普通高中课程标准实验教材
PUTONG GAOZHONG KECHENG BIAOZHUN SHIYAN JIAOCAI

随堂纠错
SUITANGJIUCUO

超级练
CHAOJI LIAN

数学 4 必修

浙江教育出版社

普通高中课程标准实验教材
PUTONG GAOZHONG KECHENG BIAOZHUN SHIYAN JIAOCAI

随堂纠错
SUITANGJIUCUO

主　编　伊建军
编　者　伊建军　王红健　金　斗　孙建中

超级练
CHAOJI LIAN

数学 4 必修

浙江教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

随堂纠错超级练. 数学. 4：必修 / 伊建军著. —杭州：浙江教育出版社，2006.11

配人教版

ISBN 7-5338-6715-7

Ⅰ. 随… Ⅱ. 伊… Ⅲ. 数学课－高中－教学参考资料 Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 131030 号

随堂纠错超级练

数学 4 必修

主　　编　伊建军
出　　版　浙江教育出版社
　　　　　(杭州市天目山路 40 号　邮编：310013)
发　　行　浙江省新华书店集团有限公司
总 策 划　邱连根
责任编辑　金馥菊
装帧设计　韩　波
责任校对　郑德文
责任印务　吴梦菁
图文制作　杭州富春电子印务有限公司
印刷装订　富阳美术印刷有限公司

开　　本　880 × 1230　　1/16
印　　张　10
字　　数　310 000
版　　次　2006 年 11 月第 1 版
印　　次　2006 年 11 月第 1 次
印　　数　00 001—39 330
书　　号　ISBN 7-5338-6715-7/G·6685
定　　价　13.00 元

联系电话：0571-85170300-80928
e-mail：zjjy@zjcb.com
网　　址：www.zjeph.com

《随堂纠错超级练》丛书编委会

栏目设置及使用说明

教材解读

归纳学习要点，梳理知识脉络，方便理解与记忆。

名师引路

揭示重点，剖析难点，点拨学法，提供学习心理辅导。

解题方略

分类题型，总结问题解决的一般规律，并揭示解题技巧。

纠错在线

让学生记录做题过程中出现的错误，提倡学生随时总结自己不足的学习习惯。

发展提高

提供提升知识层次，发展学生解决问题能力的优秀试题。

典例剖析

选择"基题"，分析解题思路与方法，提供表达示范。

同步训练

理解巩固

提供理解、巩固基本知识和技能的基础题。覆盖教材要点，强化重点，题量适宜，注重有效。

高考链接

列举历年高考中与本节有关的真题，让学生同步了解高考命题要求与特点。

章测试卷

参照高考题型，提供囊括本章知识要点及考点的试题，供学生自测或教师选用。

出版前言

作为深入贯彻新课程标准精神、全面体现最新教学理念的一个新的尝试,我社精心编辑出版了这套"随堂纠错超级练"丛书,以满足当前高中各科教学的急需。

这是一套涵盖高中各主要学科,包括课堂教学和阶段复习各环节的同步实战型丛书。丛书名即反映了其主要特点:随堂,就是基本知识随堂通;纠错,就是出现错误当堂纠;超级练,就是巩固提高分层练。

在设计模块时,我们根据方便、实用的原则,花大力气进行了创新优化:

提炼教材精华,涵盖知识考点 "教材解读"板块,本着"双基"的要求和高考命题的导向,用简炼的文字,从识记知识、能力目标与发展提高三个维度归纳整理教材内容,分析学习重点与难点,揭示课标导向,辨疑解惑,为学生指点迷津。

荟萃典例基题,剖析解题方略 "典例剖析"板块,科学选择各类范例"基题",先通过多角度的详细剖析,给学生示范解题过程,再在分类题型的基础上,总结各类习题的一般解法与规律,以举一反三,提高解题能力。

精选名题范例,循序梯级设置 "同步训练"板块是在分析人民教育出版社A版教材内容的基础上,根据学科课程标准,并遵照《浙江省高中新课程实验教学指导意见》的要求,分成"理解巩固"、"发展提高"、"高考链接"三类。其中"理解巩固"是全体学生在模块学习后要达到的要求,重在对学科基本概念、理论以及知识的理解与记忆;而"发展提高"是指部分学生在模块学习后可以达到的较高要求,旨在训练学生对所学知识、概念、原理的应用以及与生产生活实际结合的能力;"高考链接"是根据知识点选择历年有代表性的高考真题,让学生试做,以同步了解高考命题的基本特点。所有这些练习题目,除了荟萃历年来各级各类试卷的名题范例以外,更有许多体现近年高考走向、凝聚名师心得的创新题目。

警示易入歧途,督促随堂自纠 根据心理学认知就是反馈纠错过程的原理和高考状元们都注重自我纠错的成功实践,丛书在各级训练板块的练习和测试部分,预留了一定空间,以方便自我"在线纠错"和归纳、总结、记录纠错心得。

此外,每单元后均附有自我测试卷,供学生自我测评。

在编排上,为了使各模块条理清晰、方便实用,我们采用了左右分栏、上下切块的版面设计,大致做到了知识体系一目了然,复习翻检信手拈来。

限于水平和时间,本丛书必定存在疏漏和不足,恳切希望得到批评指正,以便我们进一步修订和提高。

浙江教育出版社

2006.10

目录

MULU

第一章 三角函数

第二章 平面向量

第一章 三角函数

1.1 任意角和弧度制

1.1.1 任意角

教材解读

1. 任意角的概念

一条射线的端点是 O，它从起始位置 OA 按逆时针方向旋转到终止位置 OB，形成一个角 α，射线 OA，OB 分别是角 α 的始边和终边.

(1) 正角：

按逆时针方向旋转形成的角.

(2) 负角：

按顺时针方向旋转形成的角.

(3) 零角：

一条射线没有作任何旋转，称它形成了一个零角. 零角的始边与终边重合，记 $\alpha=0°$.

2. 象限角的概念

角的顶点与原点重合，角的始边与 x 轴的正半轴重合，那么角的终边在第几象限，我们就说这个角是第几象限角. 如果角的终边在坐标轴上，那么这个角不属于任何一个象限.

3. 终边相同的角

所有与角 α 终边相同的角，连同角 α 在内，可构成一个集合

$S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot 360°, k\in \mathbf{Z}\}$，

即任一与角 α 终边相同的角，都可以表示成角 α 与整数个周角的和.

4. 终边相同的角的特点

(1) k 必须是整数，即 $k\in \mathbf{Z}$；

(2) α 可以是任意角；

(3) 终边相同的角不一定相等，终边相同的角有无限多个，它们相差 $360°$ 的整数倍.

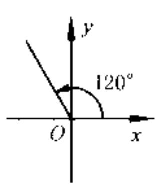
典例剖析

例 1 在平面直角坐标系中，作出下列各角，并指出它们是第几象限角：

(1) $120°$； (2) $315°$； (3) $-390°$； (4) $-600°$.

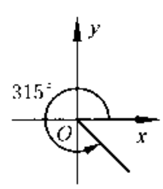
解题思路 根据任意角的概念，按逆时针方向旋转形成的角为正角，按顺时针方向旋转形成的角为负角.

解 (1)



$120°$角是第二象限角.

(2)



$315°$角是第四象限角.

名师引路

请对照左栏，仔细阅读教材，思考以下问题：本节教材有哪些知识要点？具体内容是什么？请尽可能地用自己的话表述出来.

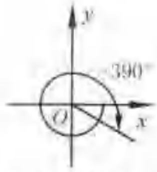
本节内容在高考中一般以基础题为主，通常以选择题、填空题的形式出现，有时也会渗透到解答题中，总体难度不大.

本节的重点是任意角的概念，用集合表示终边相同的角. 难点是角的概念的推广和终边相同的角之间的关系.

学好本节内容的关键是理解任意角的概念，在平面直角坐标系内，可以通过数形结合来认识角的几何表示和终边相同的角的集合，要正确理解正角、负角、零角的概念，正确理解象限角的概念，其中终边落在坐标轴上是一种“边界”状态，它不属于任何象限，解题时要注意考虑这种情况. 两个相等的角，终边一定相同，但终边相同的两个角不一定相等.

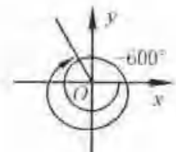
要注意区分锐角、$0°\sim 90°$的角、小于 $90°$ 的角、第一象限角. 其中 $0°\sim 90°$ 的角是指 $0°\leqslant\alpha<90°$；锐角一定小于 $90°$，但小于 $90°$ 的角不一定是锐角，$0°$ 角、负角等均小于 $90°$；第一象限角不一定是锐角，但锐角一定是第一象限角.

(3)



-390°角是第四象限角.

(4)



-600°角是第二象限角.

注意 (1) 第二象限角不一定大于第一象限角，故不能用象限角来比较两个角的大小.

(2) 终边相同的角不一定相等，如：120°角与-600°角.

例2 写出终边在第一、第三象限的角的集合.

解题思路 先分别写出第一象限和第三象限角的集合，然后求并集.

解 第一象限角的集合为$Q_1=\{\alpha|k\cdot 360^\circ<\alpha<90^\circ+k\cdot 360^\circ, k\in \mathbf{Z}\}$，

第三象限角的集合为$Q_2=\{\alpha|180^\circ+k\cdot 360^\circ<\alpha<270^\circ+k\cdot 360^\circ, k\in \mathbf{Z}\}$，

于是终边在第一、第三象限的角的集合为

$$\begin{aligned}Q=Q_1\cup Q_2&=\{\alpha|2k\cdot 180^\circ<\alpha<90^\circ+2k\cdot 180^\circ, k\in \mathbf{Z}\}\\&\quad\cup\{\alpha|180^\circ+2k\cdot 180^\circ<\alpha<90^\circ+180^\circ+2k\cdot 180^\circ, k\in \mathbf{Z}\}\\&=\{\alpha|2k\cdot 180^\circ<\alpha<90^\circ+2k\cdot 180^\circ, k\in \mathbf{Z}\}\\&\quad\cup\{\alpha|(2k+1)\cdot 180^\circ<\alpha<90^\circ+(2k+1)\cdot 180^\circ, k\in \mathbf{Z}\}\\&=\{\beta|n\cdot 180^\circ<\beta<90^\circ+n\cdot 180^\circ, n\in \mathbf{Z}\}.\end{aligned}$$

注意 (1) 象限角不包括角的终边在x轴、y轴上的角.

(2) 180°的整数倍，可分成180°的奇数倍和180°的偶数倍，切勿漏写$k\in \mathbf{Z}$，$n\in \mathbf{Z}$.

例3 写出与60°角终边相同的角的集合S，并把S中适合不等式$-1\ 080^\circ\leqslant\beta<-360^\circ$的元素$\beta$写出来.

解题思路 根据与角α终边相同的角的集合是$S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot 360^\circ, k\in \mathbf{Z}\}$写出集合，然后取$k$的值，再求出满足条件的角.

解 与60°角终边相同的角的集合为$S=\{\beta|\beta=60^\circ+k\cdot 360^\circ, k\in \mathbf{Z}\}$.

S中适合不等式$-1\ 080^\circ\leqslant\beta<-360^\circ$的元素是：

$$60^\circ-3\times 360^\circ=-1\ 020^\circ,$$
$$60^\circ-2\times 360^\circ=-660^\circ.$$

注意 写出与60°角终边相同的角的集合后，求具体的角时可用赋值法，根据范围适当估值.

例4 已知角α是第二象限角，试判断$\frac{\alpha}{2}$是第几象限角.

解题思路 先把第二象限角α表示出来，然后对k进行分类讨论得出结果.

解 ∵ α是第二象限角，∴ $90^\circ+k\cdot 360^\circ<\alpha<180^\circ+k\cdot 360^\circ, k\in \mathbf{Z}$.

∴ $45^\circ+k\cdot 180^\circ<\frac{\alpha}{2}<90^\circ+k\cdot 180^\circ, k\in \mathbf{Z}$.

(1) 当$k=2n$ $(n\in \mathbf{Z})$时，可得$45^\circ+n\cdot 360^\circ<\frac{\alpha}{2}<90^\circ+n\cdot 360^\circ$ $(n\in \mathbf{Z})$，此时，$\frac{\alpha}{2}$在第一象限；

(2) 当$k=2n+1$ $(n\in \mathbf{Z})$时，可得$225^\circ+n\cdot 360^\circ<\frac{\alpha}{2}<270^\circ+n\cdot 360^\circ$ $(n\in \mathbf{Z})$，此时，$\frac{\alpha}{2}$在第三象限.

综上所述，$\frac{\alpha}{2}$是第一或第三象限角.

解题方略

本课时主要有两类题型：

(1) 与角α终边相同的角，一般先写出与角α终边相同的角的一般式$\beta=\alpha+k\cdot 360^\circ$ $(k\in \mathbf{Z})$，然后根据条件讨论k的取值.而判定一个角所在的象限，通常写成$\beta=\alpha+k\cdot 360^\circ$，$0^\circ\leqslant\alpha<360^\circ$，$k\in \mathbf{Z}$，只要判定$\alpha$所在的象限即可.

(2) 根据角α所在的象限，确定2α，$\frac{\alpha}{2}$，$\frac{\alpha}{3}$所在的象限.一般可先写出角α的范围，然后分别写出2α，$\frac{\alpha}{2}$，$\frac{\alpha}{3}$的范围，再对k进行讨论并判断.注意对2α不要漏掉终边在坐标轴上的情况.对$\frac{\alpha}{2}$，$\frac{\alpha}{3}$还可以利用图象画出区域，如图1－1，图1－2所示.

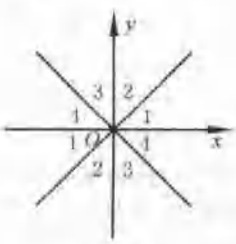


图1－1

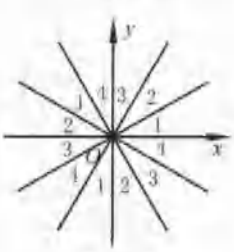


图1－2

图中数字1，2，3，4分别表示当α在第一、第二、第三、第四象限时，$\frac{\alpha}{2}$，$\frac{\alpha}{3}$所在的位置分别为如图1－1，图1－2所示.

思考 角$\frac{\alpha}{3}$所在的象限应如何讨论?

同步训练

理解巩固

1. 下列命题正确的是 ( )
(A) 第一象限角一定不是负角. (B) 小于90°的角一定是锐角.
(C) 钝角一定是第二象限角. (D) 终边相同的角一定相等.
2. $-800°$角的终边在 ( )
(A) 第一象限. (B) 第二象限. (C) 第三象限. (D) 第四象限.
3. 若α是锐角,则$180°-\alpha$是 ( )
(A) 第一象限角. (B) 第二象限角. (C) 第三象限角. (D) 第四象限角.
4. 把$-1\ 480°$化成$k\cdot 360°+\alpha$ ($0°\leqslant\alpha<360°, k\in\mathbf{Z}$)的形式是________.
5. 在$0°\sim360°$范围内与$-21°$终边相同的角是________,在$-360°\sim720°$范围内,与角$-21°$终边相同的角是________.
6. 在平面直角坐标系中,画出下列集合的角的终边的位置(用阴影表示):
(1) $\{\alpha|k\cdot 360°\leqslant\alpha\leqslant k\cdot 360°+135°, k\in\mathbf{Z}\}$;
(2) $\{\alpha|k\cdot 180°\leqslant\alpha\leqslant k\cdot 180°+90°, k\in\mathbf{Z}\}$.

发展提高

7. 角$\alpha=45°+k\cdot 180°$ ($k\in\mathbf{Z}$)的终边落在 ( )
(A) 第一或第三象限. (B) 第一或第二象限.
(C) 第二或第四象限. (D) 第三或第四象限.
8. 若角α与β的终边相同,则一定有 ( )
(A) $\alpha+\beta=180°$. (B) $\alpha+\beta=0°$.
(C) $\alpha-\beta=k\cdot 360°$ ($k\in\mathbf{Z}$). (D) $\alpha+\beta=k\cdot 360°$ ($k\in\mathbf{Z}$).
9. 已知角2α的终边在x轴的上方,那么角α是 ( )
(A) 第一象限角. (B) 第一或第二象限角.
(C) 第一或第三象限角. (D) 第一或第四象限角.
10. 已知角α是一个不大于180°的正角.若角7α的终边与角α的终边重合,那么角$\alpha=$________.
11. 已知α是第二象限角,则$180°+\alpha$是第________象限角;$-\alpha$是第________象限角;$180°-\alpha$是第________象限角.
12. 终边在直线$y=-x$上的角的集合是________.

纠错在线

☞做题的目的是评估自己的学习效果,提高解题的准确率与速度.每次做题时,你都应该认真、仔细.题目做错是正常的,但作业完成后,务必将做错的那些习题标出来,分析出错的原因,这样你就可以在纠错中不断进步.

做对________题;
做错________题;
原因分析________.

纠错在线

13. 已知集合 A,B,C 满足 $A=\{\alpha|\alpha=k\cdot360^\circ+45^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{\alpha|\alpha=k\cdot180^\circ+45^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，$C=\{\alpha|\alpha=k\cdot720^\circ+45^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，试判断 A,B,C 之间的关系.

14. (1) 已知角 α 的终边与 -50° 角的终边关于 y 轴对称，求角 α 的集合 M；
(2) 已知角 α 的终边与 -50° 角的终边互相垂直，求角 α 的集合 N.

15. 若 α 是第四象限角，试判断 $2\alpha,\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{3}$ 是第几象限角.

16. 若角 θ 的终边与 60° 角的终边相同，则在区间 $[0,360^\circ)$ 内有哪些角的终边与角 $\frac{\theta}{4}$ 的终边相同?

高考链接

☞这些高考真题你会做吗？做不出没有关系，因为你至少了解了与本节知识有关的高考命题的一些路数.

17. (2005・全国卷)已知角 α 是第二象限角，则角 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限是 (　　)

(A) 第一或第二象限.　　(B) 第二或第三象限.
(C) 第一或第三象限.　　(D) 第二或第四象限.

1.1.2 弧度制

名师引路

本节内容在高考中一般以选择题居多，难度不大.

本节的重点是弧度的意义以及弧度与角度的换算. 难点是对弧度的意义的

教材解读

1. 弧度制

长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角，用弧度作为度量单位来度量角的单位制叫做弧度制. 1 弧度，记作 1 rad，如图 1-3 所示.

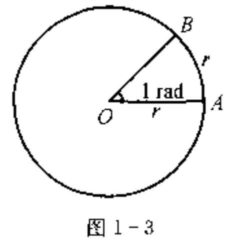


图 1-3

2. 弧度数公式

正角的弧度数是一个正数，负角的弧度数是一个负数，零角的弧度数是零. 如果半径为 r 的圆心角 α 所对的弧长为 l，那么，角 α 的弧度数的绝对值是 $|\alpha|=\frac{l}{r}$. α 的正负由角 α 的终边的旋转方向决定.

3. 扇形中的有关公式

若 R 为圆的半径，l 为扇形的弧长，α $(0<\alpha<2\pi)$ 为扇形的圆心角，S 是扇形的面积，那么：

(1) $l=\alpha R$； (2) $S=\frac{1}{2}\alpha R^2$； (3) $S=\frac{1}{2}lR$.

4. 角度与弧度之间的互化

(1) 将角度化为弧度：$360^\circ=2\pi$ rad；$180^\circ=\pi$ rad；$1^\circ=\frac{\pi}{180}$ rad$\approx0.017\ 45$ rad.

(2) 将弧度化为度：2π rad$=360^\circ$；π rad$=180^\circ$；1 rad$=\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ\approx57.30^\circ=57^\circ18'$.

5. 角度与实数之间的关系

角的概念推广后，无论用角度制还是弧度制，都能在角的集合与实数集 **R** 之间建立一一对应关系，即"每个角(即这个角的弧度数)都有唯一的实数与它对应"，同时"每个实数也都有唯一的一个角(即弧度数等于这个实数的角)与它对应".

典例剖析

例 1 (1) 将下列各度化为弧度：

①-45°； ②$135^\circ$； ③-390°； ④$750^\circ$.

(2) 将下列各弧度化为角度：

①$\frac{\pi}{6}$； ②$\frac{5\pi}{3}$； ③$\frac{11\pi}{6}$； ④$-\frac{5\pi}{12}$.

解题思路 利用 $1^\circ=\frac{\pi}{180}$ rad$\approx0.017\ 45$ rad 和 1 rad$=\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ\approx57.30^\circ=57^\circ18'$进行互化即可.

解 (1) ①$-45^\circ=\frac{\pi}{180}$ rad$\times(-45)=-\frac{\pi}{4}$ rad.

②$135^\circ=\frac{\pi}{180}$ rad$\times135=\frac{3\pi}{4}$.

③$-390^\circ=\frac{\pi}{180}$ rad$\times(-390)=-\frac{13\pi}{6}$ rad.

④$750^\circ=\frac{\pi}{180}$ rad$\times750=\frac{25\pi}{6}$ rad.

(2) ①$\frac{\pi}{6}=\left(\frac{\pi}{6}\times\frac{180}{\pi}\right)^\circ=30^\circ$.

②$\frac{5\pi}{3}=\left(\frac{5\pi}{3}\times\frac{180}{\pi}\right)^\circ=300^\circ$.

③$\frac{11\pi}{6}=\left(\frac{11\pi}{6}\times\frac{180}{\pi}\right)^\circ=330^\circ$.

④$-\frac{5\pi}{12}=-\left(\frac{5\pi}{12}\times\frac{180}{\pi}\right)^\circ=-75^\circ$.

(1) "弧度"或"rad"通常可省略不写.

(2) 若没有要求精确到多少，通常保留 π.

名师引路

理解.

理解 1 弧度角的含义，是了解弧度制，并能进行弧度与角度换算的关键. 对于任何一个固定的圆心角 α，所对弧长与半径的比是一个仅与角 α 的大小有关的常数. 因此，弧长等于半径的弧所对的圆心角的大小并不随半径变化而变化，而是一个大小确定的角.

注意角度制与弧度制的比较：

(1) 弧度制是以"弧度"为单位的角，角度制是以"度"为单位的角；

(2) 1 弧度是等于半径长的圆弧所对的圆心角的大小，而 1°是圆周的$\frac{1}{360}$所对的圆心角的大小；

(3) 无论是以"弧度"还是以"角度"为单位，固定的角的大小都是一个与半径无关的定值.

在运用公式 $|\alpha|=\frac{l}{r}$ 求圆心角时，要注意其结果是圆心角的弧度数的绝对值，同时要掌握该公式及其变形，如 $l=|\alpha|r$ (即弧长公式)，$r=\frac{l}{|\alpha|}$ $(\alpha\neq0)$. 如果已知角以"度"为单位，应先将角度化为弧度，然后进行计算.

解题方略

本课时主要有三类题型：

(1) 弧度与角度之间的换算. 如例1,运用弧度与角度之间的换算公式求解，注意单位需保持一致.

(2) 用弧度制表示的角与实数之间的运算. 如例3,在求函数的定义域时经常会出现，可借助数轴解决.

(3) 扇形的面积公式与弧长公式的应用. 一般应先把圆心角化成弧度.

例2 已知角 $\alpha=1\,690^\circ$.

(1) 把角 α 写成 $\beta+2k\pi$ ($k\in\mathbf{Z},\beta\in[0,2\pi)$)的形式；

(2) 求角 θ,使角 θ 与角 α 的终边相同,且 $\theta\in(-4\pi,-2\pi)$.

解题思路 先把题中的度化为弧度,然后根据 $\beta\in[0,2\pi)$ 把角 α 写成 $\beta+2k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$)形式,再利用终边相同的角的公式,结合角 θ 的取值范围,求出角 θ.

解 (1) $\alpha=1\,690^\circ=\frac{\pi}{180}\ \text{rad}\times1\,690=\frac{169\pi}{18}=8\pi+\frac{25\pi}{18}$.

(2) 由(1)知,角 α 的终边与 $\frac{25\pi}{18}$ 角的终边相同. $\therefore\ \theta=\frac{25\pi}{18}+2k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$).

$\because\ \theta\in(-4\pi,-2\pi)$, $\therefore$ 当 $k=-2$ 时,$\theta=-\frac{47\pi}{18}\in(-4\pi,-2\pi)$.

$\therefore$ 所求的角 θ 为 $-\frac{47\pi}{18}$.

注意 角的单位要一致,度与弧度不能混用,若写成 $\alpha=8\pi+250^\circ$ 或 $\alpha=4\times360^\circ+\frac{25\pi}{18}$ 都是错误的.

例3 已知集合 $A=\left\{x\,\middle|\,k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant x<k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$,集合 $B=\{x\mid-2\leqslant x\leqslant3\}$,求 $A\cap B$.

解题思路 根据集合 B 的范围,先适当选取 k 的值,然后写出公共元素.

解 对 $k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant x<k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,取 $k=0$,有 $\frac{\pi}{4}\leqslant x<\frac{\pi}{2}$；

取 $k=-1$,有 $-\frac{3\pi}{4}\leqslant x<-\frac{\pi}{2}$；

当 k 取其他值时,$k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant x<k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$ 与 $-2\leqslant x\leqslant3$ 没有公共元素,如图 1-4 所示.

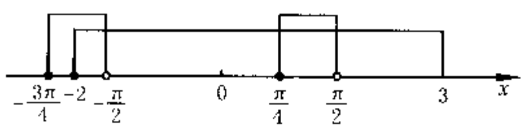


图 1-4

故 $A\cap B=\left\{x\,\middle|\,-2\leqslant x<-\frac{\pi}{2},\text{或}\ \frac{\pi}{4}\leqslant x<\frac{\pi}{2}\right\}$.

注意 根据集合 B 的范围,适当选取 k 的值后,$A\cap B$ 中的元素与 k 无关.

例4 如果一个扇形的周长为 20 cm,则扇形的半径和圆心角各取什么值时,才能使扇形的面积最大? 并求出最大面积.

解题思路 利用扇形面积公式,建立关于半径 R 的二次函数,然后求其最大值.

解 设扇形的半径为 R,圆心角为 α ($0<\alpha<2\pi$),则 $\alpha=\frac{20}{R}-2$.

$\therefore$ 扇形的面积 $S=\frac{1}{2}\alpha\cdot R^2=10R-R^2=-(R-5)^2+25$.

当 $R=5$ 时,S 有最大值 25.

故半径为 5 cm,圆心角为 2 rad 时,扇形面积最大,最大面积为 25 cm^2.

注意 扇形的周长包括扇形的弧长与两条半径,不能认为只是弧长.

同步训练

纠错在线

理解巩固

1. 把$-\frac{8\pi}{3}$化成度是 (　　)

(A) $-960°$. (B) $-480°$. (C) $-120°$. (D) $-60°$.

2. $\frac{16\pi}{3}$化成$\alpha+2k\pi$ ($0\leqslant\alpha<2\pi,k\in\mathbf{Z}$)的形式是 (　　)

(A) $\frac{\pi}{3}+5\pi$. (B) $\frac{4\pi}{3}+4\pi$.

(C) $-\frac{2\pi}{3}+6\pi$. (D) $\frac{7\pi}{3}+3\pi$.

3. 已知角$\alpha=-3$,则角α的终边落在 (　　)

(A) 第一象限. (B) 第二象限. (C) 第三象限. (D) 第四象限.

4. 终边在第二、第四象限角平分线上的角的集合为________.

5. 若2 rad的圆心角所对的弧长为4 cm,则这个圆心角所在扇形的面积为________.

6. 已知扇形的面积为1,周长为4,求扇形的圆心角及相应的弦长.

发展提高

7. 设$M=\left\{\alpha\mid\alpha=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{5},k\in\mathbf{Z}\right\}$,$N=\{\alpha\mid-\pi<\alpha<\pi\}$,则$M\cap N$等于 (　　)

(A) $\left\{-\frac{\pi}{5},\frac{3\pi}{10}\right\}$. (B) $\left\{-\frac{7\pi}{10},\frac{4\pi}{5}\right\}$.

(C) $\left\{-\frac{7\pi}{10},-\frac{\pi}{5},\frac{3\pi}{10},\frac{4\pi}{5}\right\}$. (D) $\left\{-\frac{7\pi}{10},\frac{3\pi}{10}\right\}$.

8. 设$\theta\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$,且角$17\theta$的终边与角$\theta$的终边相同,则$\tan\theta$等于 (　　)

(A) $\sqrt{2}-1$. (B) $\sqrt{2}$. (C) $\sqrt{2}+1$. (D) 1.

9. 已知一扇形的弧所对的圆心角为54°,半径$r=20$ cm,则扇形的周长为 (　　)

(A) 6π cm. (B) 60 cm. (C) $(40-6\pi)$ cm. (D) 1 080 cm.

10. 已知集合$A=\left\{x\mid x=k\pi+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$,$B=\left\{x\mid x=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$,则$A$,$B$的关系为________.

11. 已知2 rad的圆心角所对的弦长为m,则此圆心角所对的弧长等于________.

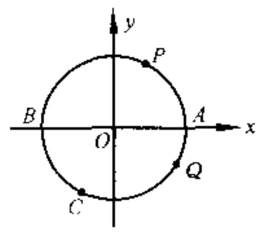
12. 设角α的终边与$\frac{7\pi}{5}$角的终边关于y轴对称,且$\alpha\in(-2\pi,2\pi)$,则$\alpha=$________.

13. (1) 写出所有与$\frac{73\pi}{12}$角终边相同的角的集合;

纠错在线

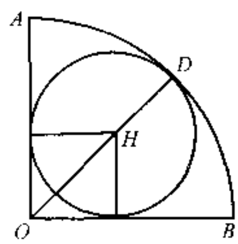
(2) 求不等式 $0<\frac{73\pi}{12}+k\pi<2\pi$ $(k\in \mathbf{Z})$的整数解,并在 0 到 2π 范围内求出与$\frac{73\pi}{12}$角终边相同的角.

14. 如图,动点 P,Q 从点 $A(4,0)$出发,沿着圆周做匀速运动.点 P 按逆时针方向每秒转$\frac{\pi}{3}$ rad,点 Q 按顺时针方向每秒转$\frac{\pi}{6}$ rad,求点 P,Q 第一次相遇时所用的时间,相遇点 C 的坐标及点 P,Q 各自走过的弧长.



(第 14 题)

15. 如图,在扇形 AOB 中,$\angle AOB=90^\circ$,$\overset{\frown}{AB}=l$,求此扇形的内切圆的面积.



(第 15 题)

16. 一个扇形的周长为定值 l,问:当它的圆心角 θ 取何值时,此扇形的面积最大?最大面积是多少?

高考链接

17. (2005·上海卷)若 α 是第四象限角,则 $\pi-\alpha$ 是 ( )

(A) 第一象限角. (B) 第二象限角. (C) 第三象限角. (D) 第四象限角.

1.2 任意角的三角函数

1.2.1 任意角的三角函数

第1课时 任意角的三角函数(一)

教材解读

1. 任意角的三角函数的定义

设 α 是一个任意角，它的终边与单位圆交于点 $P(x,y)$，那么：

(1) y 叫做 α 的正弦，记作 $\sin\alpha$，即 $\sin\alpha=y$；

(2) x 叫做 α 的余弦，记作 $\cos\alpha$，即 $\cos\alpha=x$；

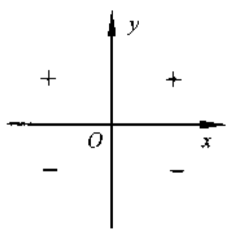
(3) $\frac{y}{x}$ 叫做 α 的正切，记作 $\tan\alpha$，即 $\tan\alpha=\frac{y}{x}$ $(x\neq 0)$.

正弦、余弦、正切都是以角为自变量，以单位圆上的点的坐标或坐标的比值为函数值的函数，我们将它们统称为三角函数.

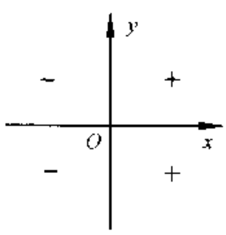
2. 三角函数的定义域和函数值

根据三角函数定义可知，对任意角 α，正弦函数、余弦函数均有意义. 对于正切函数，当 $\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$时，α 的终边在 y 轴上，这时点 P 的横坐标 x 等于 0，所以 $\frac{y}{x}$ 无意义，即正切函数的定义域为 $\left\{\alpha \mid \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$. 由于角 α 可以是任意角，根据定义可知，在求一个三角函数值时，通常根据角的终边所在的位置对符号进行讨论.

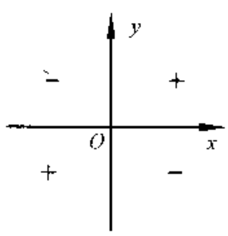
3. 三角函数的值在各象限的符号



sin α



cos α



tan α

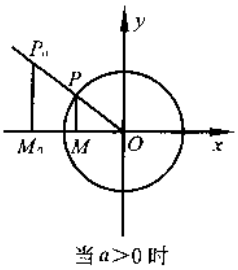
典例剖析

例1 已知角 α 的终边经过点 $P_0(-4a,3a)$ $(a\neq 0)$，求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 的值.

解题思路 根据三角函数的定义求解.

解 由已知得 $|OP_0|=\sqrt{(-4a)^2+(3a)^2}=5|a|$. 设角 α 的终边与单位圆交于点 $P(x,y)$，如图 1-5，1-6 所示.

分别过点 P，P_0 作 x 轴的垂线为 MP，M_0P_0，则 $|M_0P_0|=3|a|$，$|OM_0|=4|a|$.



当 $a>0$ 时

图 1-5

名师引路

任意角的三角函数是三角函数中的一个重点内容，在高考中常出现在选择题、填空题中，主要考查三角函数的符号，角的范围等.

本节的重点是任意角的正弦、余弦、正切的定义，三角函数值的符号. 难点是用角的终边上的点的坐标刻画三角函数.

学习中要注意三角函数值只与角的终边的位置有关，而与终边上的点的位置无关.

解题方略

本课时主要有三类题型：

(1) 根据定义求三角函数的值. 一般利用角的终边与单位圆的交点这一特殊的点的坐标来求解.

(2) 判断一个角的三角函数值的符号. 根据角所