高等物理學實驗

王濟仁著

臺灣中華書局印行

編輯大意

一、 本書編輯物理學上諸實驗方法,作爲大學理工學院學生之物理實驗指導書,或中學校物理教員之參考書.

二、 本書各實驗多分原理,裝置,方法,舉例及推論五項說明,以清眉目而便實施.間附一二問題,促讀者深省.

三、 本書所用公式,除物理學中習見者外,均附證明,可毋須搜尋其他書籍參考,最便自修.

四、 本書各實驗所用儀器,以簡便而能得精確結果者爲主,啓發讀者創造新儀器之思想能力.

五、 本書所用物理學上名詞,均以教育部公布者爲準,並各附英語原名,俾資對照.

六、 本書各實驗說明圖,曾經力求簡潔,多採自參考各書,而以自己所繪者補之.蓋以此類書讀者;宜一邊看圖,一邊讀文句之意.圖如不清,意卽晦而難明.

七、 本書原就編者在廣東勷勤大學數理化系所授物理學實驗講義,課餘增補而成.罣誤之處,在所不免,希望海內專家,不惜教正.

八、 本書各物理學實驗,以二人合作爲原則,其結果報告,則須各人分作,所以練習整理各測定值之方法.

九、 本書編輯中,參考最多之書如下:

1. Watson: A Textbook of Practical Physics.

2. Ingersoll and Martin: Experiments in Physics.

3. Ferry, E. S. : A Hand-book of Physics Measurements.

4. Caswell, A. E. : Experimental Physics.

5. Ames and Bliss : A Manual of Experiments in Physics.

6. 松本楢治,片岡秀吉:物理學實驗基礎.

7. 大久保準三:實驗測定法及實驗器械.

8. 早川金之助：物理實驗測定法.

9. 眞島正市：應用物理學實驗.

10. 中村清二：物理實驗法.

11. 薩本棟：普通物理學實驗.

特附誌以表謝意.

高等物理學實驗

緒　　論

一、　物理學實驗之目的

1. 體驗物理學之法則及其對於實際問題之應用，以期物理學理論之實際化.

2. 學習測定機械及器具之使用法，養成測定 (Measurement) 上之技術.

3. 涵養學者觀察物理現象.加以分析，令爲單純化，歸納其現象中所包含之自然現象.

二、　實驗種類

宇宙間所有生滅諸現象，原非孤立，相互間常有多少關係. 而此等關係，並非平等，依據現象，顯異其疎密程度.

實驗之目的，在發見與研究事項 x 有密接關係諸現象 y,z,u,ν 等，卽尋求 x 與 y,z,u,ν 等有如何關係，至如何程度.換言之，實驗先須發見研究現象中所含諸量(Quantity)之種類 y,z,u,ν 等，次尋求諸量間應成立關係式 $x=f(y,z,u,\nu,\cdots)$ 之函數形 f.前者稱**定性實驗**(Qualitative experiments)，後者稱**定量實驗**(Quantitative experiments).

仰山之高，眺海之寬，僅爲定性研究，不能謂已得其眞知識也.必用適當單位測高或寬，以附記之單位數表之始佳. 同理，函數 f 形狀之決定，必由關係諸量 x 及 y,z,u,ν 之測定，纔得完成.從而實驗的研究，在將關係諸量中，作精密測定耳.

三　測定之誤差

量之測定，無關於其種類如何，觀察値依種種原因，常與眞正絕對

値有多少差異.蓋無論如何選擇實驗方法,使用精良器械，其測定値最後之決定,仍基於觀測者之觸覺、視覺、或聽覺等感覺，故測定結果,不能爲絕對精確.

絕對値(Absolute value)與**觀察値**(Observed value)之差稱**絕對誤差**(Absolute error),或單稱誤差，以觀察値除絕對誤差之商稱**相對誤差**(Relative error),其以百分數表示者,稱**百分數誤差**(Percentage errors).觀察値之精粗,不在乎絕對誤差之大小,而依於相對誤差之多寡.即以相對誤差愈小,其實驗愈精密.

不知絕對値時,常以幾回實驗結果之**平均値**(Mean value)代之.

次就誤差之起因,分誤差爲幾種如下:

- **誤差**
  - **系統誤差**(Systematic error)
    - **理論的**(Theoretical)
    - **機械的**(Instrumental)
    - **個人的**(Personal)
  - **偶然誤差**(Accidental error)
    - **失錯的**(Mistaken)
    - **必然的**(Erratic)

理論的誤差　當尋求不能直接測定之某量x,先測定與有密接關係而易測定之量y,次用x與y間之關係式算出x時,若所用關係式，含有理論上之誤差,則無論如何精測y,終於其結果生成誤差,謂之理論的系統誤差.

機械的誤差　實驗所用之機械及器具,未能完全正確,則其測定結果,自生誤差,謂之機械的系統誤差.

個人的誤差　測定上之判斷,旣由於觀測者之感覺,則依個人神經之敏鈍,性質之粗細,於各人之觀察値,含各人各樣之誤差,謂之個人的系統誤差.

失錯的誤差　系統的誤差,雖由適當注意與方法得以除去,然觀察値中仍含有偶然的誤差.若誤讀分度或錯認事實等所起誤差,謂之失錯的誤差.此失錯的誤差,還可以使用其他部分分度等不同方法，反覆實

驗避免之.

必然的誤差　以上四種誤差,雖各依其起因,講求適當補正或適當方法得除去之.實則尚有未盡之處,即如充分吟味機械與方法,選擇精良機械,同一人使用同樣機械,測相同一量,其結果每次有多少差異.如斯結果之不一致,全爲必然性的偶然而起,且其原因究難探討.此不可解之誤差,稱必然的偶然誤差.

討論含必然的偶然誤差之觀察值,求誤差最小之結果,且算出其結果之**準確度**(Accuracy)者,即所謂**誤差論**(Theory of errors)也.次述誤差論之大體結果.

四、　平均值

以同一方法,幾回獨立測定同一之量,如得許多相異結果,實毫無理由可認其中之任何一値爲正或誤.斯時只有信賴各結果之平均值,較各結果爲妥當也明矣.換言之**平均值**(Mean value)得認爲各個值中最爲近眞之値(Most probable value).是以每一實驗,能反覆多作幾次,取其平均值爲佳.

五、　近眞誤差

若由熟練觀測者作幾次觀測,均經順利進行,各實驗結果大相近似之平均值,比之觀測進行不順利,各實驗結果大相差異之平均值,顯然更爲近眞.故觀察測定結果之排列,易於判定何者之平均值最爲近眞.

得某結果時,其絕對誤差之數值,宜比某量e爲大或小,似均爲同一程度之**近眞**(Probable)者,則此量e,稱其結果之**近眞誤差**(Probable error).從而近眞誤差,非謂測定誤差,大概爲e左右之意味也.

近眞誤差愈小,其平均值愈可信賴,e小之實驗比e大之實驗,謂其準確度較高.故於平均值之後註e,以明其實驗之準確度爲佳.

依據或然率(Probability),測某量n回所得測定值各爲$a_1, a_2, a_3,$ ……a_n,其平均值爲a,則平均值a之近眞誤差

$$e=\pm 0.6745\sqrt{\frac{(a-a_1)^2+(a-a_2)^2+\cdots\cdots+(a-a_n)^2}{n(n-1)}}$$

$$=\pm 0.6745\sqrt{\frac{\Sigma(a-a_1)^2}{n(n-1)}} \cdots\cdots\cdots(1)$$

但上述誤差論之結果，唯適用於必然的偶然誤差．故其他得以除去之誤差，當實驗時，務必設法除去之，或於計算之際，施以補正．

若不能除去系統誤差時，則以既由於實驗不適當，器械不完全等而來，常比真正值爲小或大之任何一方，生一定量之誤差．於是此等系統誤差之總和，稱定數誤差(Constant error)．

定數誤差與近真誤差爲不相關而各別之事，前者由系統誤差而生，後者由必然的偶然誤差而生，近真誤差雖小，定數誤差頗大者有之．近真誤差之小，表示實驗技術之精確．定數誤差之來，要探其原因，設法除去，或加以適當補正．

六、重

關於同一未知量，得二種以上相異之實驗結果時，未必均爲同一精密程度，故求其平均值，須各附適當之重(Weight)而計算之．

依據誤差論，則各實驗結果，各有其近真誤差二乘之逆數之重．故各結果之平均值爲a'，a''，a'''等，其近真誤差各爲e_1，e_2，e_3等，則a'，a''，a'''等之平均值爲

$$a_m=\frac{\frac{1}{e_1{}^2}a'+\frac{1}{e_2{}^2}a''+\frac{1}{e_3{}^2}a'''+\cdots\cdots}{\frac{1}{e_1{}^2}+\frac{1}{e_2{}^2}+\frac{1}{e_3{}^2}+\cdots\cdots},$$

卽

$$a_m=\frac{\Sigma\frac{a^{(\prime)}}{e_1{}^2}}{\Sigma\frac{1}{e_1{}^2}} \cdots\cdots\cdots(2)$$

七　最小二乘法

今n個未知量$x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots x_n$等滿足方程式

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots\cdots+a_nx_n+b=V \cdots\cdots\cdots(3)$$

時，則變$a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots a_n$及$b$，觀測其相當之$V$至$n$回，可得與未知量同數之方程式．再解此等聯立方程式，可知n個未知量矣．然作m回($m>n$)觀測時，由m個方程式內，任意選n個解之，卽得未知量之値．然由

m個方程式，選擇n個方程式之方法凡${}_mC_n$條，又實際於任何觀測，均有多少誤差．故解此等各組聯立方程式所得未知量之值，無一致之理．從而解m個實驗方程式，求n個最可信賴未知量之值，需要特種之研究．例如作某物質成分之百分數表而實驗時，因實驗之誤差，各成分之和，不適為100時，應於各成分加如何補正乎？解決此等之方法，謂之**最小二乘法**(Method of least square)．

依據誤差論，誤差平方之和為最小之實驗值，最可信賴，是以基此原理算出實驗結果之方法，冠以最小二乘法之名．

於(3)式，V之真值，以a_i(但$i=1,2,3,\cdots\cdots\cdots n$)及$b$而異，$m$回實驗中，第r回之$a_i$，$b$及$V$之真值，若各以$a_{ir}$，$b_r$及$V_r$表之則

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ir}x_i+b_r=V_r\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

一般以a_{ir}及b_r等之觀測誤差，(4)之左邊常不等於正確之V_r．因依第r回測定所得a_{ir}及b_r之值a'_{ir}及b'_r各代入(4)之左邊所計算之值以V'_r表之，則測定上所得方程式即**觀測方程式**(Observational equation)如次：

$$\sum_{i=1}^{n}a'_{ir}x_i+b'_r=V'_r$$

若其誤差為ϵ_r，則

$$\begin{aligned}\epsilon_r&=V_r-V'_r\\&=V_r-\{\sum_{i=1}^{n}a'_{ir}x_i+b'_r\}.\end{aligned}$$

$$\therefore\qquad \sum_{r=1}^{m}\epsilon_r^2=\sum_{r=1}^{m}\{V_r-(\sum_{i=1}^{n}a'_{ir}x_i+b'_r)\}^2.$$

$$\frac{\partial\sum_{r=1}^{m}\epsilon_r^2}{\partial x_\mu}=-\sum_{r=1}^{m}2\{V_r-(\sum_{i=1}^{n}a'_{ir}x_i+b'_r)\}a'_{\mu r}.$$

欲使$\sum_{r=1}^{m}\epsilon^2_r$為最小，須$\dfrac{\partial\sum_{i=1}^{m}\epsilon^2_r}{\partial x_\mu}=0$之時，於是

$$\sum_{r=1}^{m}\{\sum_{i=1}^{n}a'_{ir}a'_{\mu r}x_i\}+\sum_{r=1}^{m}a'_{\mu r}b_r=\sum_{r=1}^{m}a'_{\mu r}V_r\cdots\cdots\cdots(5)$$

V_r雖未知，以與V'_r無大差，常於(5)用V'_r為V_r之值．而(5)為由x_r導

出之**模範方程式**(Normal equation).μ為由1至n而變，故可得與未知量同數之模範方程式.解由此等模範方程式所成聯立方程式，當得決定最可信賴之一組未知量.

例如於 $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+b=V$ 之方程式中，以測定値代入a_1,a_2,a_3,b及V,得下列四方程式.即

$$x_1-x_2+2x_3=3, \quad\cdots\cdots\text{(i)}$$

$$3x_1+2x_2-5x_3=5, \quad\cdots\cdots\text{(ii)}$$

$$4x_1+x_2+4x_3=21, \quad\cdots\cdots\text{(iii)}$$

$$-x_1+3x_2+3x_3=14. \quad\cdots\cdots\text{(iv)}$$

以最小二乘法解之如次.即以 $1\times$(i),$3\times$(ii),$4\times$(iii),$-1\times$(iv) 後，各邊相加,得

$$\{1^2+3^2+4^2+(-1)^2\}x_1+(-1+6+4-3)x_2+(2-15+16-3)x_3$$
$$=3+15+84-14.$$

$$\therefore\qquad 27x_1+6x_2=88, \quad\cdots\cdots\text{(v)}$$

此為由x_1導出之模範方程式. 次以 $-1\times$(i)$+2\times$(ii)$+1\times$(iii)$+3\times$(iv)得

$$6x_1+15x_2+x_3=70\cdots\cdots\text{(vi)}$$

又以$2\times$(i)$+(-5)$(ii)$+4\times$(iii)$+3\times$(iv)得

$$x_2+54x_3=107\cdots\cdots\text{(vii)}$$

各為由x_2及x_3導來之模範方程式.以三模範方程式聯立解之,得

$$x_1=\frac{49154}{19899}=2.47,$$

$$x_2=\frac{2617}{737}=3.55,$$

$$x_3=\frac{12707}{6633}=1.92,$$

為最正確之値.其他觀測方程式為四個以上時,仍以同法解之可也.

八、　精確程度之均一

吾人當實驗時,須常留意以最小之勞力與費用,得到各處有必要精

密程度之結果.今略述關於此點要注意之二三事項如下.

爲求某結果而實驗,以二以上相異量之測定爲必要時,要預先考慮各觀察值之誤差及於結果之影響,而加減各測定之精粗,務令影響於結果者相同.若徒將及於結果之影響小者,極力作正確測定,則不但時間與精力之損失,即其結果之精密程度,亦不以其比例而增加.

例如以混合法測定比熱,得溫度之上昇,約爲 $5°C.$,若用有半度分度之溫度計,則溫度之上昇,不能精密讀至$\frac{1}{20}$度以上,故不免有溫度全上昇之1%程度之誤差.然以天平秤量熱計之重至於毫克,原非難事.惟溫度上昇既有1%之誤差,且比熱爲0.1者,則量熱計之如斯精密測定爲無意味.斯時水之全質量(水之質量+量熱計之水當量)之測定與溫度之測定到同一精密程度可矣.即水之質量至克,量熱計之質量至10克可矣.

一般各量之誤差及於結果之影響不同之故,應知各量之相對誤差宜如何選定,方於最後結果生同一影響,因之決定應測各量之相對誤差,努力以最小辛勞得所要結果.

今假定測$x_1x_2x_3$等,由$y=f(x_1,x_2,x_3,\cdots\cdots\cdots\cdots)$關係以決定$y$.但測$x_1x_2x_3$等時,因有誤差,得$x_1$爲$x_1+dx_1$,$x_2$爲$x_2+dx_2$,$x_3$爲$x_3+dx_3$等,$y$之計算值爲$y+dy$,生成誤差爲$dy$.依微分法.

$$dy=\frac{\partial f(x_1,x_2,x_3,\cdots\cdots)}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)\cdots\cdots}{\partial x_2}dx_2+\cdots\cdots \quad (6)$$

故由x_1之誤差dx_1,於y所生誤差爲

$$\frac{df(x_1,x_2,x_3,\cdots\cdots)}{dx_1}dx_1.$$

因x_2之誤差dx_2,於y所生誤差爲

$$\frac{df(x_1,x_2,x_3,\cdots\cdots)}{dx_2}dx_2.$$

其他於x_3等之誤差亦同樣.次舉例說明此法則.

[例 1]　測高 l 及直徑d,求圓柱之體積.

以所求體積

$$y=\frac{\pi}{4}d^2l,$$

$$\therefore \quad dy=\frac{\pi}{4}(d^2dl+2ld\cdot dd),$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{dl}{l}+2\frac{dd}{d}.$$

若d之測定無誤差，l有1%之相對誤差，則於體積生1%之誤差，即

$$\frac{dy}{y}=0.01.$$

夫於l無誤差，於d有1%之相對誤差，則於體積生相對誤差

$$\frac{dy}{y}=0.02.$$

即d之誤差及於所求結果之影響爲l之2倍.

假定圓柱之高約爲10厘米，直徑約爲1厘米，以得讀至0.0001厘米之測微計測d，則直徑之測定誤差，小於0.0001厘米，其相對誤差爲1/10000以內.斯時l之測定，但得相對誤差爲2/10000＝1/5000之程度足矣.換言之，應將長之10厘米作爲5000之數，即以可讀至0.002厘米之測定器測之可矣.如斯則於圓柱體積所生相對誤差爲4/10000.

若無須如斯之精密結果，但求最後誤差爲4/100程度之實驗，則於d用至0.1毫米，於l用至2毫米之計器可也.

〔例 2〕 以通過例1圓柱之重心而垂直於軸之線爲軸，求圓柱之轉動慣量.

斯時圓柱之轉動慣量（M爲圓柱質量）

$$y=M\left(\frac{l^2}{12}+\frac{d^2}{16}\right),$$

$$dy=\left(\frac{l^2}{12}+\frac{d^2}{16}\right)dM+\frac{Ml}{6}dl+\frac{Md}{8}dd,$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{dM}{M}+\frac{l.dl}{6\left(\frac{l^2}{12}+\frac{d^2}{16}\right)}+\frac{d.dd}{8\left(\frac{l^2}{12}+\frac{d^2}{16}\right)}.$$

今若l≒10厘米，$d=1$厘米，則

$$\frac{dy}{y}=\frac{dM}{M}+\frac{800}{403}\frac{dl}{l}+\frac{6}{403}\frac{dd}{d},$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{dM}{M}+2\frac{dl}{l}+0.015\frac{dd}{d}.$$

即直徑之相對誤差，及於結果相對誤差之影響比其他爲非常小.若l之值可正確測至0.01厘米，則l之相對誤差不逾0.01/10＝1/1000，故l之誤差及於結果之影響，不逾2/1000，使之$0.015dd/d=2/1000$，則d值測定之相對誤差

$$\frac{dd}{d}=\frac{2}{1000}\times\frac{1}{0.015}\fallingdotseq\frac{1}{10}.$$

故測直徑,以正確讀至1毫米者可矣.

又以質量M之相對誤差要為

$$\frac{2}{1000}=\frac{1}{500},$$

若其質量為50克,則以可正確秤到0.1克之天平測之可矣,其時結果之相對誤差為

$$\frac{2}{1000}\times 3=\frac{6}{1000}.$$

九、　近似公式之應用

欲由實驗之測定值導出某結果時,其測定值常非加以補正不可.

例如以桿尺測長,所得其長為二分度間之距離,既有刻度時之誤差,復以桿尺表示正確尺度之溫度與使用際不同溫度之誤差,遂使所測之長,不等於所得二分度間之距離.是以非加補正不可.

補正之法不一,如稍作考慮,常得節約時間與勞力之捷徑.茲舉例述之如下.

例如由$y=Dab/c$之方程式,應測a,b,c之長以求y,而D為定數者,則以由測定值a,b,c各加溫度之補正後,各為

$$a(1+\alpha t_1),b(1+\beta t_2),c(1+\gamma t_3)$$

之故,
$$y=D\frac{a(1+\alpha t_1)b(1+\beta t_2)}{c(1+\gamma t_3)}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(i)}$$

式中t_1,t_2,t_3為由測定a,b,c時之溫度減去桿尺表示正確尺度時溫度之差,而α,β,γ,各表示a,b,c之溫度係數.惟t_1,t_2,t_3一般本非大數,而α,β,γ等復各甚微,將α,β,γ等二乘以上之項省略後,則

$$y=D\frac{ab}{c}(1+\alpha t_1+\beta t_2-\gamma t_3)\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(ii)}$$

將(i)如(ii)作近似計算,則補正亦易於施行.然如斯求得之近似值,果為適應目的,到達充分必要之精密程度否?應以幾次測定中,擇任何一次之值,從(i)及(ii)計算結果比較之,兩者之相對誤差,如小於其時之必要程度以上,則其餘儘可由(ii)計算.

次示適於如斯目的所使用之普通近似公式.

a, b, c及d各比1爲非常小時，其第一近似值爲

1. $(1\pm a)(1\pm b)(1\pm c)\cdots\cdots\cdots = 1\pm a\pm b\pm c\pm\cdots\cdots\cdots$.

2. $(1\pm a)^2 = 1\pm 2a$.

3. $(1\pm a)^n = 1\pm na$.

4. $\sqrt{1\pm a} = 1\pm\frac{a}{2}$.

5. $\sqrt{ab} = \frac{1}{2}(a+b)$.

6. $\frac{1}{1\pm a} = 1\mp a$,

7. $\frac{1}{1\pm a^{\frac{1}{2}}} = 1\mp\frac{a}{2}$.

8. $\frac{1}{1\pm a^n} = 1\mp na$.

9. $\frac{(1\pm a)(1\pm b)}{(1\pm c)(1\pm d)} = 1\pm a\pm b\mp c\mp d$,

10. $e^a = 1+a$,

11. $x^a = 1+a\log_e x$.

12. $\log_e(1+a) = a-\frac{a^2}{2}$.

次二公式之α，爲以弧度測定之角，α如爲0.0349弧度(2°)以下之小角，則由下公式計算至小數第三位止爲正確.

13. $\sin(\theta\pm\alpha) = \sin\theta\pm\alpha\cos\theta$.

14. $\cos(\theta\pm\alpha) = \cos\theta\mp\alpha\sin\theta$.

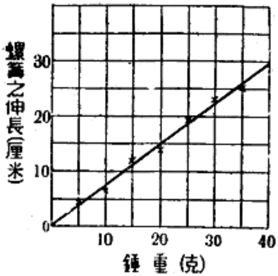
十、 圖示法及實驗公式

以實驗搜求乙量從甲量變化而變化之狀態，所得結果，普通以二樣方法表示之.即圖示法與實驗公式是也.

例如固定螺簧之一端，而於其他吊錘引伸之，假定實驗錘重與螺簧伸長之關係，得如下表所列結果.

實驗次數	1	2	3	4	5	6	7	8	9
錘重（克）	0	5	10	15	20	25	30	35	40
螺簧伸長(厘米)	0.0	4.5	6.5	12.1	14.1	19.5	23.5	25.5	29.5

於是如第一圖所示,取**方格紙**(Coördinate paper)一枚,用坐標法表錘重於橫軸,螺簧伸長於縱軸,得上列九組之點.可見其配列近於通過原點0之一直線.若各點離開直線不遠,可視其隔離由於實驗之誤差.



第 一 圖

一般通過原點之直線方程式爲 $y=ax$,(a 爲關於直線斜度之定數)斯時錘重W相當於方程式中之x,而螺簧之伸長Δl相當於y,故W與Δl之關係爲

$$\Delta l = aW \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(i)}$$

取該直線上任意一點,求其相應之Δl與W代入上式,即可決定a之值矣.

如斯依圖示法表示實驗之結果,可以一目瞭然,又若其圖形與算學上已知者相類似,則用表此圖形之函數,代入實驗結果,決定其必要係數而得之公式,謂之**實驗公式**(Experimental formula).

惟實驗上所得圖形,多不與數學上既知之圖形完全一致,單爲類似而已,可視與許多相異圖形相似從而依其所採用之圖形,所表同一現象之實驗公式異矣.

實驗公式乃假定於實驗範圍內,其關係成立者也.若應用於其範圍以外,是否適合,自然屬於疑問.

有時不依實驗,僅憑適當假定爲基礎,以理論歸納某現象之結論,而推得公式謂之**理論公式**(Theoretical formula).理論公式之是否適合,應依實驗判定之.若不與實驗一致,則其假定至少對該實驗爲不適合.

於圖示法先須考慮者,厥爲以如何單位線長計所畫點之坐標,及應使用如何之方格紙耳.

普通方格紙爲以相距各1毫米縱橫直線劃開之紙,使用頗形便利.

當畫曲線時,關於單位線長之選定極爲緊要,過小,則辛勤實驗之結果,不能正確表示;過大,則實驗之誤差,過於放大,顯現觀測結果,似乎非常無規則,欲描其結果之大概曲線必感困難.又有一量變化甚大,而其相應之他量無多變化,例如水之折射係數對溫度之變化.水之折射係數在$0°C$.時爲1.3441,在$100°C$.時爲1.3184,於溫度100°之變化中,折射係數之變化不過0.0257耳.斯時應以小單位線長表大有變化之量,大單位線長表示小有變化者,方可得適當圖形甚明.假定折射係數於測定中,能正確讀至小數第四位,而溫度可以讀至$\frac{1}{10}$度,則從一般法則之圖示,當令溫度於圖上變化1000毫米間,俾折射係數於圖上變化於257毫米中.而折射係數1毫米之變化,其相應溫度之變化約爲4毫米,溫度之分度,似乎稍嫌過大,儘可改以1毫米表1度或半度也.

單位線長既經選定,於是在方格紙上畫縱橫軸線,沿線註明適當分度,而記入測定值各點.記法,於其處附直徑2毫米之圓,或線長2毫米之×字形表出可矣.

測定值既各記入圖中,所成點列,以有實驗之誤差,常爲不規則形,欲以畫適當曲線,要有充分熟練之技術,準以所畫曲線兩側具一樣配列之點爲要.

曲線既得,次須試其精密程度.其法由各觀測值之橫坐標,求在曲線上之縱坐標,而以之減去各相應之觀測值,稱爲**剩餘** (Residual).如剩餘正者之和與負者之和相等,正負約同次數,正及負各量不偏集於一處,則其曲線可謂大體無誤.此謂之圖示法中之**平均法**(Method of averages).

求對於各觀測值剩餘之二乘,而令其和爲最小,以畫曲線,則此曲線最爲精密表示實驗結果.即謂圖示法中之最小自乘法也.

今就本節最初所揭關於螺簧之伸長實驗,作爲一例,解釋平均法與最小自乘法.

夫由測定值,自(i)得Δl之計算值爲$\Delta l'$,則剩餘

$$d=\Delta l-\Delta l'=\Delta l-aW,$$

$$\Sigma d=\Sigma\Delta l-a\Sigma W.$$

A. 在平均法，須$\Sigma d=0$.

$$\therefore\quad \Sigma\Delta l-a\Sigma W=0,$$

$$a=\frac{\Sigma\Delta l}{\Sigma W}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(ii)}$$

以(ii)之a代入(i)，則得依據平均法之實驗公式．用畫直線，則得依據平均法之圖形．

B. 於最小二乘法，須$\Sigma d^2=\Sigma(\Delta l-aW)^2$最小，

即 $$\frac{\mathrm{d}\Sigma d^2}{\mathrm{d}a}=0.$$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\Sigma(\Delta l-aW)^2=0,$$

$$\Sigma W(\Delta l-aW)=0,$$

$$\Sigma W\Delta l-a\Sigma W^2=0,$$

$$a=\frac{\Sigma W.\Delta l}{\Sigma W^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(iii)}$$

以(iii)代入(i)中，則得依據最小自乘法之實驗公式．由此式畫直線，則得依據最小自乘法之圖形．

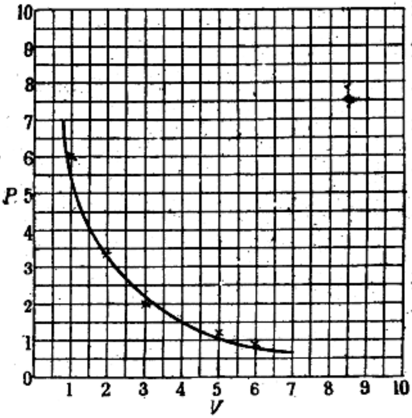
然如上例得通過原點之直線，最爲簡單．其他尙有得不過原點之直線、拋物線、雙曲線等簡單曲線，或更爲複雜曲線．若能判明所得曲線之種類，則其一般式中所含諸定數，可以利用其曲線求得之，而作實驗公式．

十一　以直線圖形表示實驗結果法

直線原爲諸線中最易識別之線，當圖示實驗結果之際，最好將其結果變形，俾得用直線表示之，以便研究．其法有二，卽變數之置換法與方格紙種類之選擇法是也．

1. 變數置換法

於一定溫度，令一定量氣體，受種種壓力而測其體積時，則體積V與壓力P之間，如從波義耳定律 $PV=C$，則將得如第二圖所示之雙曲



第二圖

線．然實驗所得者果爲真正雙曲線與否，頗難判定．今求各體積之逆數$(1/V)$，取之於橫軸，而以其相應之P值，取之於縱軸，由 $PV=C$，變爲

$$\frac{P}{\frac{1}{V}}=C.$$

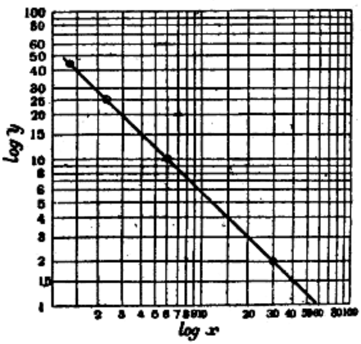
其曲線理應變爲直線，否則不與波義耳定律一致．

今假定所求得之直線爲 $P=a\frac{1}{V}+b$，先於線上取任意二點 A,B，查坐標爲$(P_A,\frac{1}{V_A})$及$(P_B,\frac{1}{V_B})$，以代入上式 可得關於a,b之二元一次聯立方程式，而決定a,b之值．倘用最小自乘法決定a,b則更精確．若$b=o$，則

$$P=a\frac{1}{V},\quad PV=a.$$

即與波義耳定律完全一致．

2. 方格紙種類之選擇法



第三圖

今於實驗結果，如得第二圖所示類似雙曲線之曲線時，可取x,y兩軸均有對數分度之對數方格紙(Logarithm paper)一枚，更照測定值於其上記相當各點，則其點列將爲直線之形．以其點列所成直線方程式原應爲 $\log P+a\log V=\log b$

其中a,b二定數亦可用最小二乘法決定．得其關係爲 $PV^a=b$，即