

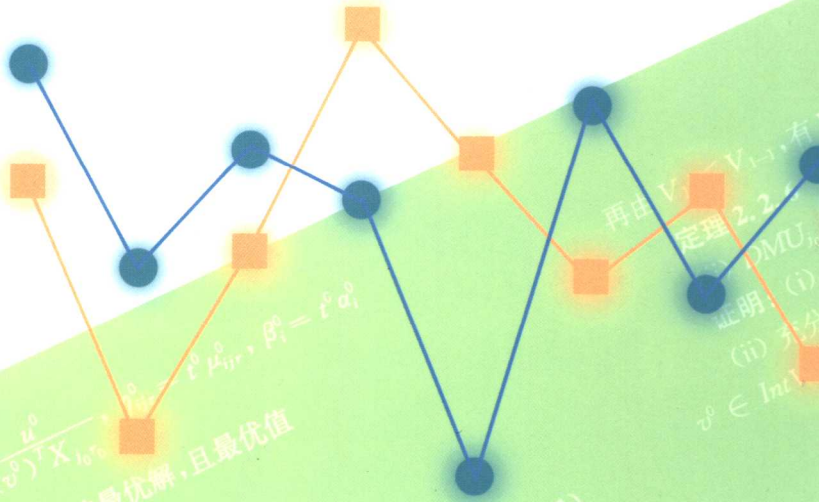


上海市科学技术协会
“晨光计划”资助出版

段永瑞 著

数据包络分析

——理论和应用



上海科学普及出版社

F224.12

8

2007

数据包络分析

——理论和应用

段永瑞 著

上海科学普及出版社

图书在版编目(CIP)数据

数据包络分析：理论和应用/段永瑞著. —上海：上海科学普及出版社，2006. 12

ISBN 7 - 5427 - 3309 - 5

I. 数... II. 段... III. 系统分析-数学模型
IV. N945. 12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 129822 号

责任编辑 刘瑞莲

数据包络分析

——理论和应用

段永瑞 著

上海科学普及出版社出版发行

(上海中山北路 832 号 邮政编码 200070)

各地新华书店经销 上海市印刷七厂有限公司印刷

开本 787×1092 1/16 印张 9.5 字数 226 000

2006 年 12 月第 1 版 2006 年 12 月第 1 次印刷

印数 1-1 500

ISBN 7-5427-3309-5/O · 191 定价：28.00 元

本书如有缺页、错装或坏损等严重质量问题
请向出版社联系调换

内 容 简 介

本书是关于数据包络分析(DEA)模型、理论和应用的专著,是作者近年来科研工作的总结。第一章主要对现有的系统评价方法、已有的 DEA 模型、DEA 的应用和存在的问题进行了分类和概括。第二章研究了具有独立子系统的复杂系统相对有效性评价问题,建立了体现决策者偏好的锥比率的 $C^2WH - ISS$ 模型、假设存在规模收益的评价系统纯技术有效性的 $C^2GS^2 - ISS$ 模型、允许组内合作的 $CIG - ISS$ 模型、允许组内和组间合作的 $CIAG - ISS$ 模型。第三章主要研究生产可能集的凸性限制问题,建立了当决策单元不相互独立时允许组内合作的拟凹 DEA 模型。第四章通过建立 $L - R$ 型模糊 DEA 模型,研究了模糊系统的相对有效控制问题。第五章针对数据包络分析中的几个细节问题,如权重限制、相对有效决策单元的评价、饱和等进行了研究。第六章至第八章研究了本书的模型在制造业、高校和银行评价中的应用。

本书可供从事与决策、评价和优化有关的经济、管理、数学等领域的科研与应用工作者阅读,也可作为大学高年级学生、研究生和教师的参考书。

“上海市科协资助青年学者出版科技 著作晨光计划”出版说明

“上海市科协资助青年学者出版科技著作晨光计划”由上海市科协和上海科技发展基金会主办,上海科学普及出版社协办。该计划定向资助 40 周岁以下的上海青年学者出版首部个人原创性科技著作,旨在支持和激励学有所成的上海青年学者著书立说,加快培养青年科技人才的成长,切实推动“科教兴市”战略的实施。该计划每年资助不超过 5 人,每人资助 1 500 册以内的出版费用。申请资助的作者需要通过其所在学会(协会、研究会)向上海市科协学术部推荐,申请表
下载网址: www.sast.stn.sh.cn。

前 言

在日常的工作和生活中,经常需要对同类事物或同一事物在不同时间的表现进行评价。最初,人们往往是用最终结果来评价事物发展的情况,但随着社会经济的进一步发展,评价的重心从单纯已经追求高产出而转向注重效益,即追求以尽量少的投入而得到较高的产出,并且已经由仅利用结果进行评价转向多指标综合评价。多指标综合评价方法,即把反映被评价事物的多个指标的信息综合起来,得到一个综合指标,由此来反映被评价事物的整体情况,并进行横向和纵向的比较。这样做既有全面性,又有综合性。近年来,随着其他领域相关知识的不断引入,多指标综合评价理论也在不断丰富和发展,并出现了各种各样的评价方法,如模糊综合评价方法、主成分分析方法、因子评分法、判别分析法、聚类分析法、熵值法、灰色关联度法,以及数据包络分析方法等。

数据包络分析(Data Envelopment Analysis, 简称 DEA)是以相对效率概念为基础,以数学规划为主要工具,以优化为主要方法,根据多指标投入和多指标产出数据对相同类型的单位(部门或企业)进行相对有效性或效益评价的多指标综合评价方法。自从1978年著名运筹学家 Charnes, Cooper, Rhode 首先提出 C^2R 模型并用于评价部门间的相对有效性以来,数据包络分析方法不断得到完善并在实际中被广泛运用,特别是在对非纯盈利的公共服务部门,如学校、医院、某些文化设施等的评价方面均被认为是一种有效的方法。

近二十年来,已经发表的关于 DEA 的研究论文、工作报告等达数千篇。某些运筹学或经济学的重要刊物,如: *Annals of Operational Research*, *European Journal of Operational Research*, *Journal of Productivity Analysis*, *Journal of Econometric* 等都出版了 DEA 研究的特刊。中国学者最早从事 DEA 的研究开始于 1986 年,并于 1988 年公开出版了第一本关于 DEA 的专著,他们在 DEA 的理论、模型、软件以及应用方面的许多研究成果在国际上都受到了好评。DEA 方法已经引起国内外学者的广泛关注,理论研究和实践应用方兴未艾。数学、经济学和管理学是这一研究领域形成的基础,优化是其研究的主要方法,而 DEA 的广泛应用是其得以迅速发展的动力。虽然 DEA 的理论研究结果已经比较丰富,应用范围也在不断扩大,但是其自身的理论和方法还有许多方面需要深入的研究和完善。本书主要是对数据包络分析研究中存在的某些问题,如复杂性问题、生产可能集的限制问题、权重的限制问题、饱和问题、相对有效的 DMU 的进一步分析、不确定性问题等进行了研究,并应用这些模型和结果对我国制造业、银行、高等院校等进行了评价。

本书的完成得到了上海市科协和上海市科技发展基金会的晨光计划、上海市教育科学基金项目(A0408)、同济大学工科基金项目(1200219052)、同济大学文科基金项目(1200219068)的资助,在此一并表示衷心的感谢。本书是一本关于数据包络分析

(DEA)模型、理论和应用的专著,是作者在攻读博士学位期间及后续研究工作的总结,非常感谢导师上海交通大学田澎教授多年来的悉心指导,非常感谢同济大学霍佳震教授在本书撰写过程中给予的指导和帮助,同时我也非常感谢同济大学经济与管理学院各位领导和老师的支持和帮助,使得本书得以完成。另外,非常感谢上海市科协的傅勇老师、上海科学普及出版社的刘瑞莲老师在本书出版过程中的热情帮助。

由于数据包络分析理论和应用在不断的发展中,书中的一些成果和结论也在发展中,加之作者才疏学浅,书中难免有不妥与错误之处,恳请各位读者和专家予以批评和指正。

段永瑞

2006年10月于同济大学

目 录

| | |
|---|----|
| 第一章 绪论 | 1 |
| 1.1 系统评价方法概述 | 1 |
| 1.1.1 系统评价问题 | 1 |
| 1.1.2 系统评价方法 | 2 |
| 1.2 数据包络分析(DEA)概述 | 4 |
| 1.2.1 第一个模型 | 5 |
| 1.2.2 模型的扩展 | 6 |
| 1.2.3 模型的应用 | 9 |
| 1.2.4 研究存在的主要问题 | 13 |
| 1.2.5 本书的主要研究内容 | 14 |
| 1.2.6 本书的创新点 | 14 |
| 第二章 具有独立子系统的 DEA 模型 | 16 |
| 2.1 问题的提出 | 16 |
| 2.2 具有独立子系统的 C^2WH 模型 $C^2WH - ISS$ | 18 |
| 2.2.1 问题的提出 | 18 |
| 2.2.2 模型研究 | 20 |
| 2.2.3 数值算例 | 24 |
| 2.3 具有独立子系统的 C^2GS^2 模型 $C^2GS^2 - ISS$ | 26 |
| 2.3.1 问题的提出 | 26 |
| 2.3.2 模型研究 | 27 |
| 2.3.3 数值算例 | 32 |
| 2.4 具有独立子系统的组内合作模型 $CIG - ISS$ | 36 |
| 2.4.1 问题的提出 | 36 |
| 2.4.2 模型研究 | 37 |
| 2.5 具有独立子系统的组内及组间合作模型 $CIAG - ISS$ | 39 |
| 2.5.1 问题的提出 | 39 |
| 2.5.2 模型研究 | 40 |
| 2.6 小结 | 45 |

| | |
|---|----|
| 第三章 允许组内合作的拟凹 DEA 模型 | 46 |
| 3.1 问题的提出 | 46 |
| 3.2 组内合作的拟凹 DEA 模型 | 47 |
| 3.3 数值算例：银行网点合作问题 | 47 |
| 3.4 小结 | 50 |
| 第四章 基于 DEA 的模糊系统相对有效控制 | 51 |
| 4.1 问题的提出 | 51 |
| 4.2 $L-R$ 型区间数及其偏序关系 | 51 |
| 4.3 模型研究及实现方案 | 52 |
| 4.4 数值算例 | 56 |
| 4.5 小结 | 57 |
| 第五章 数据包络分析中几个细节问题的研究 | 58 |
| 5.1 问题的提出 | 58 |
| 5.2 权重限制 | 58 |
| 5.2.1 复合标度 AHP 限制法 | 59 |
| 5.2.2 客观限制法 | 60 |
| 5.3 相对有效决策单元的评价 | 61 |
| 5.4 饱和现象的研究 | 64 |
| 5.4.1 相对有效性评价 | 64 |
| 5.4.2 饱和性分析 | 66 |
| 5.4.3 具体问题的处理 | 66 |
| 5.5 小结 | 67 |
| 第六章 我国部分省、市及区域制造业发展效率评价的研究 | 68 |
| 6.1 问题的提出 | 68 |
| 6.2 我国部分省、市制造业运作效率评价 | 68 |
| 6.3 我国区域制造业合作效率评价 | 71 |
| 6.3.1 方法介绍 | 72 |
| 6.3.2 结果分析 | 74 |
| 6.4 小结 | 80 |
| 第七章 我国部分高校科研管理效率评价的研究 | 81 |
| 7.1 问题的提出 | 81 |

| | | |
|-------------|--------------------------------|------------|
| 7.2 | 复合标度 AHP 权重限制的高校科研管理效率评价 | 83 |
| 7.2.1 | 方法介绍 | 83 |
| 7.2.2 | 结果分析 | 84 |
| 7.3 | 不同权重限制下高校科研管理效率评价 | 85 |
| 7.3.1 | 方法介绍 | 86 |
| 7.3.2 | 结果的总体分析 | 90 |
| 7.3.3 | 结果的个体分析 | 90 |
| 7.4 | 高校科研管理效率综合评价 | 93 |
| 7.4.1 | 方法介绍 | 93 |
| 7.4.2 | 结果分析 | 93 |
| 7.5 | 百所高校科研管理效率评价 | 97 |
| 7.5.1 | 效率对于参考集合的稳定性 | 97 |
| 7.5.2 | 效率对于指标的稳定性 | 104 |
| 7.5.3 | 效率与综合得分的相关性 | 111 |
| 7.6 | 小结 | 113 |
| 第八章 | 我国部分银行裁判员对绩效影响的评价 | 115 |
| 8.1 | 问题的提出 | 115 |
| 8.2 | 裁判员绩效评价研究 | 116 |
| 8.3 | 小结 | 126 |
| 参考文献 | | 128 |

第一章 绪 论

按照现代系统研究开创者贝塔朗菲的定义^[1],系统是相互作用的多元素的复合体。

对系统进行综合评价一直是人们研究和关注的热点。无论是微观层面的商品购买、卫星运行状况分析,还是宏观层面的社会经济的可持续发展评价等,所有这一切都离不开对系统进行综合评价。在日常生活中,我们经常会遇到综合评价问题。设想你是一个消费者,需要购买一套商品房时,你会怎样做?显然,你会先了解一下目前市场上出售的各种现房和现房的情况,比如,房屋的质量、价格、地段、周围环境、交房日期以及开发商的信誉等,然后再根据自身的经济状况和工作地点等从中选择一套你认为总体上比较合适的商品房。在实际工作中,经常会遇到一个单位对下属各子单位进行评价、考核的问题。例如,某总公司要通过选择相关指标,如产品销售率、流动资金周转次数、资金利税率、全员劳动生产率、成本利润率并结合各子公司的创新能力等,对其管理的各个子公司进行综合评价,目的是应用较为科学的方法为公司制定下一步的发展规划以及投资方向提供可行的方案。又如,国家通过对不同地区或不同时期的国民经济效益进行综合评价,以实现经济的宏观调控,保持国民经济持续稳定的增长。综上所述的关于个人投资、企业管理、国民经济的发展所要解决的问题在很大程度上都涉及到系统评价。因此,对系统评价方法进行研究无论从现实的维度还是从理论的向度都具有重要的意义。

1.1 系统评价方法概述

1.1.1 系统评价问题

系统评价是系统科学研究评价理论的一个重要分支,它借助于科学的方法和手段对系统的目标、结构、环境、输入与输出、功能、效益等要素构建指标体系,建立评价模型,经过计算和分析,对系统的经济性、社会性、技术性、可持续性等进行综合评价,从而为决策提供科学的依据,其研究对象通常是自然、社会、经济等领域中的同类系统或同一系统在不同时期的表现。

具体来说,系统评价问题一般表现为以下几类:

第一类问题是对所研究的系统进行分类,即把多个系统中具有相同或相近属性的系统归为一类,有利于进行科学的管理。

第二类问题表现为对上述分类的序化,即在第一类问题基础上对各小类按照优劣排出顺序。

第三类问题表现为对某一系统做出整体评价。对于每一个评价对象,通过综合评价和比较,可以找到自身的差距,从而有利于及时采取措施。

1.1.2 系统评价方法

常用的系统评价方法主要有^[2~4]：

- ① 多指标综合评价方法；
- ② 功效系数法；
- ③ 可能-满意度法；
- ④ 多维标度法；
- ⑤ 经济分析法；
- ⑥ 专家咨询法；
- ⑦ 理想点法；
- ⑧ 其他系统评价方法：如交叉增援矩阵法、连环比率法、层次分析法、不确定评价法等。

在以上几类方法中，最常用的是多指标综合评价法。

多指标综合评价方法是把多个描述被评价事物不同方面的多个指标的信息综合起来，并得到一个综合指标，由此来反映被评价事物的整体情况，并进行横向和纵向比较。

多指标综合评价方法按照所应用的理论和使用的工具又可以分为^[2]：

1. 常规多指标综合评价方法

常规方法是指不涉及模糊数学、运筹学、多元统计分析等其他学科知识的系统评价方法。包括加权算术平均、加权几何平均、算术平均与几何平均联合使用等这一类方法。它们也是在各类文献中经常可见到的方法。

2. 灰色关联度法

灰色系统理论认为：人们对客观事物的认识具有广泛的灰色性，即信息的不完全性和不确定性，因而由客观事物所形成的是一种灰色系统，即部分信息已知、部分信息未知的系统。比如，社会系统、经济系统、生态系统等都可以看做是灰色系统。因而，人们可以借助于灰色系统的相关理论来研究综合评价问题。灰色关联度法是应用灰色关联分析，并通过判断比较序列与参考序列的关联度的大小对比较序列进行排序。

3. 模糊综合评价法

模糊综合评价是以模糊数学为基础，应用模糊关系合成的原理。它是将一些边界不清、不易定量的因素定量化，进行综合评价的一种方法。模糊综合评价主要分为主观指标模糊评判和客观指标模糊评判。该方法对数据的要求较低且计算量小，适用于对不确定性问题的研究，如风险控制等。

4. 多元统计综合评价方法

多元统计综合评价方法是建立在多元统计分析理论基础上的多指标综合评价方法，也是较为常用的评价方法之一。多元统计评价方法主要有主成分分析法、因子分析法、判别分析法、聚类分析法等。

(1) 主成分分析法：有些多指标评价问题，指标数量较多，而且其中某些指标还存在相关关系，给综合评价带来了较大的困难。主成分分析法正是把这种情况简化，从实际需要出发提取几个相互无关、信息不重叠的综合指标并尽可能多地反映原有指标信息。主成分分析的主要原理是：将原有的数量较多的且存在相关关系的指标变量经过变换，转化为由

原指标变量的线性组合构成的新指标变量,新指标变量数量较少、相互无关,且保持了原指标变量的主要信息量,新指标变量称为原指标变量的主成分。

(2) 因子分析法: 因子分析是通过研究众多变量之间的内部依赖关系,探求观测数据中的基本结构,并用少数几个假想变量来表示基本的数据结构。这些假想变量能够反映原来众多的观测变量所代表的主要信息,并解释这些观测变量之间的依存关系。因子分析是主成分分析的推广和发展,它是将具有复杂关系的变量(或样品)综合为数量较少的几个因子,以再现原始变量与因子之间的相互关系,同时根据不同因子还可以对变量进行分类。

(3) 判别分析法: 判别分析是用于判别个体所属群体的一种统计方法,它产生于 20 世纪 30 年代。其特点是根据已掌握的每个类别的若干样本的数据信息,总结出客观事物分类的规律性,如分布函数,并建立判别准则。当遇到新的样本点时,只要根据总结出来的判别准则就能判断该样本点所属的类别。判别分析通常结合其他方法,如聚类分析等进行综合评价。

(4) 聚类分析法: 聚类分析是数值分类学的基本内容,是对统计样本进行定量分类的一种多元统计分析方法。将这种方法应用于综合评价,一方面可以对分类评价问题给出直接的评价结果;另一方面也为其他综合评价方法,如判别分析提供训练样本,形成综合评价的框架结构,以提高综合评价的效果。

5. 基于小波网络的模式识别法

模式识别法是在统一的指标类型基础上,利用评价指标的无量纲数据,通过小波网络的学习得到专家知识,建立由评价指标属性值到综合评价值之间的非线性映射关系。在对其他类似问题进行评价时,只需输入待评价对象的指标数据向量,即可通过网络计算得到其综合评价值,从而达到自动运行、快速评价及决策支持的目的。

6. 以数据包络分析为代表的基于运筹学的综合评价方法

数据包络分析是以相对效率概念为基础,以数学规划为主要工具,以优化为主要方法,根据多指标投入和多指标产出数据对相同类型的单位(部门或企业)进行相对有效性或效益评价的一种新方法。该方法通过建立规划模型来达到对决策单元进行评价的目的,本质上是来判断决策单元是否处于生产前沿面上,主要优点是可以对各个投入特别是多个产出的问题进行评价,并且在评价时无需事先给出生产前沿面。自从 1978 年著名运筹学家 Charnes, Cooper, Rhode^[4] 首先提出 C^2R 模型并用于评价部门间的相对有效性以来,数据包络分析方法不断得到完善并在实际中被广泛运用,特别是在对非纯盈利的公共服务部门,如学校、医院、某些文化设施等的评价方面均被认为是一种有效的方法。

除了上面提到的几种评价方法外,多指标综合评价法还包括距离综合评价法、协商评价法、动态综合评价法、立体综合评价法等^[5]。

迄今为止,各种各样的系统评价方法虽然已相继出现并进行了相应的诸多研究,但这并不意味着系统评价方法的理论已经完善,还有许多问题正处于不断的探索和研究中。本书将对其中一种评价方法——数据包络分析以新的视角,从多个维度进行深入的理论研究,通过构建新的模型对该方法进行细微的剖析,并将其运用到制造业、高校、银行等行业的实际评价问题中。

系统评价方法的关联图如图 1.1 所示。

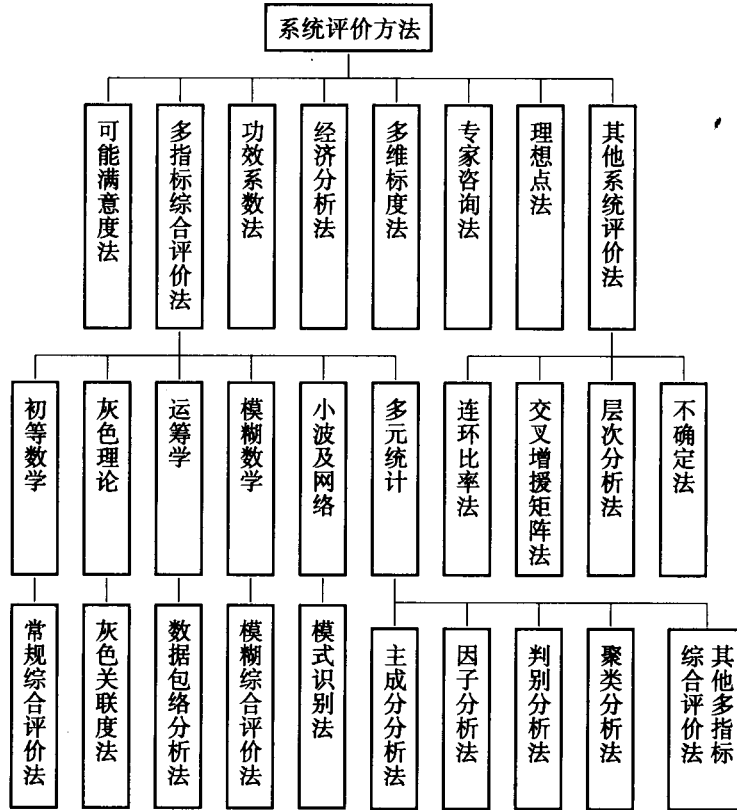


图 1.1 系统评价方法

Figure 1.1 Method for system evaluation

1.2 数据包络分析(DEA)概述

数据包络分析(Data Envelopment Analysis,简称 DEA)自 1978 年由查恩斯(Charnes)等学者^[6]提出至今已有二十多年的历史。它把单输入、单输出的工程效率概念推广到了多输入,特别是多输出的同类型决策单元(Decision-Making Units 简称 DMU)的有效性评价中。DEA 是应用数学规划模型来评价具有多个输入和多个输出的“部门”或“单位”的相对有效性的。根据各 DMU 的观察数据判断其是否有效,本质上是判断 DMU 是否位于生产可能集的“前沿面”上。应用 DEA 方法和模型可以确定生产前沿面的结构,因此又可以将 DEA 看作是一种非参数的统计估计方法。特别当 DEA 被用来研究多输入、多输出的生产函数理论时,由于不需要预先估计参数,因而在避免主观因素和简化算法、减少误差等方面有着巨大的优越性。

近二十年来,已经有数以千计关于 DEA 的研究论文、工作报告等发表。某些运筹学或经济学的重要刊物,如: *Annals of Operational Research*, *European Journal of Operational Research*, *Journal of Productivity Analysis*, *Journal of Econometric* 等都出版了 DEA 研究的特刊。中国学者从事 DEA 的研究开始于 1986 年,并于 1988 年公开出版了第一本关于 DEA 的专著^[7],他们在 DEA 的理论、模型、软件以及应用方面的许多研究成果在国际上均受到了好评,并于 1996 年出版了第二本专著^[8]。DEA 方法已经引起国内外学者的广泛关注,理论研究

和实践应用方兴未艾。数学、经济学和管理学是这一研究领域形成的基础,优化是其研究的主要方法,而 DEA 的广泛应用是其得以迅速发展的动力。

1.2.1 第一个模型

早在 1951 年, Koopmans^[9] 就提出了有效性度量的概念, 1957 年经济学家 Farrell^[10] 提出了单输入单输出 DMU 的有效性度量方法。但是, 在实际应用中, 人们常常会遇到多输入和多输出情形。特别是对于多输出的生产过程, 很难用已有的方法解决。时隔二十多年后, 在 1978 年, 著名的运筹学家 Charnes, Cooper, Rhode^[6] 运用数学规划模型将有效性度量方法推广到多输入、多输出情形, 提出了 C^2R (三位作者姓的第一个字母) 模型。

假设有 n 个 DMU, $DMU_1, DMU_2, \dots, DMU_n$, 每个 DMU 有 m 种输入和 s 种输出, DMU_j 的输入和输出向量分别为 $x_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj})^T$, $y_j = (y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{sj})^T$, $j = 1, 2, \dots, n$ 。

设 DMU_{j_0} 的输入、输出为 (x_{j_0}, y_{j_0}) , 这里简记为 (x_0, y_0) , 评价 DMU_{j_0} 相对有效性的 C^2R 模型为:

$$\begin{cases} \max \frac{u^T y_0}{v^T x_0} \\ \text{s. t. } \frac{u^T y_j}{v^T x_j} \leq 1 \\ u \geq 0, v \geq 0 \textcircled{1} \end{cases} \quad (1.2.1)$$

其中 $v = (v_1, v_2, \dots, v_m)^T$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_s)^T$ 分别为 m 种输入和 s 种输出的权系数。利用 Charnes 和 Cooper^[11] 关于分式规划的 Charnes-Cooper 变换:

$$t = \frac{1}{v^T x_0}, \omega = tv, \mu = tu,$$

可将分式规划模型化为等价的线性规划模型(1.2.2):

$$(P_{C^2R}) \begin{cases} \max \mu^T y_0 = h_0 \\ \text{s. t. } \omega^T x_j - \mu^T y_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \\ \omega^T x_0 = 1 \\ \omega \geq 0, \mu \geq 0 \end{cases} \quad (1.2.2)$$

$$(D_{C^2R}) \begin{cases} \min \theta \\ \text{s. t. } \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j + s^- = \theta x_0 \\ \sum_{j=1}^n y_j \lambda_j - s^+ = y_0 \\ \lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n, \theta \in E^1 \end{cases} \quad (1.2.3)$$

注① $v \geq 0$ 表示 v 的每个分量 $v_i \geq 0$, 但至少有一个严格大于 0。

模型(1.2.2)的对偶模型为(1.2.3)。

定义 1.2.1 若 (P_{C^2R}) 的最优解 ω_0, μ_0 满足 $\mu_0^T y_0 = 1$, 则称 DMU_{j_0} 为弱 DEA 有效。

定义 1.2.2 若 (P_{C^2R}) 的最优解 ω_0, μ_0 满足 $\mu_0^T y_0 = 1$, 且 $\omega_0 > 0, \mu_0 > 0$, 则称 DMU_{j_0} 为 DEA 有效。

定义 1.2.3 若 (D_{C^2R}) 的最优值 $\theta_0 = 1$, 且每一个最优解 $s^-, s^+, \theta_0, \lambda_{0j}, j = 1, 2, \dots, n$ 都满足 $s^{0+} = 0, s^{0-} = 0$, 则称 DMU_{j_0} 为 DEA 有效。

由定义 1.2.1~1.2.3 可知, 在应用模型 (P_{C^2R}) 和 (D_{C^2R}) 评价 DMU 是否为 DEA 有效时并不直接, 而且计算也很繁琐。早在 1951 年, Charnes 在处理线性规划的退化问题时, 就在非 Archimedes 域上引入了非 Archimedes 无穷小的概念, 给出了摄动法。对于模型 (D_{C^2R}) , Charnes 和 Cooper 给出了相应的具有非 Archimedes 无穷小量 ϵ 的模型:

$$(D_{C^2R}^\epsilon) \left\{ \begin{array}{l} \min[\theta - \epsilon(\hat{e}^T s^- + e^T s^+)] \\ s. t. \quad \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j + s^- = \theta x_0 \\ \quad \quad \sum_{j=1}^n y_j \lambda_j - s^+ = y_0 \\ \quad \quad \lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n, \theta \in E_1^+, s^+ \geq 0, s^- \geq 0 \end{array} \right.$$

其中 $\hat{e} = (1, 1, \dots, 1)^T \in E_m^+, e = (1, 1, \dots, 1)^T \in E_r^+$

定理 1.2.1 若 $(D_{C^2R}^\epsilon)$ 的最优解 $\theta_0, \lambda_{0j}, j = 1, 2, \dots, n, s^-, s^+$ 满足 $\theta_0 = 1, s^- = 0, s^+ = 0$, 则 DMU_{j_0} 为 DEA 有效。

这样在应用模型 $(D_{C^2R}^\epsilon)$ 评价有效性时, 不必再验证每个最优解都满足 $s^{0+} = 0, s^{0-} = 0$, 从而大大简化了计算。

1.2.2 模型的扩展

1. 综合的 DEA 模型

从生产函数的角度看, Charnes 等提出的 C^2R 模型是用来研究具有多个输入和多个输出的 DMU 同时为技术有效和规模有效的十分理想且卓有成效的方法。之后, 在考虑规模收益的条件下, Bank 等^[12], Färe 和 Grosskopf^[13], Seiford 和 Thrall^[14] 分别给出了称为 BC^2, FG 和 ST 的模型, Yu 等^[15] 进行了总结并给出了综合的 DEA 模型。

2. 加法模型和 log 型模型

早在 1961 年, Charnes 和 Cooper 在求解第一个具有实际背景但没有可行解的线性规划问题时就引入了目标规划(goal programming), 其中包括正负偏差变量, 后来发展成为灵活地将正负偏差变量引入到目标函数中, 可以处理含有不同目标的多目标问题。基于上述思想, Charnes 等^[16] 给出了加法模型。在利用加法模型判断 DMU 的 DEA 有效性时, 可以绕开引入非 Archimedes 无穷小量 ϵ 在计算上所带来的不便, 同时也可以像 $(D_{C^2R}^\epsilon)$ 模型中那样得到 DMU 在生产前沿面上的投影。

考虑到利用当时的一些 DEA 模型得到的生产函数均为分段线性的, Charnes 等^[17] 给出了 log 型 DEA 模型, 但是该模型并不是关于输入、输出单位不变的 (unite invariant)。

Charnes 等^[18]则通过应用凸性限制来满足变换不变性,它是将原始数据 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 和 $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ 变换到 $(\log X, \log Y)$,再使用 C^2R 和 BC^2 加法模型进行计算。之后,有许多学者都在变换不变性方面做了一些有意义的工作^[19, 20]。2000 年,魏权龄等^[21]建立了综合的加法模型,并得到了一系列重要的结论。

3. 锥比率的 DEA 模型

在最初提出的一些 DEA 模型中,对指标权系数都没有任何限制,这样就有可能导致某些具有特大权系数的 DMU 被判定为相对有效的,从而影响了该方法判断的准确性。实际上,从 DEA 的第一个模型建立以后,从事多目标规划研究的学者们就曾提出异议,认为 DEA 模型中没有能够体现决策者的偏好。基于上述考虑,Charnes 等^[22]推广了 C^2R 模型,得到了体现决策者偏好的锥比率的 C^2WH (Charnes, Cooper, Wei, Huang)模型, Yu 等^[15]则给出了更一般的具有锥结构的综合的 DEA 模型。

4. 具有无穷多个 DMU 的 DEA 模型

通常的 DEA 模型涉及到的都是具有有限个 DMU 的系统,Charnes 等将这种方法进行了推广,给出了具有无穷多个 DMU 的半无限规划的 DEA 模型 C^2W ^[23] 和 C^2WY ^[24]。之后, Huang 等^[25]则给出了更一般的情形。半无限规划也是 Charnes 等创建的一个数学规划领域, C^2W 是国际上第一个非线性的 DEA 模型,它揭示了 DEA 在数学上和经济上的含义,被认为“提出了一个精美的研究结构,并且对统计方面的研究给出了一个分析基础^[7]”。

5. 机会约束的 DEA 模型

机会约束规划(chance constrained programming)是 1958 年由 Charnes 和 Cooper 提出来的,是随机规划的一个重要而实用的分支。在 DEA 模型的研究中,随机 DEA 模型和具有锥结构的 DEA 模型曾被认为是两个重要的研究方向^[26], Sengupta^[27]将比率 C^2R 模型推广到输入、输出为不确定性的情形。之后,许多学者都在这方面进行了深入研究^[28~31]。Huang 和 Li^[32]在研究所有的输入、输出均为随机变量时,给出了随机非占优点(stochastically nondominated point)的概念,并由此得到了重要的机会约束的 DEA 模型,同时也证明了一些重要的结论。

之后,也有一些学者对随机模型从不同的角度进行了研究。1998 年, Li^[33]应用机会约束规划进行了相对有效性评价。曾祥云等^[34, 35]基于随机条件下 DMU 期望有效性指数的概念,提出了对 DMU 进行相对有效性评价的期望值方法。

6. 动态 DEA 模型

传统的 DEA 模型是将整个生产过程看成是在一个“黑箱”中进行的,通过这个“黑箱”输入转化成输出。事实上,早在 1970 年, Shephard 和 Färe^[36]就对动态的生产过程作过研究。1995 年, Färe 等^[37]给出了动态 DEA 模型,即 t 时刻的输出可以作为 $t + 1$ 时刻的输入(中间输入)。之后在文^[38, 39]中,作者又研究了当同一种生产资料用于不同的子生产过程时的情形并给出了相应的模型。2000 年, Färe 和 Grosskopf^[40]对上述 3 种模型进行了系统总结。其他学者也在这方面做了许多工作,如文^[41~45]等所述。

7. 逆 DEA 模型

近几年来,关于逆最优化问题的研究已有很多^[46~50]。通常的优化问题是在参数已知的条件下找出目标函数的最大值或最小值,而逆最优化问题则是应用最优解来决定参数值,或者是对于给定参数条件下的非最优解,如何尽可能小地调整参数,使得该非最优解变成最优