



读考研书 找人大社

2008 考研

历届数学真题题型解析(数学二)

主编 黄先开 曹显兵

● 囊括**21年**全部真题 ● 名师归纳总结**71**题型

全书按大纲考试要求设置结构，每章下归纳题型分类解析1987~2007年真题
题题精解，有分析，有评注，多种解法、多种思路

章章总结，将历年试题题型、分值分布情况分别列表，考试重点清晰可见

每章后附自测练习题，全部来自数一、三、四的历年真题，互相借鉴，触类旁通

21年真题原样附录在后，供考生自测之用，其解析在正文的位置全部标明

考研历届数学真题 题型解析(数学二)

► 主 编 黄先开 曹显兵
► 编 者 黄先开 曹显兵
施明存 殷先军

正版查询及服务程序

刮 开 涂 层

获取 20 位数字编码

上 www.1kao.net 注册

登录增值服务进免费课堂

2008

图书在版编目(CIP)数据

考研历届数学真题题型解析(数学二)/黄先开,曹显兵主编.2版

北京:中国人民大学出版社,2007

ISBN 978-7-300-07361-3

I. 考...

II. ①黄...②曹...

III. 高等数学-研究生-入学考试-解题

IV. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 017658 号

考研历届数学真题题型解析(数学二)

主 编 黄先开 曹显兵

出版发行 中国人民大学出版社

社 址 北京中关村大街 31 号

邮政编码 100080

电 话 010-62511242(总编室)

010-62511398(质管部)

010-82501766(邮购部)

010-62514148(门市部)

010-62515195(发行公司)

010-62515275(盗版举报)

网 址 <http://www.crup.com.cn>

<http://www.lkao.net> (中国 1 考网)

经 销 新华书店

印 刷 北京鑫霸印务有限公司

规 格 210 mm×285 mm 16 开本

版 次 2006 年 6 月第 1 版

2007 年 2 月第 2 版

印 张 20.25

印 次 2007 年 2 月第 1 次印刷

字 数 608 000

定 价 22.00 元

版权所有 侵权必究

印装差错 负责调换

前言

自从 1987 年全国工学、经济学硕士研究生入学数学实行统一考试以来,至今已 21 年,共命制试卷近百份,有上千道试题。这些试题是参加命题的专家、教授的智慧 and 劳动的结晶,它既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求,展示出统考以来数学考试的全貌,又蕴涵着命题专家在《数学考试大纲》要求下的命题指导思想、原则、特点和趋势,是广大考生和教师了解试题信息、分析命题动态、总结命题规律最直接、最宝贵的第一手资料。

拥有一套内容完整、编排合理、分析透彻、解答规范、总结到位的数学历年真题,是广大准备考研学子的期盼。通过认真分析研究、了解、消化和掌握历年试题,可以发现命题的特点和趋势,找出知识之间的有机联系,总结每部分内容的考查重点、难点,归纳常考典型题型,凝练解题思路、方法和技巧,明确复习方向,从而真正做到有的放矢、事半功倍地进行复习。本书是作者在十多年收集、整理资料 and 进行考研数学辅导的基础上,通过对历年试题的精心分析研究,并结合授课体会和学生的需要全新编写而成的,相信能够满足考生的要求。

我们认为本书具有以下特点:

1. **内容最全面。**汇集了统考以来 21 年的所有试题,便于考生全面系统地把握历年试题的动态变化。在每章后面还将其余三类试卷的相关典型真题作为习题提供(如数学一每章后面精选了数学二、数学三和数学四的同类型考题),以便考生进一步巩固相关知识,考生有了本书后,也就相当于拥有了其余三类试卷的资料。

2. **题型最丰富。**根据考试大纲的要求,每一章节均按题型进行归类,并对每一题型进行了分析、归纳和总结。这样考生可通过题型研究,把握命题特点和命题思路,做到举一反三,触类旁通。

3. **解析最详尽。**先分析——解题的思路、方法,然后详解——详细、规范的解答过程,再就是评注——解题思路、方法和技巧的归纳总结,所涉及的知识、命题意图和可能延伸的考查情形。对命题思路、解题的重点难点进行这样深入细致的解析,相信有助于考生把握解题规律、拓展分析思路、提炼答题技巧,从而大大提高应试水平。

4. **对照最直接。**本书在每部分的开头,先列出了考试大纲规定的内容与要求,与此相对照再进行题型归类和总结,顺序与考试大纲和一般教材一致,便于考生对照复习。

5. **总结最完整。**除每类题型均有归纳总结外,每章还有历年考研试题按题型分布和分数的总结,这样可以帮助考生了解每类题型考查的频率、所占的比重,从而发现命题的重点、最常考的题型,以便更有针对性地进行复习。

本书既根据考试内容按章节编排,又提供成套试卷。复习前期建议考生按章节内容与教材、复习指导书同步进行,后期可将本书作为模拟训练套题使用。尽管本书每题均有详尽的解析,但希望读者不要轻易去查看分析、详解和评注,而一定要自己先动手去进行演练。在每题做完之后,再去看书中的分析、详解和评注,仔细回顾、研究一下自己的分析、思路和解答过程与书中有什么异同;如果存在问题,应尽量查清原因,看看自己是在基本理论、基本概念与基本方法等方面有欠缺,还是在做题技巧、知识的综合与灵活运用等方面掌握不够。注意,这

样的归纳总结过程是必不可少的，其重要性甚至超过做题本身。整本书都这样复习下来，在掌握基本理论、基本概念和基本方法上，在综合、灵活运用知识和思维能力的训练上，相信读者一定会有质的提高。

本书一方面保留了我们过去编写的历年试题解析图书的优点，同时在这次编写完善过程中，参考了众多相关的教材和复习指导书，在此不一一提及，谨对所有相关的作者表示真诚的谢意。

由于时间比较仓促，加上编者水平所限，书中难免还有不足之处，恳请广大读者批评指正。

成功来源于自信，只要广大考生充满信心，通过脚踏实地的艰苦努力，就一定能够心想事成。

编者

2007年2月于北京

目 录

第一部分 高等数学

第一章 函数、极限、连续 3

- 题型 1.1 函数的概念及其特性 3
- 题型 1.2 极限概念与性质 6
- 题型 1.3 函数极限的计算 8
- 题型 1.4 函数极限的逆问题 14
- 题型 1.5 数列的极限 16
- 题型 1.6 无穷小量的比较 20
- 题型 1.7 函数的连续性及其间断点的分类 24
- 本章总结 30
- 自测练习题 31
- 自测练习题答案或提示 34

第二章 一元函数微分学 35

- 题型 2.1 考查导数的定义 35
- 题型 2.2 利用导数求曲线的切线、法线方程 39
- 题型 2.3 一般导函数的计算 44
- 题型 2.4 可导、连续与极限的关系 52
- 题型 2.5 微分的概念与计算 53
- 题型 2.6 利用导数确定单调区间与极值 56
- 题型 2.7 求函数的最值 61
- 题型 2.8 求函数曲线的凹凸区间与拐点 63
- 题型 2.9 求函数曲线的渐近线 66
- 题型 2.10 利用导数综合研究函数的性态 69
- 题型 2.11 确定函数方程 $f(x) = 0$ 的根 72
- 题型 2.12 确定导函数方程 $f'(x) = 0$ 的根 75
- 题型 2.13 有关高阶导数中值的命题 77
- 题型 2.14 微分中值定理的综合应用 79

- 题型 2.15 利用导数证明不等式 81
- 题型 2.16 曲率与弧长的计算 86
- 本章总结 87
- 自测练习题 87
- 自测练习题答案或提示 91

第三章 一元函数积分学 92

- 题型 3.1 原函数与不定积分的概念 92
- 题型 3.2 定积分的基本概念与性质 94
- 题型 3.3 不定积分的计算 96
- 题型 3.4 定积分的计算 104
- 题型 3.5 变限积分 110
- 题型 3.6 定积分的证明题 120
- 题型 3.7 广义积分 127
- 题型 3.8 应用题 131
- 本章总结 146
- 自测练习题 147
- 自测练习题答案或提示 152

第四章 多元函数微分学 155

- 题型 4.1 多元复合函数求偏导数和全微分 155
- 题型 4.2 隐函数求偏导和全微分 157
- 题型 4.3 求在变换下方程的变形 159
- 题型 4.4 求多元函数的极值和最值 159
- 本章总结 162
- 自测练习题 162
- 自测练习题答案或提示 166

第五章 重积分 168

- 题型 5.1 将二重积分化为累次积分 168
- 题型 5.2 利用积分区域的对称性和被积函数的奇偶性计算二重积分 169
- 题型 5.3 分块计算二重积分 170
- 题型 5.4 交换坐标系 172

本章总结	173
自测练习题	173
自测练习题答案或提示	175
第六章 微分方程	176
题型 6.1 一阶微分方程	176
题型 6.2 可降阶方程	184

题型 6.3 高阶常系数线性微分方程 ...	186
题型 6.4 求解含变限积分的方程	193
题型 6.5 微分方程的应用	194
本章总结	202
自测练习题	202
自测练习题答案或提示	204

第二部分 线性代数

第一章 行列式

题型 1.1 利用行列式的性质和按行(列) 展开定理计算行列式	209
题型 1.2 利用行列式和矩阵的运 算性质计算行列式	210
题型 1.3 利用秩、特征值和相似 矩阵等计算行列式	212
本章总结	213
自测练习题	213
自测练习题答案或提示	215

第二章 矩阵

题型 2.1 有关逆矩阵的计算与证明 ...	216
题型 2.2 矩阵的乘法运算	218
题型 2.3 解矩阵方程	218
题型 2.4 与初等变换有关的命题	220
题型 2.5 与伴随矩阵 A^* 有关 的命题	222
题型 2.6 矩阵秩的计算与证明	223
本章总结	224
自测练习题	224
自测练习题答案或提示	229

第三章 向量

题型 3.1 向量的线性组合与 线性表示	231
题型 3.2 向量组的线性相关性	234
题型 3.3 求向量组的秩与矩阵的秩 ...	237
本章总结	238
自测练习题	239
自测练习题答案或提示	241

第四章 线性方程组

题型 4.1 解的判定、性质和结构	243
-------------------------	-----

线性代数

题型 4.2 求齐次线性方程组的基础解系、 通解	245
题型 4.3 求非齐次线性方程组的 基础解系、通解	247
题型 4.4 抽象方程组的求解问题	250
题型 4.5 有关基础解系的命题	252
题型 4.6 讨论两个方程组解之间的关系 (公共解、同解)	252
题型 4.7 与 $AB = 0$ 有关的命题	255
本章总结	256
自测练习题	256
自测练习题答案或提示	260

第五章 矩阵的特征值与特征向量

题型 5.1 求数字矩阵的特征值和 特征向量	262
题型 5.2 求抽象矩阵的特征值	263
题型 5.3 特征值、特征向量 的逆问题	264
题型 5.4 相似矩阵的判定 及其逆问题	265
题型 5.5 可对角化的判定 及其逆问题	266
题型 5.6 实对称矩阵的性质	268
题型 5.7 特征值、特征向量的应用	271
本章总结	272
自测练习题	272
自测练习题答案或提示	275

第六章 二次型

题型 6.1 合同变换与合同矩阵	277
------------------------	-----

附 录

附录一	1987 年全国硕士研究生入学 统一考试数学二试题	278	附录十二	1998 年全国硕士研究生入学 统一考试数学二试题	290
附录二	1988 年全国硕士研究生入学 统一考试数学二试题	279	附录十三	1999 年全国硕士研究生入学 统一考试数学二试题	293
附录三	1989 年全国硕士研究生入学 统一考试数学二试题	280	附录十四	2000 年全国硕士研究生入学 统一考试数学二试题	294
附录四	1990 年全国硕士研究生入学 统一考试数学二试题	281	附录十五	2001 年全国硕士研究生入学 统一考试数学二试题	296
附录五	1991 年全国硕士研究生入学 统一考试数学二试题	282	附录十六	2002 年全国硕士研究生入学 统一考试数学二试题	298
附录六	1992 年全国硕士研究生入学 统一考试数学二试题	284	附录十七	2003 年全国硕士研究生入学 统一考试数学二试题	299
附录七	1993 年全国硕士研究生入学 统一考试数学二试题	285	附录十八	2004 年全国硕士研究生入学 统一考试数学二试题	301
附录八	1994 年全国硕士研究生入学 统一考试数学二试题	286	附录十九	2005 年全国硕士研究生入学 统一考试数学二试题	303
附录九	1995 年全国硕士研究生入学 统一考试数学二试题	287	附录二十	2006 年全国硕士研究生入学 统一考试数学二试题	305
附录十	1996 年全国硕士研究生入学 统一考试数学二试题	289	附录二十一	2007 年全国硕士研究生入学 统一考试数学二试题	307
附录十一	1997 年全国硕士研究生入学				

PART ONE

第一部分

高等数学

第一章 函数、极限、连续

考试内容与要求

考 试 内 容

函数的概念及表示法,函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性,复合函数、反函数、分段函数和隐函数,基本初等函数的性质及其图形,初等函数,函数关系的建立,数列极限与函数极限的定义及其性质,函数的左极限与右极限,无穷小量和无穷大量的概念及其关系,无穷小量的性质及无穷小量的比较,极限的四则运算,极限存在的两个准则:单调有界准则和夹逼准则,两个重要极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

函数连续的概念,函数间断点的类型,初等函数的连续性,闭区间上连续函数的性质.

考 试 要 求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,并会建立应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.
5. 理解极限的概念,理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.
6. 掌握极限的性质及四则运算法则.
7. 掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法.
8. 理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的比较方法,会用等价无穷小量求极限.
9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.
10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

题型 1.1 函数的概念及其特性

1. (87,4分) * $f(x) = |x \sin x| e^{\cos x}$, $-\infty < x < +\infty$ 是

(A) 有界函数.

(B) 单调函数.

(C) 周期函数.

(D) 偶函数.

【 答案】

【答案】 应选(D).

【详解】 $f(-x) = |-x \sin(-x)| e^{\cos(-x)} = |x \sin x| e^{\cos x} = f(x)$, 可见 $f(x)$ 为偶函数, 故应选(D).

【评注】 周期性、奇偶性一般用定义进行验算, 有界性经常要结合微分中值定理进行分析, 而单调性一般用导数的符号来确定.

2. (88,5分) 设 $f(x) = e^{x^2}$, $f[\varphi(x)] = 1 - x$, 且 $\varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

* (87,4分) 表示该题为1987年考研数学二真题, 其分值为4分, 下同.

【分析】 先由 $f[\varphi(x)] = 1-x$ 确定 $\varphi(x)$ 的表达式,再求 $\varphi(x)$ 的定义域.

【详解】 由 $f[\varphi(x)] = 1-x$, 有 $e^{[\varphi(x)]^2} = 1-x$, 解得 $\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}$. 其定义域为 $\ln(1-x) \geq 0$, 得 $1-x \geq 1$, 即 $x \leq 0$.

【评注】 假设有关系式 $f[g(x)] = \varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)$ 的表达式已知, 有两种情况:

(1) 已知 f , 求 g : 相当于求反函数 $g(x) = f^{-1}[\varphi(x)]$.

(2) 已知 g , 求 f : 一般作变量代换 $g(x) = u \Rightarrow x = g^{-1}(u)$, 于是有 $f(u) = \varphi[g^{-1}(u)]$, 再根据函数关系与变量字母无关, 得知 $f(x) = \varphi[g^{-1}(x)]$.

3. (90, 3分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 则函数 $f[f(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 应填 1.

【分析】 直接按复合函数的定义计算即可, 注意 $|f(x)| \leq 1$.

【详解】 由 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 知 $|f(x)| \leq 1$. 因此有 $f[f(x)] = 1$.

【评注】 已知 $f(x), g(x)$, 求复合函数 $f[g(x)]$ (或 $g[f(x)]$), 一般用代入法逐次复合即可, 应特别注意的是 $g(x)$ 的值域与 $f(x)$ 的定义域的对应关系.

4. (92, 3分) 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ x^2 + x, & x > 0, \end{cases}$ 则

$$(A) f(-x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0, \\ -(x^2 + x), & x > 0. \end{cases}$$

$$(B) f(-x) = \begin{cases} -(x^2 + x), & x < 0, \\ -x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$(C) f(-x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ x^2 - x, & x > 0. \end{cases}$$

$$(D) f(-x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases} \quad \text{【 】}$$

【答案】 应选(D).

【分析】 直接按复合函数的定义计算即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】} \quad f(-x) &= \begin{cases} (-x)^2, & -x \leq 0 \\ (-x)^2 + (-x), & -x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} x^2 - x, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

故应选(D).

5. (97, 3分) 设 $g(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leq 0, \\ x+2, & x > 0, \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ -x, & x \geq 0, \end{cases}$ 则 $g[f(x)]$ 为

$$(A) \begin{cases} 2+x^2, & x < 0, \\ 2-x, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$(B) \begin{cases} 2-x^2, & x < 0, \\ 2+x, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$(C) \begin{cases} 2-x^2, & x < 0, \\ 2-x, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$(D) \begin{cases} 2+x^2, & x < 0, \\ 2+x, & x \geq 0. \end{cases} \quad \text{【 】}$$

【答案】 应选(D).

$$\text{【详解】} \quad g[f(x)] = \begin{cases} 2-f(x), & f(x) \leq 0 \\ f(x)+2, & f(x) > 0 \end{cases} = \begin{cases} 2-(-x), & x \geq 0 \\ 2+x^2, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2+x^2, & x < 0, \\ 2+x, & x \geq 0. \end{cases}$$

故应选(D).

6. (99, 3分) 设 $f(x)$ 是连续函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 则

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时, $F(x)$ 必是偶函数.

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时, $F(x)$ 必是奇函数.

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时, $F(x)$ 必是周期函数.

(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时, $F(x)$ 必是单调增函数. 【 】

【答案】 应选(A).

【分析】 本题涉及原函数的基本特性, 由于原函数有无穷多个, 如何表示它是问题的关键. 实际上, 只要找出一个原函数, 则所有的原函数就可表示出来, 而 $\int_0^x f(t) dt$ 正好就是所需要的一个原函数.

【详解】 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 可以表示为 $F(x) = \int_0^x f(t) dt + C$, 于是

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt + C \xrightarrow{u=-t} \int_0^x f(-u) d(-u) + C.$$

当 $f(x)$ 为奇函数时, $f(-u) = -f(u)$, 从而有

$$F(-x) = \int_0^x f(u) du + C = \int_0^x f(t) dt + C = F(x),$$

即 $F(x)$ 为偶函数,

故应选(A).

至于选项(B)、(C)、(D), 可分别举反例如下: $f(x) = x^2$ 是偶函数, 但其原函数 $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$, 不是奇函数, 可排除(B); $f(x) = \cos^2 x$ 是周期函数, 但其原函数 $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$ 不是周期函数, 可排除(C); $f(x) = x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增函数, 但其原函数 $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内非单调增函数, 可排除(D).

【评注 1】 有些考生将原函数写成形如: $F(x) = \int_a^x f(t) dt + C$, 结果在推导 $F(-x) = F(x)$ 时遇到困难, 因此特殊形式的原函数 $\int_0^x f(t) dt$ 是值得注意的.

【评注 2】 函数的基本性质有: 奇偶性、周期性、单调性和有界性, 当 $f(x)$ 具有某性质时, $F(x)$ 是否也具有相应的性质? 或反过来考虑, 当 $F(x)$ 具有某性质时, $f(x)$ 是否也具有相应的性质? 本题也可变形为考虑 $f(x)$ 与 $f'(x)$ (或 $f'(x)$ 与 $f(x)$) 的性质之间的关系, 对于常见的结论与反例应做到心中有数.

7. (01, 3分) 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于

(A) 0. (B) 1. (C) $\begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$ (D) $\begin{cases} 0, & |x| \leq 1, \\ 1, & |x| > 1. \end{cases}$ 【 】

【答案】 应选(B).

【详解】 由于 $|f(x)| \leq 1$, 于是 $f[f(x)] = 1$, 故 $f\{f[f(x)]\} = 1$, 故应选(B).

8. (05, 4分) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数, “ $M \Leftrightarrow N$ ”表示“ M 的充分必要条件是 N ”, 则必有

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数. (B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.
(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数. (D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数. 【 】

【答案】 应选(A).

【分析】 本题可直接推证, 但最简便的方法还是通过反例用排除法找到答案.

【详解 1】 任一原函数可表示为 $F(x) = \int_0^x f(t) dt + C$, 且 $F'(x) = f(x)$. 当 $F(x)$ 为偶函数时, 有 $F(-x) = F(x)$, 于是 $F'(-x) \cdot (-1) = F'(x)$, 即 $-f(-x) = f(x)$, 也即 $f(-x) = -f(x)$, 可见 $f(x)$ 为奇函数; 反过来, 若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $\int_0^x f(t) dt$ 为偶函数, 从而 $F(x) = \int_0^x f(t) dt + C$ 为偶函数, 故选(A).

【详解2】 令 $f(x) = 1$, 则取 $F(x) = x + 1$, 可排除(B), (C); 令 $f(x) = x$, 则取 $F(x) = \frac{1}{2}x^2$, 可排除(D), 故应选(A).

【评注】 请读者思考 $f(x)$ 与其原函数 $F(x)$ 的有界性之间有何关系?

小结

函数的概念及其复合, 包括分段函数的复合, 本质上是函数关系的建立问题, 而建立函数关系是进一步研究函数性质的基础. 对于函数的四个主要特性: 奇偶性和周期性一般用定义检验; 单调性则大多用导数符号分析; 有界性往往需要结合极限与连续的性质来确定.

题型 1.2 极限概念与性质

1. (87, 4分) 函数 $f(x) = x \sin x$

(A) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界.

(B) 当 $x \rightarrow \infty$ 时为无穷大.

(C) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界.

(D) 当 $x \rightarrow \infty$ 时有有限极限.

【 】

【答案】 应选(C).

【详解】 取 $x_k = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, 则 $f(x_k) = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow +\infty (k \rightarrow +\infty)$;

而取 $x_k = 2k\pi$, 则 $f(x_k) = 2k\pi \sin(2k\pi) = 0$.

可见当 $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x)$ 的极限不存在, 也非无穷大, 而是在 $(-\infty, +\infty)$ 内的无界函数, 故应选(C).

【评注】 一个变量为无穷大量必为无界变量, 但反过来不一定成立. 无穷大量要求在相应变化过程下变量的绝对值一致地无限增大, 而无界变量只需在个别点上的取值不能限定在某范围内即可.

2. (93, 3分) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 变量 $\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ 是

(A) 无穷小.

(B) 无穷大.

(C) 有界的, 但不是无穷小.

(D) 无界的, 但不是无穷大.

【 】

【答案】 应选(D).

【详解】 若取 $x_k = \frac{1}{k\pi} \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$, 则 $\frac{1}{x_k^2} \sin \frac{1}{x_k} = (k\pi)^2 \sin k\pi = 0$;

而取 $x_k = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}} \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$, 则 $\frac{1}{x_k^2} \sin \frac{1}{x_k} = \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)^2 \rightarrow +\infty (k \rightarrow \infty)$,

可见当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ 的极限不存在, 也非无穷大, 故应选(D).

3. (98, 3分) 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 则下列断言正确的是

(A) 若 x_n 发散, 则 y_n 必发散.

(B) 若 x_n 无界, 则 y_n 必有界.

(C) 若 x_n 有界, 则 y_n 必为无穷小.

(D) 若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小, 则 y_n 必为无穷小.

【 】

【答案】 应选(D).

【分析】 通过举反例用排除法或直接推导.

【详解1】 举反例: 取 $y_n = 0$, 可排除(A);

取 $x_n = \begin{cases} n, & n \text{ 为奇数,} \\ 0, & n \text{ 为偶数,} \end{cases} y_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数,} \\ n, & n \text{ 为偶数,} \end{cases}$ 可排除(B);

若取 $x_n = 0$, 则 y_n 可为任意数列, 可排除(C).

故应选(D).

【详解 2】 若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} \cdot x_n y_n = 0$, 必为无穷小, 故应选(D).

4. (99, 3分) “对任意给定的 $\epsilon \in (0, 1)$, 总存在正整数 N , 当 $n \geq N$ 时, 恒有 $|x_n - a| \leq 2\epsilon$ ” 是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的

(A) 充分条件但非必要条件.

(B) 必要条件但非充分条件.

(C) 充分必要条件.

(D) 既非充分条件又非必要条件.

【 】

【答案】 应选(C).

【分析】 本题考查对数列收敛性定义的理解, 注意到 2ϵ 仍是可任意小的正数, 因此上述条件也是数列收敛的充要条件. 当然也可严格推导出它与标准定义是等价的.

【详解】 由数列 $\{x_n\}$ 收敛于 $a \Leftrightarrow$ “对任意给定的 $\epsilon_1 > 0$, 总存在正整数 N_1 , 当 $n > N_1$ 时, 恒有 $|x_n - a| < \epsilon_1$ ”, 显然可推导出: “对任意给定的 $\epsilon \in (0, 1)$, 总存在正整数 N , 当 $n \geq N$ 时, 恒有 $|x_n - a| \leq 2\epsilon$ ”.

反过来, 若有 “对任意给定的 $\epsilon \in (0, 1)$, 总存在正整数 N , 当 $n \geq N$ 时, 恒有 $|x_n - a| \leq 2\epsilon$ ”, 则对任意的 $\epsilon_1 > 0$ (不妨设 $0 < \epsilon_1 < 1$, 当 $\epsilon_1 \geq 1$ 时, 取 $-\tilde{\epsilon}_1, 0 < \tilde{\epsilon}_1 < 1 \leq \epsilon_1$, 代替即可), 取 $\epsilon = \frac{1}{3}\epsilon_1 > 0$, 存在正整数 N , 当 $n \geq N$ 时, 恒有 $|x_n - a| \leq 2\epsilon = \frac{2}{3}\epsilon_1 < \epsilon_1$, 令 $N_1 = N - 1$, 则满足 “对任意给定的 $\epsilon_1 > 0$, 总存在正整数 N_1 , 当 $n > N_1$ 时, 恒有 $|x_n - a| < \epsilon_1$ ”. 可见上述两种说法是等价的, 故应选(C).

【评注】 在复习过程中, 对基本概念要理解透彻, 而不仅仅在于是否记住. 本题若真正理解了数列极限的概念, 并注意到 2ϵ 仍是可任意小的正数, 则可立即得到正确选项.

5. (03, 4分) 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 则必有

(A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立.

(B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在.

(D) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在.

【 】

【答案】 应选(D).

【详解 1】 本题考查极限的概念, 极限值与数列前面有限项的大小无关, 可立即排除(A), (B); 而极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 是 “ $0 \cdot \infty$ ” 型未定式, 可能存在也可能不存在, 举反例说明即可; 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 属 “ $1 \cdot \infty$ ” 型, 必为无穷大量, 即不存在. 故应选(D).

【详解 2】 用举反例法, 取 $a_n = \frac{2}{n}, b_n = 1, c_n = \frac{1}{2}n (n = 1, 2, \dots)$, 则可立即排除(A), (B), (C), 故应选(D).

小结

关于极限的存在性, 以下几点是值得注意的:

1. 若 $\lim f$ 存在, $\lim g$ 不存在, 则 $\lim(f \pm g)$ 一定不存在, 但 $\lim fg, \lim \frac{f}{g}$ 可能存在, 也可能不存在;
2. 若 $\lim f = l \neq 0, \lim g = \infty$, 则 $\lim fg = \infty$;
3. 若 f 有界, $\lim g = \infty$, 则 $\lim(f \pm g) = \infty$, 但 $\lim fg$ 不一定为 ∞ .

题型 1.3 函数极限的计算

一、利用左、右极限求函数极限

1. (91, 3 分) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{\frac{1}{x}}}{x + e^{\frac{1}{x}}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 应填 -1 .

【分析】 注意 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, 从而 $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$.

【详解】
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{\frac{1}{x}}}{x + e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}} - 1}{xe^{-\frac{1}{x}} + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1.$$

2. (92, 3 分) 当 $x \rightarrow 1$ 时, 函数 $\frac{x^2 - 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限

(A) 等于 2.

(B) 等于 0.

(C) 为 ∞ .

(D) 不存在但不为 ∞ . 【 】

【答案】 应选 (D).

【分析】 本题的关键是注意 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$.

【详解】 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$, 而 $\lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$, 故有

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x-1}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty,$$

可见, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x-1}}$ 不存在但不为 ∞ .

【评注】 $\lim_{x \rightarrow x_0} a^{\frac{1}{x-x_0}}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \arctan \frac{1}{x-x_0}$ 等均是极限不存在的情形, 遇此情形一般应通过左、右极限进行讨论.

小结

在讨论分段函数极限时一般用结论

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A,$$

因此, 当左、右极限 $f(x_0^-)$, $f(x_0^+)$ 有一个不存在或都存在但不相等时, 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在.

二、求未定式 $(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0)$ 的极限

1. (87, 6 分) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1})$.

【分析】 本题为“ $\infty - \infty$ ”型未定式, 先通分再求极限即可.

【详解】
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2. (88, 4 分) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{\tan x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 应填 1.

【分析】 本题为“ ∞^0 ”型未定式, 先化指数函数再求极限即可.

【详解】 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\tan x \ln \frac{1}{\sqrt{x}}} = e^{-\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \ln x}$, 又 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \ln x = 0$, 故原式 $= e^0 = 1$.

3. (89, 3 分) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot 2x = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 应填 $\frac{1}{2}$.

【分析】 本题为“ $0 \cdot \infty$ ”型未定式, 先化为分式再求极限即可.

【详解】 $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot 2x = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{\cos 2x}{2x} = \frac{1}{2}.$

4. (89, 4 分) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (2 \sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}}.$

【分析】 本题为“ 1^∞ ”型未定式, 直接按第二类重要极限或化为指数函数求极限即可.

【详解 1】 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} [(1 + 2 \sin x + \cos x - 1)]^{\frac{1}{2 \sin x + \cos x - 1} \cdot \frac{2 \sin x + \cos x - 1}{x}}.$
 又 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x + \cos x - 1}{x} = 2$, 于是原式 $= e^2$.

【详解 2】 本题化为指数函数求极限为:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2 \sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 \sin x + \cos x)}{x}} = e^2.$$

5. (91, 5 分) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2(e^x - 1)}.$

【分析】 本题为“ $\frac{0}{0}$ ”型未定式, 利用无穷小量的等价代换以及洛必塔法则求解即可.

【详解】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{6}.$

6. (92, 3 分) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{e^x - \cos x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 应填 0.

【详解】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{e^x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}(-x^2)}{e^x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x + \sin x} = 0.$

【评注】 当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1+x)^a - 1 \sim ax$.

7. (92, 5 分) 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3+x}{6+x} \right)^{\frac{x-1}{2}}.$

【详解】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3+x}{6+x} \right)^{\frac{x-1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{6+x} \right)^{\frac{6+x}{-3} \cdot \frac{-3}{6+x} \cdot \frac{x-1}{2}} = e^{-\frac{3}{2}}.$

8. (93, 3 分) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 应填 0.