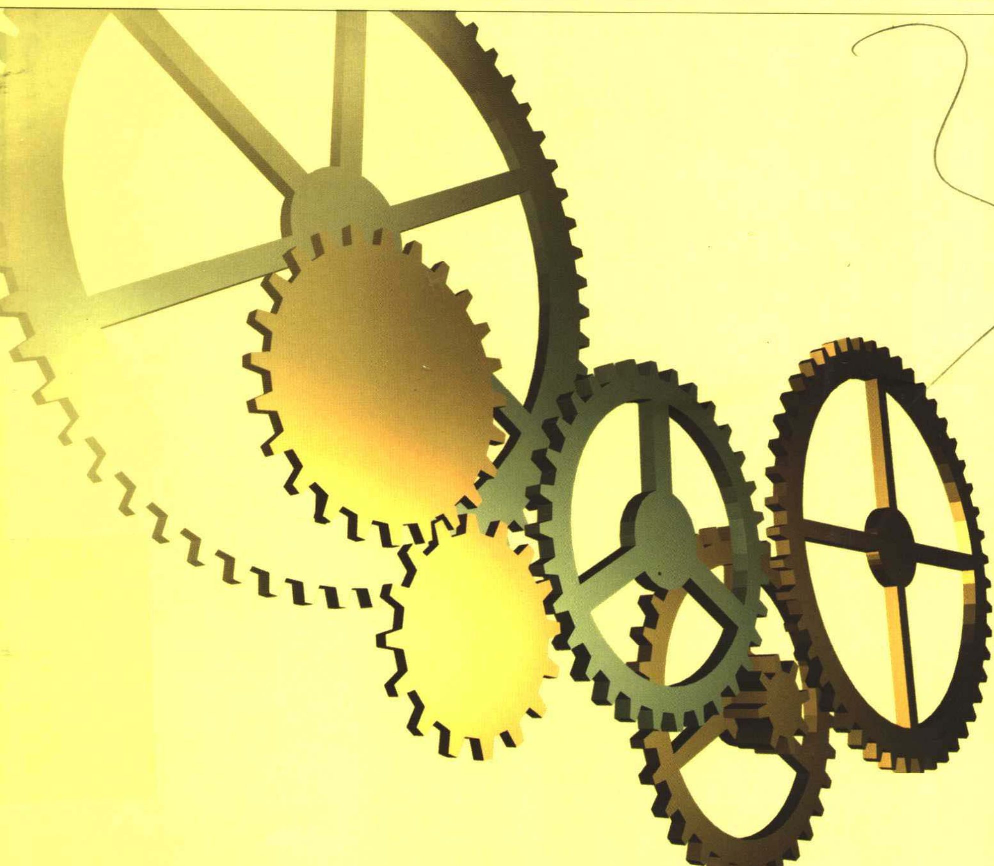
21世纪高等院校规划教材

普通物理学

知识结构与学习指南

王 青 戴剑锋 李维学 编著



国防工业出版社

内容简介

本书是根据国家教委颁布的《工科大学物理课程基本要求》编写的。全书包括:质点运动学、质点动力学、刚体的定轴转动、狭义相对论基础、气体动理论、热力学基础、真空中的静电场、导体和电介质中的静电场、恒定磁场和磁介质、电磁感应和电磁场、机械振动和电磁振荡、机械波和电磁波、光的干涉、光的衍射、光的偏振、量子物理基础共十六章。各章分有"知识结构"、"问题讨论"、"解题方法"、"典型题解"、"练习题"等部分。"知识结构"旨在整合物理知识内容,建立清晰的知识结构。"问题讨论"列举和讨论了学生易混淆的问题。"解题方法"归纳了习题类型和解题技巧。"典型题解"增强解题方法与技巧的延展性。"练习题"供学生自我练习、自我评定学习情况、拓宽解题思路。每章附有练习题答案。

本书作为大学物理课程参考书,可供工科高校的学生使用,亦可作为大学非物理专业、职工夜大、电大及成人自学考试的参考书,也可供报考研究生的考生使用和各类高等学校从事物理教学的教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

普通物理学知识结构与学习指南/王青,戴剑锋,李维学编著.—北京:国防工业出版社,2007.1

21世纪高等院校规划教材

ISBN 7-118-04810-0

Ⅰ.普… Ⅱ.①王…②戴…③李… Ⅲ.普通物理学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.04

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第119533号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100044)

新艺印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 18 字数 421 千字

2007年1月第1版第1次印刷 印数 1—4000册 定价 26.00元

国防书店:(010)68428422 发行邮购:(010)68414474

发行传真:(010)68411535 发行业务:(010)68472764

前　言

普通物理学是理工科院校本科教学的一门重要基础课程。由于教学内容多、进度快，对大学低年级的同学一时难以适应。为了帮助学生学好物理学，我们编写了这本书，目的是帮助学生建构普通物理学知识结构，通过讨论易混淆问题，帮助学生加深对物理概念和物理规律的理解。通过总结解题方法、典型题解以及练习题的训练，帮助学生建立问题的物理模型、条件和结论之间的逻辑关系，理清解题思路，增强解题方法与技巧的延展性，并学会分析问题和解决问题的基本方法。

我们特别强调普通物理学知识结构的建构，是因为物理学知识结构是物理学的基本概念、基本规律、基本观念、基本方法的组织形式和相互联系。只有找出概念、规律、观念、方法之间的纵横关系，掌握了知识结构及知识体系，才能理解哪些内容是核心知识，哪些是重点知识；才能灵活地运用知识；才能发挥知识的系统功能，有效地实现知识和能力的转化。通过本书的学习，有利于知识的记忆和再生，有利于知识的迁移，有利于创造力的培养，有利于提高学生的学习兴趣，有利于培养学生分析问题和解决问题的能力。在教学和学习当中，知识结构常常用知识框架图直观表示，本书每章画出了知识结构框架图可作为学生学习参考之用。

本书由王青、戴剑锋、李维学共同完成。执笔分工如下：第 1 章～第 6 章由王青编写，第 7 章～第 12 章由李维学编写，第 13 章～第 15 章由戴剑锋编写，第 16 章由王蕊编写，全书由戴剑锋教授负责统稿和定稿。

在编写的过程中，我们与本系的部分教师一起讨论，通过讨论，我们得到了许多编写灵感和想法，我们对他们表示衷心的感谢。特别感谢陈玉红等老师，他们为本书编写提出了许多中肯意见，并提供了部分资料。

在本书的编写过程中，除了总结作者多年的教学经验外，还参考了一些教材和参考书，在许多地方得到启发，在此不再一一指明，对原书的编著者表示谢意。由于编者水平有限，不足之处在所难免，恳请读者批评指正。

编者

2007.1

目　　录

第 1 章　质点运动学

知识结构

质点运动学研究的内容是运动的描述问题。描述质点运动的基本物理量有位置矢量、位移、速度和加速度等。质点运动学的知识结构是围绕这几个物理量而建构的。首先,学习基本物理量的定义、相互关系及其计算方法;其次,学习具体的运动形式下基本物理量的具体形式;最后,学习两个坐标系下(惯性系)基本物理量的变换式。

由于位置矢量、位移、速度和加速度等描述质点运动的基本物理量与参照系有关,首先给出参照系、坐标系、运动的相对性、质点等概念。定义位置矢量、位移、速度和加速度等概念。质点的运动状态用位置矢量和速度描述;运动位置的变化用位移描述;运动速度的变化用加速度描述。位置矢量的定义是坐标原点到质点的有向线段,数学表达式为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(x,y,z)=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$;位移是位置矢量的增量,即 $\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$;速度是位置矢量的一阶导数,即 $\boldsymbol{v}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$;加速度是速度的一阶导数,是位置矢量的二阶导数,即 $\boldsymbol{a}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$。位置矢量随时间的函数关系 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 叫运动方程,它是运动学的核心。如果已知运动方程,就可以计算出位移、速度和加速度;另外,如果已知加速度(速度)和初始条件,就可以计算出速度和运动方程。这就构成了质点运动学中的两类计算问题。

具体的运动形式有直线运动、圆周运动、抛体运动等,这些具体的运动形式中基本物理量的具体形式构成了本部分的主要内容。

在直线运动中,如果以运动方向为 x 轴,可以用 x、Δx、$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$、$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$来表示位置矢量、位移、速度和加速度,用它们的正负来表示这四个量的方向。匀变速直线运动中位移、速度和加速度公式是直线运动中的重点内容。

圆周运动是从三个不同的坐标系研究问题的:在极坐标下,用角坐标、角位移、角速度和角加速度这四个物理量描述质点运动,称为角量。其内容和计算与线量部分相似。对匀变速圆周运动得到的公式与匀变速直线运动相似。在自然坐标系下引入了切向加速度和法向加速度,重点推导了切向加速度和法向加速度公式。该公式可以推广到一般的曲线运动,只不过把公式中的半径用曲率半径代替。在直角坐标系下仍用位置矢量、位移、速度和加速度等线量描述质点运动。角量与线量的关系也是本部分的内容。

抛体运动是只受重力作用下的运动,抛体运动的加速度是重力加速度,不同的初始条件(初速度和初位置矢量)构成了不同的抛体运动,如平抛运动、斜上抛、斜下抛、竖直上抛。抛体运动的问题实际上是已知加速度(速度)和初始条件,计算出速度和运动方程的

问题。另外，对斜抛和平抛运动也可以用运动叠加原理来解决。

在不同的参考系中考察同一物体的运动时，其描述的结果是不相同的，这反映了运动描述的相对性。在大学物理中用笛卡儿坐标系来讨论这个问题，而且只讨论坐标系之间平动的情况。讨论了两个坐标系下(惯性系)基本物理量的变换式，包括伽利略坐标变换式、速度变换式和加速度变换式。

图 1－1 是质点运动学的知识结构框架图。

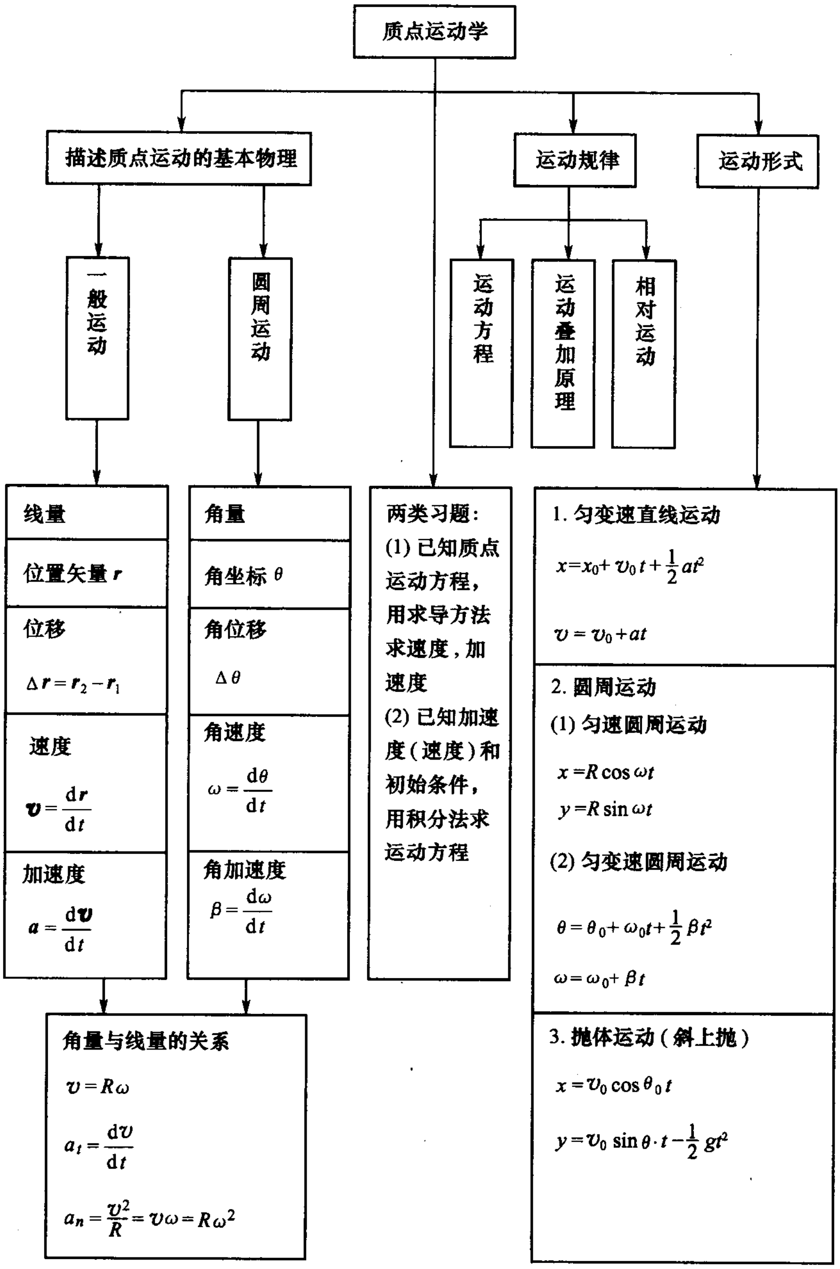


图 1－1　质点的运动学知识结构框架图

问题讨论

问题 1　时间与时刻有什么区别?

讨论:时刻 t 与运动质点在空间某确定位置相对应,时间是时间间隔 $\Delta t = t_2 - t_1$ 的简称,是两个时刻之间的间隔,它与运动质点在空间中的一段位移或一段路程相对应。在时间轴上与一点相对应的是时刻,如图 1-2 中与 B、C、D 等点对应的时刻分别为第 1 秒末、第 2 秒末和第 3 秒末。而在时间轴上"时间"与轴上的一个区间 $t_2 - t_1$ 相对应,例如,图 1-2 中与 CE 段相对应是时间,CE 段表示第 2 秒末到第 4 秒末的时间间隔。

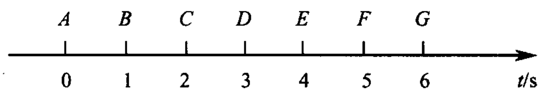


图 1-2　图示时间与时刻区别的时间轴

又如"第 4 秒初"、"第 3 秒末"表述的含义相同,都表示 $t = 3s$ 这一时刻(D 点)。而"第 3 秒钟内"表示第 3 秒末($t = 3$)时刻与第 2 秒末($t = 2$)时刻之间的间隔(CD 段)。

问题 2　位移与位置矢量有何区别?

讨论:位移 $\Delta \boldsymbol{r}$ 和位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 都是矢量,二者是两个完全不同的概念。位置矢量是描写质点在某一时刻空间位置的物理量,某一时刻质点的位置矢量是以坐标系的坐标原点为起点、以运动质点所在位置为终点的有向线段。而位移是描写质点在某一段时间间隔内位置变动的大小和方向的物理量,一段时间间隔内质点的位移是从质点的起始位置引向质点的终止位置的有向线段。位置矢量与时刻相对应,是状态量;位移与时间间隔相对应,是过程量。在一般情况下,两者是不相同的。位移 $\Delta \boldsymbol{r}$ 是位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 的增量。

问题 3　平均速度与瞬时速度有何区别和联系? 瞬时速度和瞬时速率有何区别?

讨论:平均速度和瞬时速度既有区别,又有联系。瞬时速度是当时间 $\Delta t \to 0$ 时的平均速度的极限。平均速度与一段时间间隔相对应,是过程量;瞬时速度与某时刻相对应,是状态量。平均速度只能粗略地描写质点运动的快慢和方向,而瞬时速度则精确地描写了质点运动的快慢和方向。

瞬时速度和瞬时速率是两个不同的概念。瞬时速度简称速度,瞬时速率简称速率。速率描写质点运动的快慢,只有大小,无方向,是标量;而速度描写了质点运动的快慢和方向,不仅有大小,而且有方向,是矢量。瞬时速度的大小等于瞬时速率。一般说匀速圆周运动,匀速曲线运动,实际上都省略了一个"率"字,都是匀速率(速率的大小不变)运动,由于它们运动的方向随时都在变化,所以都是变速运动。

问题 4　(1) $|\Delta \boldsymbol{r}|$ 与 Δr 有无不同? (2) $\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|$ 和 $\left|\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right|$ 有无不同? (3) $\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right|$ 和 $\left|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|$ 有无不同? 其不同在哪里? 试举例说明。

讨论:(1) $|\Delta \boldsymbol{r}|$ 是位移的模,Δr 是位置矢量的模的增量,即 $|\Delta \boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|$,$\Delta r = |\boldsymbol{r}_2| - |\boldsymbol{r}_1|$。(2) $\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|$ 是速度的模,即 $\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right| = |\boldsymbol{v}| = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$。$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ 只是速度在径向上的分量。

因为 $\boldsymbol{r}=r\hat{\boldsymbol{r}}$(式中 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 叫做 $\boldsymbol{r}$ 方向的单位矢量),则$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{r}}+r\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t}$

式中$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$就是速度径向上的分量。

所以 $\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|$与$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$不同,图 1-3 所示。

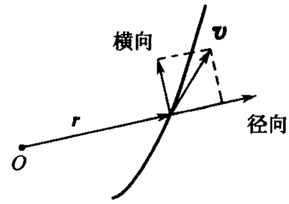


图 1-3

(3) $\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right|$表示加速度的模,即$|\boldsymbol{a}|=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right|$, $\left|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|$是加速度$\boldsymbol{a}$在切向上的分量。

因为 $\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{\tau}$($\boldsymbol{\tau}$ 表示轨道切线方向单位矢量),所以

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}+v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}$$

式中$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$就是加速度的切向分量。

问题 5 设质点的运动方程为 $x=x(t)$, $y=y(t)$,在计算质点的速度和加速度时,有人先求出 $r=\sqrt{x^2+y^2}$,然后根据 $v=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$,及 $a=\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}$而求得结果;又有人先计算速度和加速度的分量,再合成求得结果,即

$$v=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2} \text{ 及 } a=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)^2}$$

你认为两种方法哪一种正确?为什么?两者差别何在?

讨论:后一种方法正确。因为速度与加速度都是矢量,在平面直角坐标系中,有

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}$$

故它们的模为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$$

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)^2}$$

而前一种方法的错误可能有两点,其一是概念上的错误,即误把速度、加速度定义为

$$v=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \qquad a=\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}$$

其二,可能是将$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$与$\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}$误当做速度与加速度的模。$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$不是速度的模,而只是速度在径向上的分量,同样,$\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}$也不是加速度的模,它只是加速度在径向分量中的一部分$\left[a_{径}=\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}-r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]$。或者概括地说,前一种方法只考虑了位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 在径向(即量值)

方面随时间的变化率,而没有考虑位置矢量**r**和速度**v**的方向随时间的变化率对速度和加速度的贡献。

问题 6　下列问题是否可能?举例说明。(1)一物体速度为零时,加速度不为零。(2)一物体的加速度的大小随时间增加,而速度的大小随时间减少。(3)一物体的速度恒定,而速率在不断变化。(4)一物体具有恒定的加速度,但速度的大小和方向可以不断改变。

讨论:(1)可能。如竖直上抛运动的物体上升到最高点的瞬间。(2)可能。如加速度方向与速度方向相反的直线运动。(3)不可能。因为速度恒定包含速度的大小(速率)恒定和速度的方向恒定两个方面。(4)可能。如抛体的运动。

问题 7　判断下列说法是否正确,举例说明。(1)若运动物体的速度大小不变,则加速度一定为零。(2)运动物体的加速度越大,则速度一定越大。(3)匀加速运动一定是直线运动。(4)圆周运动的加速度一定指向圆心。

讨论:(1)不正确。如匀速圆周运动。(2)不正确。如谐振子远离平衡位置的运动。(3)不正确。如抛体运动。(4)不正确。如变速圆周运动。

问题 8　下列两句话是否正确:(1)质点做直线运动,位置矢量的方向一定不变。(2)质点做圆周运动,位置矢量的大小一定不变。

讨论:这两句话都是错误的。错误的原因在于:第一句话认为质点一定是沿通过坐标原点的直线运动的。第二句话认为坐标原点一定在圆心。但是坐标原点可以任意选定,而位置矢量的大小和方向与坐标原点的选取有关。如图 1-4 所示的直线和圆周运动,位置矢量的大小和方向都在改变。

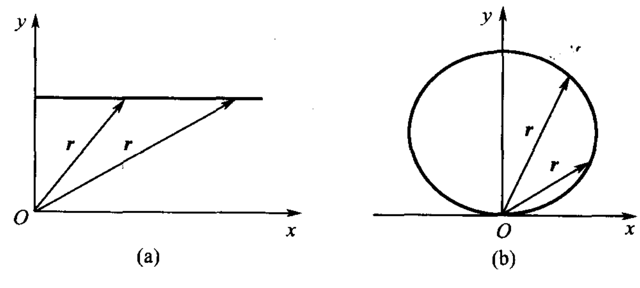


图 1-4

问题 9　回答下列问题:(1) 匀速圆周运动的速度和加速度是否都恒定不变。(2)在图 1-5 所示的斜抛运动中,轨道上哪一点的物体法向加速度值最大?轨道上哪些点的物体切向加速度值最大?C 点的法向加速度和切向加速度的大小和方向如何?(3)在什么情况下会有切向加速度?在什么情况下会有法向加速度?

讨论:(1)在直角坐标系中,匀速圆周运动的速度和加速度都要改变。而在自然坐标系中,匀速圆周运动的速度与加速度却是恒定不变的。

(2) 在图 1-5 所示的斜上抛运动中,轨道上的最高点 A 处,物体的法向加速度值为 $a_n=g$ 为最大。在抛出点 O 和落地点 B 处,物体的切向加速度值为 $a_\tau=g\sin\theta_0$ 为最大。在 C 点处,法向加速度值为 $a_n=g\cos\theta$,方向与该点的速度方向垂直,指向曲线的凹侧;切向加速度值为 $a_\tau=g\sin\theta$,方向与该点的速度方向相反。

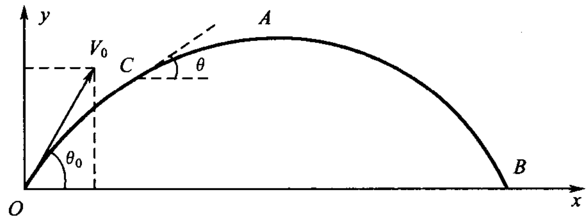


图 1-5

(3) 当速度的大小变化时,就有切向加速度;当速度的方向变化时,就有法向加速度。在直线运动中,只有切向加速度,直线运动的加速度实际上就是切向加速度。凡是曲线运动都有法向加速度。在匀速曲线运动中,仅有法向加速度;在变速曲线运动中,不仅有法向加速度,而且有切向加速度。

解题方法

质点运动学问题的类型主要有两类:(1)已知运动方程或质点受力情况,求速度和加速度;(2)已知速度或加速度的表达式以及初始条件,求运动方程。解决这两类问题的主要方法是微分法和积分法。

1. 已知运动方程(位置矢量),计算位移、速度和加速度

解题方法:计算(瞬时)速度和加速度一般用求导的方法:位置矢量(运动方程)对时间求导即为速度,速度对时间求导就是加速度。计算位移、平均速度、平均加速度可先由始末时刻确定始末位置,再由定义计算。

例 1 一质点在平面上运动,已知质点位置矢量的表达式为 $\boldsymbol{r}=at^2\boldsymbol{i}+bt^2\boldsymbol{j}$(其中 a、b 为常量),则该质点做何种形式的运动?

解:由质点的位置矢量 $\boldsymbol{r}=at^2\boldsymbol{i}+bt^2\boldsymbol{j}$

得运动方程:

$$\begin{cases} x = at^2 \\ y = bt^2 \end{cases}$$

轨道方程:

$$\frac{x}{y}=\frac{a}{b},\quad y=\frac{b}{a}x$$

质点的速度:

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=2at\boldsymbol{i}+2bt\boldsymbol{j}$$

质点的加速度:

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=2a\boldsymbol{i}+2b\boldsymbol{j}$$

质点的加速度为非零恒量,故该质点在 xOy 平面内做匀变速直线运动。

2. 已知加速度及初始条件，计算速度和运动方程

解题方法：此类问题是前一类问题的逆问题，加速度对时间的积分即为速度，速度对时间的积分就是运动方程。解决此类问题时应注意由初始条件确定积分上下限。

例2　一艘正在行驶的汽船，当关闭发动机后，沿一直线运动，加速度与船速的平方成正比且反向，即 $a=-kv^2$，其中常量 $k>0$。若关闭发动机时汽船的速度为 v_0，求：

(1) 关闭发动机后 t 时刻的汽船速度；

(2) 关闭发动机后的 t 时间内，汽船行驶的距离。

解：以汽船为研究对象，由于它做减速直线运动，所以取汽船运动方向为坐标轴 x 的正方向，坐标原点选择在刚关闭发动机的位置处。

(1) 按直线运动的加速度公式有

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

由题意 $a=-kv^2$，代入上式，有

$$-kv^2=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

分离变量：

$$k\mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{d}v}{v^2}$$

已知 $t=0$ 时，$v=v_0$，并设 t 时刻的速度为 v，对上式取定积分

$$k\int_0^t\mathrm{d}t=\int_{v_0}^{v}-\frac{\mathrm{d}v}{v^2}$$

得

$$v=\frac{v_0}{kv_0t+1}$$

(2) 由 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{v_0}{kv_0t+1}$$

分离变量，两边取定积分，有

$$\int_0^x\mathrm{d}x=\int_0^t\frac{v_0}{kv_0t+1}\mathrm{d}t$$

由此得汽船的运动方程为

$$x=\frac{1}{k}\ln(kv_0t+1)$$

汽船在 t 时间内行驶的距离为

$$\Delta s=|x-x_0|=\frac{1}{k}\ln(kv_0t+1)-0=\frac{1}{k}\ln(kv_0t+1)$$

3. 已知质点的受力情况和初始条件，计算速度和运动方程

解题方法：此类问题是前一类问题的拓展，解决该问题的思路是：根据受力情况列出

牛顿第二定律方程,解出加速度;由加速度及初始条件,计算速度和运动方程。

实际上,该类问题是动力学和运动学的结合,也是力学的基本问题,大多数教材或参考书把这类问题放在动力学部分讲解。实际上,有了高中物理知识,在大学物理的运动学部分就能解决该问题。

例 3 一质量为 10kg 的物体沿 x 轴无摩擦地运动,设 $t=0$ 时,物体位于原点,速度为零(即初始条件:$x_0=0, v_0=0$),问:

(1) 物体在力 $F=3+4t$(SI)的作用下运动了 3s,它的速度、加速度为多大?

(2) 物体在力 $F=3+4x$(SI)的作用下移动了 3m,它的速度、加速度为多大?

解:(1) 由牛顿第二运动定律

$$a=\frac{F}{m}=\frac{3+4t}{10}=0.3+0.4t \qquad ①$$

又由

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

得

$$v=\int_0^v \mathrm{d}v=\int_0^t a\,\mathrm{d}t=\int_0^t(0.3+0.4t)\mathrm{d}t=0.3t+0.2t^2 \qquad ②$$

把 $t=3\mathrm{s}$ 代入①、②两式,得

$$a=1.5\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}, v=2.7\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

(2) 由牛顿第二运动定律

$$a=\frac{F}{m}=\frac{3+4x}{10}=0.3+0.4x \qquad ③$$

又由

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

分离变量,两边积分:

$$\int_0^v v\mathrm{d}v=\int_0^x a\,\mathrm{d}x=\int_0^x(0.3+0.4x)\mathrm{d}x$$

得

$$\frac{1}{2}v^2=0.3x+0.2x^2,\ v=\sqrt{2(0.3x+0.2x^2)} \qquad ④$$

把 $x=3\mathrm{m}$ 代入③、④两式,得

$$a=1.5\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2},\ v=2.3\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

4. 利用角量与线量的关系解题

例 4 质点 P 在水平面内沿一半径为 $R=1\mathrm{m}$ 的圆轨道转动,转动的角速度 ω 与时间 t 的函数关系为 $\omega=kt^2$(k 为常量)。已知 $t=2\mathrm{s}$ 时质点 P 的速率为 16m/s,试求 $t=1\mathrm{s}$ 时,质点 P 的速度与加速度的大小。

解:首先确定 k 值:

$$k=\omega/t^2=v/Rt^2=\frac{16}{1\times 2^2}=4\mathrm{rad/s^2}$$

则有

$$\omega = 4t^2,\ v = R\omega = 4Rt^2$$

$t = 1\text{s}$ 时

$$v = 4Rt^2 = 4\text{m/s}$$

$$a_t = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = 8Rt = 8\text{m/s}^2$$

$$a_n = v^2/R = 16\text{m/s}^2$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = 8\sqrt{5}\text{m/s}^2$$

典型题解

1. 河中有一小船,人在高为 h 的岸边上,用绳子通过一定滑轮以恒定的速率 v_0 收绳(绳原长 l_0),拉船靠岸,如图 1-6 所示,求船在距离岸边为 x 处的速度和加速度。

解:建立如图坐标系,显然船在 x 轴上做直线运动。

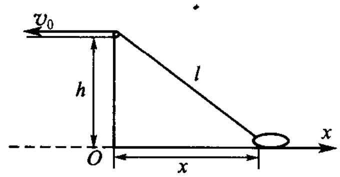


图 1-6

t 时刻绳长为

$$l = l_0 - v_0 t$$

船的运动方程为

$$x = \sqrt{(l_0 - v_0 t)^2 - h^2}$$

速度为

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{(l_0 - v_0 t)v_0}{\sqrt{(l_0 - v_0 t)^2 - h^2}},\quad \text{沿 } x \text{ 轴负方向}$$

加速度为

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{v_0^2 h^2}{[(l_0 - v_0 t)^2 - h]^{3/2}} = \frac{-v_0^2 h^2}{x^3},\quad \text{沿 } x \text{ 轴负方向}$$

可见,船做加速直线运动,离岸越近,x 越小,a 越大。

2. 质点做半径为 R 的圆周运动,其角运动方程为 $\theta = 3 + 2t^2$,求质点的法向加速度和角加速度。

解:

角速度为

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 4t\,\text{rad/s}$$

角加速度为

$$\beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 4\text{rad/s}^2$$

法向加速度为

$$a_n = R\omega^2 = 16Rt^2\text{m/s}^2$$

3. 已知质点的运动方程 $x = 2t, y = 4 - t^2$(SI)。试求任一时刻质点的速度、切向加速度、法向加速度和总加速度的大小。

解:由运动方程可求得质点速度的 x、y 分量分别为

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2,\ v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -2t$$

速度大小为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2\sqrt{1 + t^2}$$

同理
$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 0,\ a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -2\mathrm{m/s^2}$$

所以加速度大小为

$$a = a_y = -2\mathrm{m/s^2}$$

切向加速度为

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{2t}{\sqrt{1 + t^2}}$$

法向加速度为

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \frac{2}{\sqrt{1 + t^2}}$$

4. 一质点沿半径为 R 的圆周运动,如图 1－7 所示,其路程随时间的变化规律为 $s = v_0t - bt^2/2$,式中 v_0 和 b 为大于零的常数,试求:

(1) t 时刻质点的加速度;

(2) 经过多少时间,质点的总加速度值恰为 b;

(3) 当加速度达到 b 时,质点在圆周上运行了几圈?

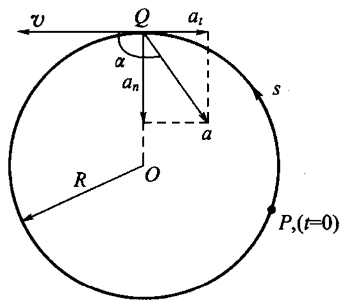


图 1－7

解:(1) 由加速度定义式,可得速率与时间关系为

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_0t - bt^2/2) = v_0 - bt$$

再分别求出 a_t 与 a_n:

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_0 - bt) = -b,\ a_n = \frac{v^2}{R} = (v_0 - bt)^2/R$$

则质点在 t 时刻的加速度大小为

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(-b)^2 + [(v_0 - bt)^2/R]^2} = \frac{1}{R}\sqrt{R^2b^2 + (v_0 - bt)^4}$$

方向由与速度的夹角 α 表示

$$\alpha = \tan^{-1}\left[\frac{(v_0 - bt)^2}{-Rb}\right]$$

(2) 令 $a = \frac{1}{R}\sqrt{R^2b^2 + (v_0 - bt)^4} = b$,可解出 t 值为 $t = v_0/b$。

(3) 当 $t = v_0/b$ 时,$v = v_0 - bt = v_0 - bv_0/b = 0$,表明在 $t = 0$ 到 $t = v_0/b$ 时间间隔内 v 恒为正值,由此质点转过的圈数 n 为

$$n = s/2\pi R = \left[v_0(v_0/b) - \frac{1}{2}b(v_0/b)^2\right]/2\pi R = v_0^2/2\pi Rb$$

5．小球沿着可调倾角 $\theta(0°\leqslant\theta\leqslant 90°)$ 的光滑斜面下滑，下滑时，都保持下滑顶端在同一竖直线上，如图 1－8 所示，小球视为质点，试求 θ 为何值时，小球从顶端开始下滑到底端所用时间最少？

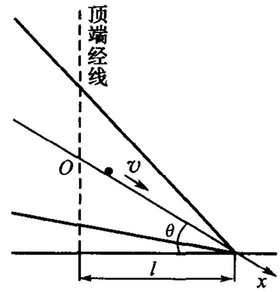


图 1－8

解：选取斜面上小球下滑的顶端为坐标原点，沿下滑方向为 Ox 轴正方向。小球下滑时的加速度 a 大小为

$$a = g\sin\theta \qquad ①$$

由于重力加速度 g 大小一定，又 θ 角不变，故 a 是一个常矢量。按题意求"小球从顶端开始下滑到底端所用时间"，可设 $t=0$ 时，$x_0=0$，$v_0=0$

由①式，有

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g\sin\theta \quad 或 \quad \mathrm{d}v = g\sin\theta\mathrm{d}t$$

$$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v = \int_0^t g\sin\theta\mathrm{d}t \quad 或 \quad v = v_0 + (g\sin\theta)t = (g\sin\theta)t$$

运用 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 与初始条件再一次积分得

$$x = x_0 + \int_0^t v\mathrm{d}t = \int_0^t[(g\sin\theta)t]\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(g\sin\theta)t^2 \qquad ②$$

小球从顶端下滑到底端滑过的距离是

$$x = \frac{l}{\cos\theta} \qquad ③$$

将②、③两式合并，求得小球下滑的时间为

$$t = \left(\frac{2l}{g\sin\theta\cos\theta}\right)^{\frac{1}{2}} = 2\left(\frac{l}{g\sin 2\theta}\right)^{\frac{1}{2}}$$

从此式可知，当 $2\theta=\dfrac{\pi}{2}$，即 $\theta=\dfrac{\pi}{4}=45°$ 时，t 有最小值。

6．路灯距地面高为 H，身高为 h 的人以匀速率 v_0 离灯而去，求人头顶在地面上的影子移动的速度。

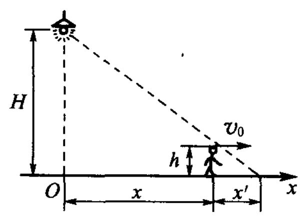


图 1－9

解：建立如图 1－9 所示的坐标，设 t 时刻人与灯的水平距离为 x，则头顶影子的坐标为 $x+x'$，设头顶影子的移动速度为 v，则

$$v = \frac{\mathrm{d}(x+x')}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} = v_0 + \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}$$

由图中看出有

$$\frac{H}{x+x'} = \frac{h}{x'}$$

则有

$$x' = \frac{hx}{H - h}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} = \frac{hv_0}{H - h}$$

所以有

$$v = v_0 + \frac{hv_0}{H - h} = \frac{H}{H - h}v_0$$

7. 设有一架飞机从 A 处向东飞到 B 处，然后又向西飞回 A 处，飞机相对于空气的速率为 v'，且保持不变，而空气相对于地面的速率为 v_r，A、B 之间的距离为 l。求：

(1) 假定空气是静止的($v_r=0$)，求飞机来回飞行的时间；

(2) 假定空气的速度向东，求飞机来回飞行的时间；

(3) 假定空气的速度向北，求飞机来回飞行的时间。

解：(1) 当空气静止时，即 $v_r=0$，飞机相对地面往返速度的大小均为 $v=v'$，所以飞机往返所需时间为

$$t_0 = t_{01} + t_{02} = \frac{l}{v'} + \frac{l}{v'} = \frac{2l}{v'}$$

(2) 取大地为参照系，向东为 x 轴正方向。当空气的速度向东时，由 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{v}_r$ 得飞机由 A 到 B 向东飞行对地的速度为

$$\boldsymbol{v} = (v' + v_r)\boldsymbol{i}$$

飞机由 B 到 A 向西飞行对地的速度为

$$\boldsymbol{v} = -(v' - v_r)\boldsymbol{i}$$

所以

$$t_1 = \frac{l}{v' + v_r} + \frac{l}{v' - v_r} = \frac{2lv'}{v'^2 - v_r^2} = \frac{t_0}{1 - \dfrac{v_r^2}{v'^2}}$$

(3) 当空气的速度向北时，如图 1－10 所示。

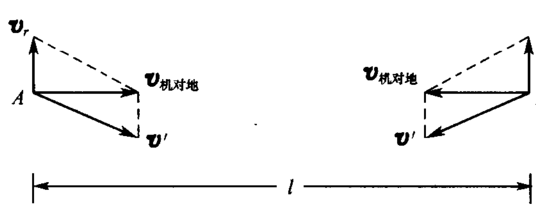


图 1－10

则飞机向东飞行时

$$\boldsymbol{v}_{机对地} = \sqrt{(v')^2 - v_r^2}$$

飞机向西飞行时

$$v_2 = -\sqrt{(v')^2 - v_r^2}$$

所以

$$t_2 = \frac{l}{v_1} + \frac{l}{v_2} = \frac{2l}{\sqrt{(v')^2 - v_r^2}} = \frac{2l}{v'\sqrt{1 - \frac{v_r^2}{(v')^2}}} = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v_r^2}{(v')^2}}}$$

练 习 题

一、选择题

1．一质点在 xOy 平面内运动，其运动方程为 $x = at$，$y = b + ct^2$，式中 a、b、c 均为常数。当运动质点的运动方向与 x 轴成 45°角时，它的速率为[　　]。

A．a；　　B．$\sqrt{2}a$；　　C．$2c$；　　D．$\sqrt{a^2+4c^2}$。

2．一质点以匀速率在 xOy 平面内运动，如图 1－11 所示。则经轨道上的 a、b、c、d 四点时，质点的加速度最大的点是[　　]。

A．a；　　B．b；　　C．c；　　D．d。

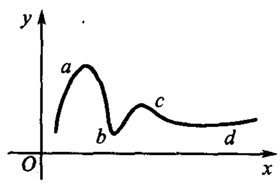


图 1－11

3．下列说法中正确的是[　　]。

A．加速度恒定不变时，物体的运动方向也不变；

B．平均速率等于平均速度的大小；

C．当物体的速度为零时，加速度必定为零；

D．质点做曲线运动时，质点速度大小的变化产生切向加速度，速度方向的变化产生法向加速度。

4．设木块沿光滑斜面从下端开始往上滑动，然后下滑，则表示木块速度与时间关系的曲线（如图 1－12 所示）是[　　]。

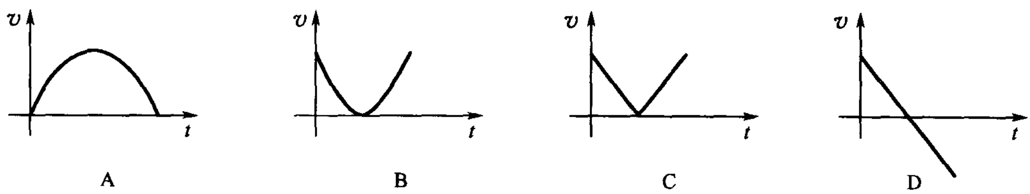


图 1－12

二、填空题

1．一质点沿 x 轴运动，其运动方程为 $x = 5 + 2t - t^2$(SI)。质点的初速度为________，第 4 秒末的速度为________，第 4 秒末的加速度为________。

2．一质点以 πm/s 的匀速率做半径为 5m 的圆周运动。该质点在 5s 内的平均速度的