华东师范大学
函授教材

代数讲义

华东师范大学数学系
代数教研組編

（第一册）

华东师范大学出版社

华东师范大学函授教材

代　數　講　義

华东师范大学数学系代数教研組編

华东师范大学出版社

1958年

序

本講义是为函授数学系学生編写的。"代数"这門課的主要內容有綫性代数初步，数的概念的发展，整数的性質，多項式和方程，无理式和无理方程，不等式和不等方程。这些内容对于現任中等学校教师显然是非常必要的。此外还引入近世代数的一些基本概念，使数的概念的发展，多項式的理論得到更全面、更系統的处理，同时也为进一步学习代数打开門徑。我們还簡單的介紹了富有实际应用的关于綫性規划的知識，以便使所学理論能更好的联系实际，为我国社会主义建設服务。

本講义是华东师范大学代数几何教研組代数小組集体編写的，根据我們过去函授教学的經驗，力求能适合函授生的接受能力，同时注意到教材的系統結構清楚，論証严密，特别是理論联系实际問題。

本教材在編写的过程中主要参考了下列各書：

張禾瑞等編	高等代数
庫洛什著	高等代数教程
奥庫涅夫著	高等代数
里亞平著	高等代数教程
諾維塞洛夫著	初等代数專門教程
普罗斯庫亞可夫著	数与多項式

目　　錄

第一章 行列式

§1. 数学归納法

首先我們提出一个在数学問題与日常生活实踐中經常碰到的一个概念，人們时常把某些个相同或不相同的事物合并而看成整个一个事物，例如，以某点为中心，以1为半徑的圓，这个圓是圓上所有点的全体所組成，而同时又把它看成一个事物，叫做圓；又如某校的初一甲班，它是初一甲班中所有同学的全体，而同时又把它看作一个事物——初一甲班，这样把某些个相同或不相同的事物看成一个事物，这个事物就叫做**集合**或**集**，它的組成事物就叫做它的**元素**。例如，初一甲班全体同学所成的集合，“初一甲班”就是这个集合的名字，又如，滿足方程 $x^2-3x+2=0$ 的数的全体所成的集合就是指由1与2这兩个数所組成的集合，1与2都是这个集合的元素。

决不要以为集合就一定要多数，非得含兩个以上的元素不可，可以只含一个元素的集合。甚至，在集合中可以沒有元素，例如我們說滿足方程 $x^2+1=0$ 的实数全体所組成的集合，这个集合是一个元素也不含的，照例就不应該称它为集合，但是为了方便起見（在某些情况下是为了統一起見）我們仍然叫它做集合，特别把它叫做**空集**。

在数学問題中，常討論数所組成的集合，称为**数集**，最基本的数是自然数，那就是1, 2, 3, …… 等。由自然数的全体所組成的集合叫做**自然数集**。大家对自然数是熟悉的，我們在这里提出自然数的几个最基本的性質，这些性質都是比較直观地可以看得出的。

1. 自然数集是一个有次序的集合，也卽每兩个不相同的自然数 a 与 b 之間总有大小的关系，或者 $a>b$，或者 $b>a$，且兩者不得

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

兼具。

2. 如果 a 是自然数，則 $a+1$ 也是自然数而且在 a 与 $a+1$ 之間沒有自然数。

3. 在由某些个自然数所組成的不空集合中，总有一个最小的自然数，例如集合 $\{8, 5, 19, 24\}$ 中最小数为 5；由所有偶自然数所組成的集合，其中最小数为 2；由所有大于 8 所組成的自然数集合，其中最小数为 9。

这三个性質是自然数的基本性質，第一个性質叫做自然数的有序性，第二个性質叫做自然数的离間性，第三个性質叫做自然数的最小性，关于自然数的詳細討論可以参考：И.В. 勃罗斯庫列亞柯夫著，吳品三譯：数与多項式

我們在这里只介紹由性質 3 所推出的一个結論，由它可以推出数学归納法原理。

定理 1 設 M 是由某些自然数所組成的集合，且滿足下列二条件：

(i) $1 \in M$（即 1 屬于 M）；

(ii) 若 $a \in M$ 則 $a+1 \in M$。

則 M 即由所有自然数所組成的集合。

〔証〕：設 M' 为所有不屬于 M 的自然数的全体，故 $1 \notin M'$（1 不屬于 M'）如果 M' 不是空集，則由性質 3 知道在 M' 中必有最小数 a；而且由于 $1 \notin M'$，故 $a \neq 1$. 所以 $a-1$ 是自然数，由于 a 是 M' 中最小数，故 $a-1 \notin M'$，也即 $a-1 \in M$。而由于題設条件 (*ii*)，得出 $a \in M$，此与 $a \in M'$ 矛盾。所以 M' 必是空集，也即 M 为由所有自然数所組成的集合。同样可証：

定理 2 設 M 是由某些自然数所組成的集合，且滿足下列二条件：

(i) $1 \in M$；

(ii) 若小于某自然数 a 的所有自然数皆屬于 M，則 $a \in M$。

則 M 即由所有自然数所組成的集合。

証法与定理 1 相似，讀者自己来証。

由定理 1 与 2 可以推出常用的两个形式的数学归納法。

定理 3 (数学归納法)，設我們有一个由許多(有限或无限)断語(結論,叙說,或定理)組成的集合，而且这些断語按自然数順序依次編号如下:

$$P_1, P_2 \cdots, P_n, \cdots$$

如果这些断語有下面兩个性質:

(i) 第一个断語 P_1 是正确的。

(ii) 当編号小于 n 的 K 的一切断語 P_k 都是正确时(即当 $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$ 都是正确时)总能推得断語 P_n是正确的,

則 所有这些断語都是正确的。

〔証〕: 設断語 $P_1, P_2, \cdots, P_n, \cdots$ 中正确断語的下指标所成的集合为 M, M 为自然数所組成的集合,由假設 M 滿足下列二性質:

(i) $1 \epsilon M$;

(ii) 当所有小于 n 的自然数皆屬于M时,則 $n \epsilon M$。

于是由定理 2, M 为所有自然数所組成的集合, 即所有断語 $P_1, P_2, \cdots, P_n \cdots$ 皆是正确的。

如果利用定理 1 的話,同样可証:

定理 4 对一系列的断語$P_1, P_2, \cdots, P_n \cdots$,如果有下面兩个性質

(i) P_1 是正确的。

(ii) 当 P_{n-1} 为正确时总可推得 P_n 为正确。

則 所有断語$P_1, P_2, \cdots, P_n, \cdots$都是正确的。

定理 3 与定理 4 的区別是在于条件 (ii)。应用定理 3， 在驗証 P_n 的正确性时可以应用假設 $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$ 的正确性; 而在定理 4 中,驗証 P_n 的正确性时只能用 P_{n-1} 的正确性。所以定理 3 在运用上是比較方便些,然而在大部分証明的情况下,一般用定理 4 也夠了,不过也有一些定理的証明必須用定理 3 。

例 1 証明 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

这是一个断語,但也可以把它看成由无限个断語所組成的。

即 第一个断語 $P_1(n=1)$ $1^2=\frac{1\cdot2\cdot3}{6}$。

第二个断語 $P_2(n=2)$ $1^2+2^2=\frac{2\cdot3\cdot5}{6}$。

第三个断語 $P_3(n=3)$ $1^2+2^2+3^2=\frac{3\cdot4\cdot7}{6}$。

$\cdots$ $\cdots$

第 n 个断語 P_n $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$。

$\cdots$ $\cdots$

如果我們能証明所有这些断語 $P_1, P_2, P_3, \cdots$ 都正确，那末也就証明了我們所要証的式子了，然而这无限序列的断語我們不可能在有限的时間內一个一个驗証完，因此必須用数学归納法原理，在这里用定理 4 也可以了，事实上

(i) P_1 是正确的，因为 $1^2=1, \frac{1\cdot2\cdot3}{6}=1$。

(ii) 当 P_n 是正确时（通常这叫做数学归納法假設），即

若 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

則 $1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{6(n+1)^2}{6}$

$$=\frac{(n+1)}{6}[2n^2+n+6n+6]=\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$=\frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}$$

因此，P_{n+1} 是正确的。

于是，按定理 4，$P_1, P_2, P_3, \cdots$ 都是正确的。这就証明了例 1。要注意，应用数学归納法过程中，(*i*) 是基础，(*ii*) 是往下推，在做 (*ii*) 这一过程时，往往容易被迷惑，覺得題目要証的是 P_n 的正确性，怎么又"假設 P_n 是正确的"。事实上，(*ii*) 这一过程是証明了如果 P_n 是对

的則 P_{n+1} 也是对的；于是由 (i) 的基础往下推知道 P_2 是对的，P_3 是对的，……。

要注意，有时命題中出現的自然数 n，不一定要与归納法中断語的編号一致的。

例 2 証明 $1\cdot2+2\cdot3+\cdots+(n-1)\cdot n=\dfrac{(n-1)n(n+1)}{3}$，

$n=2,3,\cdots$

〔証〕：第一个断語 $P_1(n=2)$ $1\cdot2=\dfrac{1\cdot2\cdot3}{3}$。这是正确的。

設 第 n 个断語 P_n 是正确的，即（要注意这里断語的編号数与命題中所出現的 n 是不一致的）

$$1\cdot2+2\cdot3+\cdots+(n-1)\cdot n+n\cdot(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}。$$

于是第 $n+1$ 个断語 P_{n+1}

$$1\cdot2+2\cdot3+\cdots+n\cdot(n+1)+(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}+$$
$$+(n+1)(n+2)=\tfrac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)。$$

所以若 P_n 正确，則 P_{n+1} 也正确。因此由定理 4，証明了所要証的。

例 3 証明下面不等式：

$$\sqrt{n+\sqrt{(n-1)+\sqrt{(n-2)+\cdots+\sqrt{3+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}}<$$
$$<\sqrt{n}+1,\quad(n=1,2,\cdots)。$$

〔証〕：第一个断語 P_1 ($n=1$ 时)：$\sqrt{1}<\sqrt{1}+1$；这是正确的。

第二个断語 P_2 ($n=2$ 时)：$\sqrt{2+\sqrt{1}}<\sqrt{2}+1$，容易驗証这也是正确的。

假設第 n 个断語 P_n 为正确，即

$$\sqrt{n+\sqrt{(n-1)+\cdots+\sqrt{3+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}<\sqrt{n}+1。$$

(数学归納法假設)。

$$\text{于是}\sqrt{(n+1)+\sqrt{n+\sqrt{(n-1)+\cdots+\sqrt{3+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}}<$$

$$<\sqrt{(n+1)+\sqrt{n}+1}<$$

$$<\sqrt{(n+1)+2\sqrt{n+1}+1}=\sqrt{\left(\sqrt{n+1}+1\right)^2}$$

$$=\sqrt{n+1}+1。$$

这就是第 $n+1$ 个断語 P_{n+1} 的正确。

因此由定理 4，$P_1, P_2, \cdots$ 都是正确，也即証明了所要証的。

有些証明必須应用定理 3。

例 4 証明，任何大于 1 的自然数都可以表成質数的乘积的形式。我們用数学归納法来証明它。

第一个断語 P_1 是：2 是質数的乘积，这显然是对的，因为 2 是質数。

第二个断語 P_2 是：3 是質数的乘积，这也显然对的，因为 3 是質数。

設 $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$ 都是正确的(数学归納法假設)，我們来考虑第 n 个断語 P_n，$n+1$ 是質数的乘积，若 $n+1$ 是質数，則 Pn 显然正确。

否則 $n+1$ 是复合数，$n+1=a\cdot b$，其中 a 与 b 都是大于 1 的自然数，且 $a, b\leqslant n$。由归納法假設，a 与 b 是質数的乘积：

$$a=p_1\ p_2\cdots p_r,$$

$$b=q_1\ q_2\cdots q_s,$$

其中 $p_1, \cdots, p_r, q_1, \cdots, q_s$ 都是質数。于是

$$n+1=a\cdot b=p_1\cdots p_r\ q_1\cdots q_s\ 。$$

因此滿足定理 3 的条件 (ii)。所以，由定理 3，所有 $P_1, P_2, \cdots$ 都正确，这就証明了所要証的。

例 5 証明多于七元錢的任意一笔整数元数的款項都可以用三元及五元票面的鈔票来支付。

〔証〕：第一个断語P_1：八元錢可以用三元及五元的鈔票来支付，由于

$1\cdot3+1\cdot5=8$，所以这是显然的，由于

$9=3\cdot3$，$10=2\cdot5$，$11=2\cdot3+1\cdot5$，$12=4\cdot3$，

$13=2\cdot5+1\cdot3$，$14=3\cdot3+1\cdot5$，$15=3\cdot5$，

$16=2\cdot5+2\cdot3$。故 $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_8, P_9$ 皆正确。

考慮第 n 个断語P_n：$n+7$元錢可以用三元及五元的鈔票来支付。

假設 $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$ 皆正确，不妨設 $n>3$。于是

$$n+7=(n-3)+7+1\cdot3。$$

由归納法假設 $(n-3)+7=l\cdot3+k\cdot5$，其中 l 与 k 为不負整数。于是 $n+7=(l+1)\cdot3+k\cdot5$。

故 P_n 是正确的，也即满足定理 3 的条件 (ii)。所以，由定理 3，証明了所要証的。

习 題

試用数学归納法証明：

1. $1+3+5+\cdots+2n-1=n^2$。

2. $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$。

3. $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(+1)}=\frac{n}{n+1}$。

4. 設 $u_0=0$，$u_1=1$，$n_n=3u_{n-1}-2u_{n-2}$，
   証：$u_n=2^n-1$。

5. 設 $p>-1$，証：$(1+p)^n\geqslant1+np$。

6. 証明一个 n 边形的內角之和等于$(n-2)$个二直角。

§2. 数环与数体

除了自然数集外，中学代数还碰到四种数：整数，有理数，实数与复数。全体整数，有理数，实数和复数所組成的数集各各叫做整数

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

集，有理数集，实数集和复数集。数的分类如下：

$$\text{复数}\begin{cases}\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{自然数(即正整数)}\\ \text{零}\\ \text{負整数}\end{cases}\\ \text{分数(非整数的分数)}\end{cases}\\ \text{无理数}\end{cases}\\ \text{非实数}\end{cases}$$

所以整数集是有理数集的一部分，有理数集是实数集的一部分，实数集是复数集的一部分。数环数体就是由这四个数集的性質中总結出来的，它在近世代数中有更抽象的形象，在許多数学部門中都有着非常广汎的应用。

在討論多項式时，系数的范圍对多項式的性質有很大的影响。比如說，多項式 x^4+x^2-6 的因子分解时，在整数或有理数范圍內是：

$$x^4+x^2-6=(x^2-2)(x^2+3);$$

在实数范圍內是：

$$x^4+x^2-6=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x^2+3);$$

在复数范圍內是：

$$x^4+x^2-6=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{3}i)(x-\sqrt{3}i)。$$

由此可見，在不同范圍內討論多項式所得的結果可以不同，所以系数范圍問題在多項式理論中占重要地位。在中学代数課程里多項式系数范圍是随着对中学生的数的概念的形成而不同，在初中里系数的范圍是整数集与有理数集，到高中里講了实数之后，系数的范圍是实数集，后来是复数集，不过在中学課程中并沒有明文指出的。

整数集，有理数集，实数集，复数集，各有些什么特性？

首先我們拿自然数集来看，任意兩个自然数相加，相乘仍然得一个自然数，这样的性質，我們叫做自然数集关于加法与乘法是閉合的。自然数集关于減法就不是閉合的，即并非任意兩个自然数的相減是自然数，譬如 3 減 5 的結果就不是自然数（虽然有些自然数相減仍然是自然数，但我們仍然称自然数集关于減法不是閉合的）。然而

整数集就与自然数集不同，它关于加法，乘法，减法都是閉合的。

定义 1 凡是关于加法，减法，乘法都是閉合的不空数集称为数环。

换言之，設 R 为一个不空数集，且满足：

当 $a, b \in R$ 时，$a+b, a-b, a \cdot b$ 都屬于 R。则称 R 为数环。

容易看出，整数集，有理数集，实数集，复数集都是数环。除了这四个数环，还有許多其他的数环。

例 1 單独“零”一个数組成数环。

例 2 全体偶数組成数环。

例 3 令 n 是一个固定的整数，所有 n 的倍数組成一个数环。

例 4 所有形如 $a+b\sqrt{2}$ 的数的全体，其中 a 与 b 是任意整数，組成一个数环。事实上，这种形式的任意两个数 $a+b\sqrt{2}$ 及 $c+d\cdot\sqrt{2}$，其中 a, b, c, d 为整数，则由

$$(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})=(a+c)+(b+d)\sqrt{2},$$

$$(a+b\sqrt{2})-(c+d\sqrt{2})=(a-c)+(b-d)\sqrt{2},$$

$$(a+b\sqrt{2})\cdot(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}。$$

得这个集合关于加，减，乘是閉合的，当然是不空的，所以这是个数环。

例 5 全体奇数不是一个数环。事实上，两个奇数之和已不是奇数，故这个数集关于加法不是閉合的，因此不是数环。

就拿整数集来說，虽然对加，减，乘是閉合的，然而对除法仍然不是閉合。这个“不閉合”有两个性質；首先，并非每一个整数都可以用来作除数的。事实上，零是不能用来作除数的，除掉零以外的其他整数都可以作除数。其次，对任意两个整数，在可以相除的情况下，相除的結果一般不一定仍是整数（虽然有时候相除的結果可以是整数）。但是对有理数集来說，虽然对除法仍然不是閉合的（因为并非任意两个数都可相除，实际上就是“零”的特殊性破坏了有理数集对除法的閉合性），然而在有理数集中拿掉零之后所余下来的集合关于

除法是閉合的。整数集沒有这个性質，但有理数集，实数集，复数集都有这个性質。由此我們得到数体的概念：

定义 2　設 P 是一个不空数集，它滿足下列二条件：

(i)　P 关于加，减，乘是閉合的；

(ii)　P 中拿掉零之后所得的是不空数集，它关于除法閉合。

則称 P 为数体。

可以注意，如果不空数集 P 关于减法是閉合的話，P 中一定含有零。事实上，由于数集 P 是不空的，則 P 中至少有一个数 a；由于 P 关于减法的閉合性，得 $a-a=0$ 屬于 P。由此可見，(ii) 这一性質不会落空的。

数体的定义可以改写成：

定义 2′：設 P 为至少含兩个数的数集，且滿足：

(i)　若 $a,b\in P$ 則 $a+b, a-b, a\cdot b\in P$；

(ii)　若 $a,b\in P$，且 $b\neq 0$，則 $\frac{a}{b}\in P$。

則称 P 为数体。容易看出，数体首先是数环。

整数集是数环不是数体，我們叫它做整数环。有理数集，实数集，复数集都是数体，我們各別地叫它們做有理数体，实数体，复数体。除掉这三个数体之外还有其他許多数体。

例 6　一个形如 $a+b\sqrt{2}$ 的数，其中 a,b 是任意有理数，这种数所組成的数集 P 是数体。

事实上，設 $a+b\sqrt{2}$，$c+d\sqrt{2}$ 为 P 中任意二数，其中 a,b,c,d 为有理数，則有

$$(a+b\sqrt{2})\pm(c+d\sqrt{2})=(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{2};$$

$$(a+b\sqrt{2})\cdot(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2},$$

由于有理数集是数体，故 $a\pm c$，$b\pm d$，$ac+2bd$，$ad+bc$ 都是有理数(因为 a,b,c,d 都是假設为有理数)，因此

$$(a+b\sqrt{2})\pm(c+d\sqrt{2})\in P,\quad (a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})\in P.$$

所以 P 关于加，减，乘是閉合的，P 是数环。

其次，若 $a+b\sqrt{2}, c+d\sqrt{2}\in P$，且 $c+d\sqrt{2}\neq 0$。

于是 $$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}=\frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{c^2-2d^2}=\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+$$

$$+\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2}$$ 当 a,b,c,d 为有理数时，$\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}$ 与 $\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}$ 皆为有理数，故 $\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}\in P$。

于是 P 是数体。

例 7 一切形如 $a+bi$ 的数，其中 a,b 为任意有理数，組成数体讀者自己証之。

对有理数集，实数集，复数集等来說，数体是一个一般概念；有理数体，实数体，复数体是数体的特殊形象。如果我們从数体的定义出发推得一些結論与性質，那末每一个特殊数体（有理数体或实数体等等）都將有这些性質与結論。然而特殊事物总还有它自己的特殊性質。

例如，对数体有下列重要性質，这是所有特殊数体的共性。

定理 任何数体都包含有理数体。

〔証〕 設 P 是任意一个数体。因为 P 至少含有兩个数，所以 P 一定含一个不为零的数 a。由于 P 是数体，所以 $\frac{a}{a}=1\in P$。于是 $1+1=2, 2+1=3, \cdots$ 都屬于 P，即所有自然数皆屬于 P。前面曾經談过，数环中一定含零，故 $0\in P$；$0-1=-1$，$0-2=-2$，…都屬于 P，故所有整数都屬于 P。而每个有理数都是兩整数的商（分母不为零），且 P 是数体，故所有有理数皆在 P 中，因而 P 包含全体有理数。

故証。

当然这定理也可以說成有理数体的特性。

以下几章都是以一般数体作为討論基础的。这样所得的結果具有一般性，对于任何一个特殊的数体都成立，特别对于有理数体，实数体和复数体来說也都成立。例如，我們將来將証明，係数在某一数

体 P 上的二元一次联立方程組

$$a_1x+b_1y=c_1$$
$$a_2x+b_2y=c_2$$

其中 $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in P$，且 $a_1b_2-b_1a_2 \neq 0$，则此方程組有解，而且解是唯一的，而且解也屬于这数体。我們是在一般情况下（即在一般数体 P 时）証明这定理，它对特殊情况下当然也成立。特别，当 P 是有理数体，实数体，复数体时都成立。

习 題

1．下列数集是不是数环？

i) 全体正整数；

ii) 一切形如 $a+b\sqrt{3}\,i$ 的数，此处 a 与 b 是任意有理数；

iii) 一切形如 $b\sqrt{5}$ 的数，此处 b 是任意整数；

iv) 一切分母是 2 的非負整数次方冪的不可約分数；

v) 一切形如 $\dfrac{2n}{2n+1}$ 的数，此处 n 是任意整数。

2．上題的五个数集中哪些是数体？

3．有沒有只含兩个数的数环？假如有，举出实例；假如沒有，严格加以証明。

4．令 P_1 与 P_2 是兩个数体，而 P 是一切既屬于 P_1 又屬于 P_2 的数所成的集合。証明 P 也是一个数体。

5．在上題里，設 P_1 是一切形如 $a+b\sqrt{2}$ 的数所成的数体，P_2 是一切形如 $a+bi$ 的数所成的数体，这里 a、b 是有理数，那末 P 等于什么？

§3 二阶和三阶行列式

在关于多項式及方程的討論中，我們从一次方程組开始。

我們將把一次方程組叫做綫性方程組。

与中学代数不同，我們將討論含有任意个未知量任意个方程的

綫性方程組。

綫性方程組的一般形式是:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ &a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{aligned} \qquad (1)$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 代表未知量, $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n)$ 代表未知量的系数, $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 代表常数項。

我們將要在一个任意数体上来討論綫性方程組, 也就是說, 方程組中未知量的系数及常数項都假定屬于任意一个固定的数体 P。

綫性方程組(1)的一个解指的是数体 P 中这样的一組数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$, 用它們分別代(1)中的未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 后, (1)的每一方程都变为恒等式。

討論綫性方程組主要的是判定一个方程組是否有解, 假如有解, 确定解的个数并求出一切解来。关于这样的一般問題將在第二章中徹底解決。

在这一章里, 我們先討論形式比較特殊的綫性方程組, 即方程的个数与未知量的个数相等的情形。在討論这一問題的过程中將要用到一个工具, 就是行列式。

行列式是一个很重要的概念, 它在数学的許多部門中都有着非常广泛的应用。

行列式起源于解含有兩个或三个未知量的綫性方程組。我們先从含有兩个未知量的綫性方程組开始。

我們看綫性方程組

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1,\\ &a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2。 \end{aligned} \qquad (2)$$

为了求这个方程組的解, 我們用 a_{22} 乘第一个方程, 用 $-a_{12}$ 乘第二个方程, 然后相加, 得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2。$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com