高等学校教学用书

初等数学复習及研究

（立体几何）

朱德祥編

人民教育出版社

高等学校教学用書

初等数学复習及研究

（立体几何）

朱德祥编

人民教育出版社

本书是根据中华人民共和国教育部 1955 年編訂的师范学院数学系初等数学复习及研究——立方几何試行教学大綱編写的。可作为师范学院数学系立体几何的試用教材或教学参考书。中学教师在教学时也可取为参考。

本书系以平面几何和中学立体几何为基础写成的。为了便利讀者，特别注意全书內容自成系統，对立体几何知識加以系統地复习与整理和适当地加深与提高。全书內容分五章，分論空間直綫与平面、球、軌迹、初等几何变换、面积与体积、簡单球面几何与球面三角。編写时注意到与平面几何、解析几何、射影几何、几何基础各科間的联系。每章末附有充分的习題，帮助讀者进一步对本課程的理解。

初等数学复习及研究

立 体 几 何

朱 德 祥 編

人民教育出版社出版 高等学校教材編輯部
北京宣武門內承恩寺 7 号

（北京市書刊出版业营业許可証出字第 2 号）

京华印書局印装　新华書店发行

統一書号13010·765　开本850×1168 $1/_{32}$　印张 $7^{12}/_{16}$
字数 183,000　印数 00001—20,000　定价（6）¥ 0.75
1960 年 4 月第 1 版　1960 年 4 月北京第 1 次印刷

序

本书是根据中华人民共和国教育部1955年編訂的师范学院数学系初等数学复习及研究(立体几何)教学大綱編写的。依据教学大綱，主要参考书为别列棕尔金著初等几何教程下卷。編者除以此为主要参考資料并参考了大綱所列其他参考文献外，还参考了另外一些資料，其中特别应該提出的是阿达瑪著的“初等几何”下册。

本书是編者在昆明师范学院試用过几次的教材，在边教边改的过程中，吸取了許多兄弟学校的意見，作了适当的修改和补充。

根据教学大綱和通过大綱时的小組总結，“本学科应从公理出发系統进行讲授，关于公理的选擇，須适当照顧学生程度；使其易于接受，”并建議按照别氏书所列公理。由于本課程讲授学时有限，而內容相当不少，沒有很多时間詳細地从公理出发系統地讲授。并且别氏书中所列公理与四年級的几何基础里所列的公理讲法不同。例如按照别氏所列結合公理1b，“每直綫通过无限多点”，这与几何基础里讲的是有出入的。事实上，根据希尔伯特公理系統，直綫上点数的无限性不是結合公理的推論。我們知道，适当地定义点、直綫和平面以及結合关系，可以証明只有四点六直綫四平面的四面体模型，已可实現全部結合公理。为了不致在学生思想上造成混乱，并避免与几何基础交錯，編者采用了希氏公理系統，重点地介紹了結合公理，将别氏所列出的某些公理当作定理采用；声明这些命题在几何基础里可一一証明。其他較复杂的順序公理、連續公理的推論，也只有留給几何基础。在条件允許的情况下，在这方面可酌量增补。

本书內容共分五章。第一章空間直綫与平面，在內容上占最多篇幅，也是学好立体几何的关鍵所在。倘若时間不敷，有关四面体的材料可以少讲点。

第二章球与軌迹，教学大綱要求未来的教师能純熟地运用交軌法解作图題，因此对軌迹要深刻理解掌握。

第三章初等几何变換，螺旋运动是教学大綱上所沒有的，可考慮不講或介紹3.2.4和3.2.5的一部分，略去3.2.6。

第四章面积和体积，大綱上規定講四个学时，这里所写的材料当然无法在四小时內教完，可着重面积和体积的基本概念和有关极限概念的地方，其他供讀者參考自学以作复习。

第五章簡単球面几何与球面三角，这一章經常注意与几何基础的联系。这里比教学大綱多了一个定理，即球面三角形的面积和它的球面过剩成正比，因为在这里介紹这个定理是比較方便的。我們知道，罗巴切夫斯基几何上有一个类似命題，即三角形的面积与其角度亏缺成正比。球面几何的这一簡单性質，有助于了解罗氏几何。

軌迹虽集中在第二章講，习題仍分散各章。作图題也是基本上采取分散在各章里講授。习題是本书的重要組成部分之一，每一章都备有数目相当多的題目，大体上按講授的順序排列，其中一些是簡易的，有的則較难，希望能帮助培养兴趣、理解并巩固講授的內容。所有証明題、計算題、軌迹探求、作图問題等，兼容并包，希望有助于独立思考的鍛炼。

本书注意搜罗了一些解决实际应用問題的例題和习題，以培养解决实际問題的能力，但为数尙少，希望各校教师結合当时当地具体情况，加以补充。

承昆明师范学院許多同志給以帮助，并承郑佩瑤同志制图，在这里謹向他們致謝！

由于本人水平所限，疏漏及錯誤之处，在所难免，尙希讀者指正！

朱德祥

1960年1月，昆明。

目　录

第二章 球·軌迹

第三章 初等几何变换

第四章　面积与体积

第五章　簡单球面几何与球面三角

第一章　空間直綫与平面

1.1 点与直綫、点与平面的相关位置·空間几何公理

我們現在以中学几何以及一年級所学平面几何为基础，来学习立体几何。第一章是这个学习的关鍵部分。

首先介紹初等几何即欧几里得① 几何公理体系。此地所介紹的，基本上就是 1899 年希尔伯特② 在历史成就的基础上所完成的初等几何公理体系。

关于希尔伯特公理体系，在学习平面几何时可能已經介紹过了，此地为了完备和引用方便起見，再重复一下。

点、直綫、平面称为几何元素。几何元素集合起来，便組成我們研究的对象几何图形。以后除非另有声明，將以大写拉丁字母 A、B、C 等表示点，以小写拉丁字母 a、b、c 等表示直綫，以小写希腊字母 α、β、γ 等表示平面。并且当談到两点、两直綫、三平面等等时，我們了解作不相同的两点、两直綫、三平面。

若点 A 在直綫 a 上，也就說直綫 a 通过或含有点 A。若点 A 在平面 α 上，也就說平面 α 通过或含有点 A。

1.1.1 結合公理

I_1. 通过任意給定的两点有一直綫。

I_2. 通过任意給定的两点至多有一直綫。

I_3. 每一直綫上至少有两点；至少有三点不同在一直綫上。

I_4. 通过任意給定的不共綫三点（即三点不在同一直綫上）

---

① Euclid(約紀元前 330—275 年)。

② David Hilbert(1862—1943 年)。

有一平面；每一平面上至少有一点。

Ⅰ5. 至多有一平面通过任意給定的不共綫三点。

Ⅰ6. 若直綫 a 的两点 A、B 在平面 α 上，則 a 的所有点都在 α 上。这时直綫 a 称为在平面 α 上，或平面 α 通过或含有 a。

Ⅰ7. 若两平面有一公共点，則至少还有一公共点。

Ⅰ8. 至少有四点不同在一平面上。

1.1.2 順序公理

Ⅱ1. 若点 B 介于两点 A、C 之間，則 A、B、C 是一直綫上的不同点，且 B 也介于 C、A 之間。

Ⅱ2. 对于任意两点 A、B，直綫 AB 上至少有一点 C 存在，使 B 介于 A、C 之間。

Ⅱ3. 在共綫三点中，一点介于其他两点之間的情况不多于一次。

Ⅱ4. (帕須[①]公理)。設 A、B、C 是不共綫的三点，a 是平面 ABC 上不通过 A、B、C 中任一点的一直綫，則若 a 有一点介于 A、B 之間，那末它必还有一点介于 A、C 之間或介于 B、C 之間。

1.1.3 合同公理

Ⅲ1. 設 A、B 为一直綫 a 上两点，A' 为同一或另一直綫 a' 上的点，則在 a' 上点 A' 的給定一側有一且只一点 B' 使綫段 AB 合同于或等于綫段 $A'B'$：$AB=A'B'$。并且对于每一綫段，要求

$$AB=BA.$$

Ⅲ2. 設綫段 $A'B'=AB$，$A''B''=AB$，則也有 $A'B'=A''B''$。

Ⅲ3. 設 AB 和 BC 是直綫 a 上沒有公共內点的两綫段，而 $A'B'$ 和 $B'C'$ 是同一或另一直綫 a' 上的两綫段，也沒有公共內点。如果这时有 $AB=A'B'$，$BC=B'C'$，則也有 $AC=A'C'$。

① Moritz Pasch(1843—1930)。这公理发表于 1882 年。

Ⅲ$_4$. 在平面 α 上給定 $\angle(h,k)$，在同一或另一平面 α' 上給定直綫 a'，而且在平面 α' 上指定了关于直綫 a' 的一側。設 h' 是直綫 a' 上以一点 O' 为原点的射綫。那末在平面 α' 上直綫 a' 的指定一側，有一且只一条以 O' 为原点的射綫 k' 使 $\angle(h,k)=\angle(h',k')$。每个角都要求与自身合同，即 $\angle(h,k)=\angle(h,k)$ 和 $\angle(h,k)==\angle(k,h)$。

即是說：每个角可以唯一地放在給定平面上給定射綫的給定一側。

Ⅲ$_5$. 設 A、B、C 是不共綫三点，而 A'、B'、C' 也是不共綫三点，如果这时有

$$AB=A'B',\ AC=A'C',\ \angle BAC=\angle B'A'C',$$

那末也就有

$$\angle ABC=\angle A'B'C',\ \angle ACB=\angle A'C'B'.$$

1.1.4 連續公理

Ⅳ$_1$. （阿基米德[①] 公理）。設 AB 和 CD 是任意两綫段，那末在直綫 AB 上存在着有限个点 A_1、A_2、$\cdots A_n$，排成这样：A_1 介于 A 和 A_2 之間，A_2 介于 A_1 和 A_3 之間，以下类推，并且綫段 AA_1、A_1A_2、$\cdots A_{n-1}A_n$ 都合同于綫段 CD，而且 B 介于 A 和 A_n 之間（图 1）。

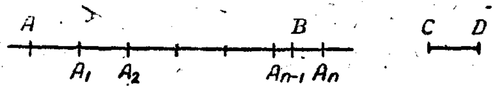

图 1

Ⅳ$_2$. （康託尔[②] 公理）。設在一直綫 a 上有由綫段組成的一个无穷叙列 A_1B_1、$A_2B_2\cdots\cdots$，其中在后的每一綫段都包含在前一个内部，并且任意給定一綫段，总有一个足碼 n 使綫段 A_nB_n 比它

① Archimedes（約公元前 287—212）。

② Moritz Cantor（1845—1918）。这公理是 1871 年写成的。

小。那末在直綫 a 上存在一点 X，落在每个綫段 A_1B_1、A_2B_2、……的內部(图 2)。

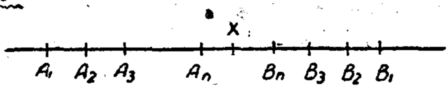

图 2

1.1.5 平行公理 Ⅴ 通过直綫外一点至多可引一直綫平行于該直綫。

1.1.6 公理的推論 从这五組公理可以推出欧氏几何全部結論，当然这个过程是十分不簡单的。我們举几个最簡单的为例：从結合公理出发，可以推証下列諸命題。

由公理 I_1 和 I_2 立刻得到

定理 1. 两点决定唯一直綫。

从公理 I_4 和 I_5 得到

定理 2. 不共綫三点决定唯一平面。

定理 3. 一直綫 a 和它外面一点 A 决定唯一平面。

証明：因为直綫 a 上至少有两点 B、C (公理 I_3)，不共綫三点 A、B、C 决定一平面 α (公理 I_4)。这平面 α 通过直綫 a(公理 I_6) 和点 A。又凡通过 a 和 A 的平面都要含三点 A、B、C，所以根据公理 I_5，只能与 α 重合。

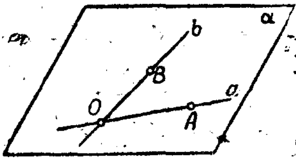

图 3

定理 4. 两相交直綫决定唯一平面。

証明：設两直綫 a、b 相交于点 O (图 3)，由公理 I_3，在 a 上除 O 外还有一点 A，在 b 上除 O 外还有一点 B。根据公理 I_4，不共綫三点 O、A、B 决定一平面 α。这平面 α 既通过 a 又通过 b (公理 I_6)。

此外不再有任何平面既通过 a 又通过 b，因为这样的平面必含

O、A、B 三点，因而与 α 重合。

定理 5. 两平行直綫决定唯一平面。留給讀者自証。

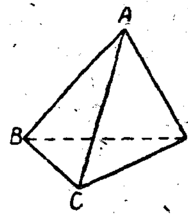

图 4

定理 6. 空間至少有四平面六直綫。

証明：根据公理 I_8，空間至少有不共面（即不在同一平面上）的四点 A、B、C、D（图 4）。根据公理 I_1，它們决定了六直綫 AB、AC、AD、BC、BD、CD；根据公理 I_4，它們决定四平面 BCD、ACD、ABD、ABC。

系 不共面的直綫存在。

因 AB 和 CD 便是不共面的直綫。

定理 7. 若两平面公有一点，則必公有一直綫上的点，且此外不再有其他公共点。

証明：設两平面 α、β 有一公共点 A，則至少还有一公共点 B（公理 I_7）。有一直綫 a 通过两点 A、B（公理 I_1），而由公理 I_6，直綫 a 上所有各点既在 α 上又在 β 上，所以平面 α 和 β 公有直綫 a 上各点。

平面 α 和 β 不能再有其他公共点，否則 α 和 β 便將重合了（定理 3）。証完。

这时平面 α 和 β 称为相交，直綫 a 称为其交綫。所以，若两平面有一公共点，便相交于一直綫。

到此可以看出，运用結合公理可以推出一些命題。但必須指出，只用公理 I_{1-8} 所能証明的几何事实为数甚少，例如从結合公理就不能推出几何元素的集合是无穷的。这样的論証，我們留在几何基础里去談。利用結合公理和順序公理，經过相当复杂的推理，可以証明定理 8—13，在此我們无妨把它們作为公理来引用。

定理 8. 每一直綫上有无穷多点。

定理 9. 每一平面上有无穷多点，而且它們不尽在一直綫上。

定理 10. 共綫三点中有一点也只有一点介于其他两点之間。

定理 11. 若 A、B 为已知点，則在直綫 AB 上有无穷多个点介于 A、B 之間，且有无穷多个点使 B 介于 A 与它們每个点之間。

定理 12. 一直綫上每一点 O 將綫上其余的点分为两类；点 O 介于异类的任两点之間，而不介于同类的任两点之間。

这时我們說点 O 分該直綫为两条半直綫或射綫，O 称为它們的原点或端点。

定理 13. 平面 α 上的一直綫 a 將 α 上除 a 以外的点分为两类；异类两点的联綫段必与直綫 a 相交，而同类两点的联綫段不与直綫 a 相交。

这时我們說直綫 a 分該平面为两半平面，a 称为它們的边緣。

現在我們可以証明：

定理 14. 在每一平面上有无穷多条不都共点的直綫。通过每一点有无穷多条不都共面的直綫。

这命題的証明留給讀者。

定理 15. 通过一直綫有无穷多个平面(共軸面)。

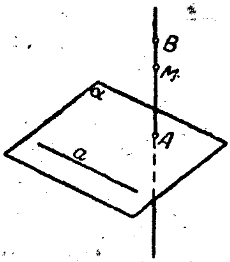

图 5

証明：設 a 为已知直綫。根据公理 I_8，至少有一点 A 不在 a 上(图 5)。直綫 a 和点 A 决定一平面 α (定理 3)。根据公理 I_8，至少有一点 B 不在平面 α 上。点 A 和 B 决定一直綫 AB (公理 I_1)。直綫 AB 上有无穷多点(定理 8)，其中任一点 M 和直綫 a 决定一平面 μ (定理 3)。由于直綫 AB 和 a 不共面，这些平面 μ 彼此不重合。所以有无穷个平面通过 a。

1.1.7 希尔伯特几何体系的三个基本对象和三个基本关系 希尔伯特取三个基本对象即点、直綫、平面和三个基本关系即結合关系(点在直綫上，点在平面上)、順序关系(介于…之間)、合同关系(綫

段的相等,角的相等)作为不加定义的六个基本概念,并要求这些关系滿足五組公理 I_{1-8}, II_{1-4}, III_{1-5}, IV_{1-2}, V的要求,建立了初等几何的基础。从此可以建立运动概念、測量理論等等。許多几何事实(特别是平面几何事实)我們就作为可以从公理推导出来而逕加引用。

1.2 空間二直綫的相关位置

由公理 I_2 立刻得到

定理 1. 空間两直綫至多有一公共点。

当两直綫有一个公共点时,就称为相交。从 1.1 定理 4, 我們知道相交直綫是共面的。反过来,从平面几何,共面两直綫却未必相交,并且共面而不相交的两直綫称为平行綫。

从 1.1 定理 6 系,又知道不共面的两直綫存在,所以总結起来就得到

定理 2. 空間两直綫可以有下列各种相关位置:

I. 两直綫不共面,因而也就沒有公共点(不共面直綫);

II. 两直綫共面,这时分为两款:

(*a*)共面而有一公共点(相交直綫);

(*b*)共面而沒有公共点(平行直綫)。

1.2.1 注意 (1) 过去在平面几何, 两直綫不平行便相交。在立体几何,不平行的直綫却未必相交,因为它們可能不共面。重要的还在于另外一面:要断定两直綫平行,不能仅仅証明它們不相交就算完事,首先还要确定它們是共面的。

(2)利用平行公理 V, 和平面几何一样,仍然得到:通过已知直綫外一点,有一且仅一直綫与已知直綫平行。事实上,通过已知点而与已知綫平行的直綫,只能在該点与該綫所决定的平面上。

(3)从平行綫的定义,我們知道,平行性有对称性,即是說:若 $a /\!/ b$, 則 $b /\!/ a$。現在要証明:在空間和在平面上一样, 平行性有

傳遞性，卽是說，空間三直綫 a、b、c 間，若有 $a \parallel c$ 和 $b \parallel c$，則亦有 $a \parallel b$。为了証明这个重要性質，我們先証明下面的引理。

1.2.2 引理 設相交两平面各通过两已知平行綫之一，那末它們的交綫平行于这两平行綫。

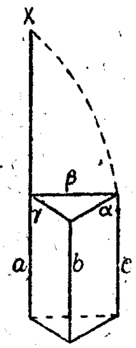

图 6

証明：假設直綫 $a \parallel b$，平面 α 通过 b，平面 β 通过 a，且 α 和 β 相交于直綫 c（图 6）。求証 $c \parallel a$，$c \parallel b$。

我們取 $c \parallel a$ 証之，$c \parallel b$ 仿此証明。

以 γ 表示平行直綫 a 和 b 所在的平面。由于 c 和 a 都在平面 β 上，要断定 $c \parallel a$，只要断定 c 与 a 不可能相交。我們使用反証法。

設直綫 c 和 a 相交于一点 X. 一方面，X 在 a 上，因之旣在 β 上又在 γ 上。另一方面，X 在 c 上，因之旣在 β 上又在 α 上。从此推出 X 旣在 γ 上又在 α 上，因而在 γ 和 α 的交綫 b 上。那末 a 和 b 相交于一点 X 了！这矛盾反証了 $c \parallel a$。

1.2.3 定理 3（平行綫的傳遞性）. 同平行于第三直綫的两直綫互相平行。

証明：設直綫 $a \parallel c$，$b \parallel c$，求証 $a \parallel b$。

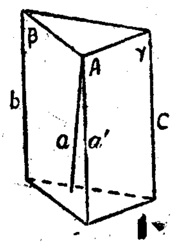

图 7

当三直綫 a、b、c 共面时，从平面几何我們知道这定理成立。当 a、b、c 不共面时証明如下。

在直綫 a 上任取一点 A（图 7），以 β 表示 A 和 b 所决定的平面，以 γ 表示 A 和 c 所决定的平面。由于假設 a、b、c 不共面，而 A 为 a 上任一点，那末 β 和 γ 不会重合。旣然 β 和 γ 有一公共点 A，就相交于一直綫 a'（1.1 定理 7）。

由于 $b \parallel c$，β 通过 b，γ 通过 c，且 β 和 γ 相交于 a'，所以根据引理得 $a' \parallel c$ 和 $a' \parallel b$。