm{d}x. \tag{0.17}$$

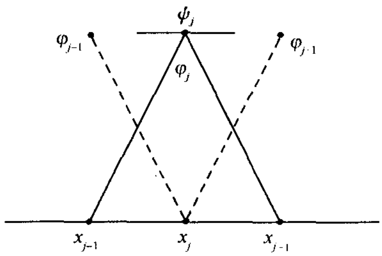

图 0.1

这样，(0.15)中第 j 个方程为

$$-\left(\frac{U_{j+1}-U_j}{h_j}-\frac{U_j-U_{j-1}}{h_{j-1}}\right)+\frac{\alpha}{8}\cdot[h_jU_{j+1}+3(h_j+h_{j-1})U_j+h_{j-1}U_{j-1}]=f(x_j), \tag{0.18}$$

或当 $f\in C^0([0,1])$ 时，有

$$\frac{2}{h_{j-1}+h_j}\left\{-\left(\frac{U_{j+1}-U_j}{h_j}-\frac{U_j-U_{j-1}}{h_{j-1}}\right)+\frac{\alpha}{8}[h_jU_{j+1}+3(h_{j-1}+h_j)U_j+h_{j-1}U_{j-1}]\right\}=f(x_j). \tag{0.19}$$

对第一个和第 $N-1$ 个方程中 U_0 和 U_N 用 c_0 和 c_1 代之.

如果将区间 $[0,1]$ 作 N 等分，$x_i=ih$，同样有

$$-\frac{U_{j+1}-2U_j+U_{j-1}}{h^2}+\frac{\alpha(U_{j+1}+6U_j+U_{j-1})}{8}=f(x_j). \tag{0.19$'$}$$

特别地，当 $\alpha=0$ 时，(0.19)$'$ 正好也是边值问题 $-\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}=f(x)$，$0<x<1$，$u(0)=c_0$，$u(1)=c_1$ 相应的差分方程，这与前面方法的结论一样.

以上讨论说明，对应于不同的变分形式，可以得出不同的数值计算方法.

除了计算方法的构造外，还需考虑数值方法的稳定性、收敛性和收敛精度. 例如，对前面讨论的方程(0.1)的变分形式(0.4)的有限元逼近(0.5)，其误差分析如下.

首先，由(0.4)和(0.5)有

$$a(u-u_h,v_h)=0,\qquad \forall v_h\in S\subset V=H_0^1(0,1). \tag{0.20}$$

又当 $\alpha>0$ 时，有

$$\min(1,\alpha)\,\|v\|_{1,2,\Omega}^2\leqslant a(v,v)\leqslant \max(1,\alpha)\,\|v\|_{1,2,\Omega}^2,\qquad \forall v\in V, \tag{0.21}$$

这里区间 $\Omega=(0,1)$，当 $\alpha=0$ 时，由 Poincaré 不等式，有

$$c_1\,\|v\|_{1,2,\Omega}^2\leqslant a(v,v)=|v|_{1,2,\Omega}^2\leqslant \|v\|_{1,2,\Omega}^2. \tag{0.22}$$

由(0.20)和 Cauchy 不等式，考察

$$\begin{aligned} c_2\,\|u-u_h\|_{1,2,\Omega}^2 &\leqslant a(u-u_h,u-u_h)=a(u-u_h,u-v_h+v_h-u_h)\\ &=a(u-u_h,u-v_h) \end{aligned}$$

$$\leqslant c_3 \| u-u_h \|_{1,2,\Omega} \| u-v_h \|_{1,2,\Omega}, \quad \forall v_h \in S,$$

故

$$\| u-u_h \|_{1,2,\Omega} \leqslant c_4 \inf_{v_h \in S} \| u-v_h \|_{1,2,\Omega}. \tag{0.23}$$

为了估计(0.23)式右端,设 $u \in C^0[0,1]$,定义 u 的插值

$$\Pi u = \sum_{i=1}^{N-1} v(x_i)\varphi_i(x) = \sum_{i=1}^{N-1} v_i\varphi_i(x). \tag{0.24}$$

注意到 $S=\mathrm{span}\{\varphi_1,\cdots,\varphi_{N-1}\}$,$\varphi_i(x_j)=\delta_{ij}$,有 $\Pi u \in S$. 故(0.23)可写为

$$\| u-u_h \|_{1,2,\Omega} \leqslant c \| u-\Pi u \|_{1,2,\Omega} \leqslant c \sum_{i=1}^{N} \| u-\Pi u \|_{1,2,I_i}. \tag{0.25}$$

下面在每一个 I_i 上估计(0.25). 记 $e_i=(u-\Pi u)|_{I_i}$,$e_i(x_{i-1})=e_i(x_i)=0$. $\| e_i \|_{1,2,I_i}=(\| e_i \|^2_{0,2,I_i}+| e_i |^2_{1,2,I_i})^{1/2}$. 首先 $e_i(x)=\int_{x_{i-1}}^{x} e'(s)\mathrm{d}s$,由 Hölder 不等式,易得

$$\| e_i \|_{0,2,I_i} \leqslant h_i \, | e_i |_{1,2,I_i}. \tag{0.26}$$

故只需估计 $| e_i |_{1,2,I_i}$,通过变换 $t=(x-x_{i-1})(x_i-x_{i-1})^{-1}$,把 $I_{i-1}=[x_{i-1},x_i]$ 变换到参考元 $T=[0,1]$ 之上. 由链导法有

$$\int_{I_i}\left(\frac{\mathrm{d}e_i}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{\mathrm{d}e_i}{\mathrm{d}t}\right)^2 h_i^{-2}h_i\mathrm{d}t=h_i^{-1}\int_0^1\left(\frac{\mathrm{d}e_i}{\mathrm{d}t}\right)^2\mathrm{d}t, \tag{0.27}$$

由 e_i 在 I_i 端点的性质知 $e_i(t)|_{t=0}=0$. 与(0.26)类似,由 $e'_i(t)=\int_0^t e''_i(s)\mathrm{d}s$,有 $| e_i |_{1,2,T} \leqslant | e_i |_{2,2,T}$. 故(0.27)可写为 $| e_i |^2_{1,2,I_i}=h_i^{-1}\, | e_i |^2_{1,2,T} \leqslant h_i^{-1}\, | e_i |^2_{2,2,T}=h_i^2\, | e_i |^2_{2,2,I_i}$. 最后一步是把 T 上估计变回到 I_i 上. 注意到 $e''_i(t)=h_i^2 e''_i(x)$ 可得. 但 $\Pi u \in S$,S 是分片一次多项式,故 $e''_i(x)=u''(x)|_{I_i}$. 综上所述,有

$$\| e_i \|_{1,2,I_i} \leqslant (h_i^2+1)^{1/2}\, | e_i |_{1,2,I_i} \leqslant ch_i\, | u |_{2,2,I_i}.$$

记 $h=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N} h_i$,则(0.25)变为

$$\| u-u_h \|_{1,2,\Omega} \leqslant ch\, | u |_{2,2,\Omega}. \tag{0.28}$$

这是误差的 $H^1(\Omega)$ 范数估计.

对于零范数,即 $L^2(\Omega)$ 范数,可利用 Aubin-Nitsche 技巧,考虑方程(0.1)的对偶边值问题

$$-\frac{\mathrm{d}^2 w(x)}{\mathrm{d}x^2}+\alpha w(x)=g(x), \qquad 0<x<1, \quad w(0)=w(1)=0, \tag{0.29}$$

其中 $\alpha \geqslant 0$ 是常数. 设其解 $w \in H^2(\Omega)$ 满足

$$\| w \|_{2,2,\Omega} \leqslant c \| g \|_{0,2,\Omega}, \tag{0.30}$$

取 $g(x)=u-u_h$,则由(0.20)和(0.21),$\forall v_h \in S$ 有

$$\| u-u_h \|^2_{0,2,\Omega}=(u-u_h,u-u_h)_0=(u-u_h,-w''+\alpha w)_0$$