2008 人大考研

读考研书 找人大社

2008考研历届数学真题题型解析（数学二）

主编 黄先开 曹显兵

囊括21年全部真题　名师归纳总结71题型

全书按大纲考试要求设置结构，每章下归纳题型分类解析1987～2007年真题
题题精解，有分析，有评注，多种解法、多种思路
章章总结，将历年试题题型、分值分布情况分别列表，考试重点清晰可见
每章后附自测练习题，全部来自数一、三、四的历年真题，互相借鉴，触类旁通
21年真题原样附录在后，供考生自测之用，其解析在正文的位置全部标明

中国人民大学出版社

考研历届数学真题题型解析(数学二)

▶ 主　编　黄先开　曹显兵
▶ 编　者　黄先开　曹显兵
　　　　　施明存　殷先军

2008

中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研历届数学真题题型解析(数学二)/黄先开,曹显兵主编. 2版
北京:中国人民大学出版社,2007
ISBN 978-7-300-07361-3

Ⅰ. 考…
Ⅱ. ①黄…②曹…
Ⅲ. 高等数学-研究生-入学考试-解题
Ⅳ. O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第017658号

考研历届数学真题题型解析(数学二)
主　编　黄先开　曹显兵

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街31号	**邮政编码**	100080
电　　话	010-62511242(总编室)		010-62511398(质管部)
	010-82501766(邮购部)		010-62514148(门市部)
	010-62515195(发行公司)		010-62515275(盗版举报)
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.1kao.net (中国1考网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京鑫霸印务有限公司		
规　　格	210 mm×285 mm　16开本	**版　　次**	2006年6月第1版
			2007年2月第2版
印　　张	20.25	**印　　次**	2007年2月第1次印刷
字　　数	608 000	**定　　价**	22.00元

前 言

自从 1987 年全国工学、经济学硕士研究生入学数学实行统一考试以来，至今已 21 年，共命制试卷近百份，有上千道试题。这些试题是参加命题的专家、教授的智慧和劳动的结晶，它既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求，展示出统考以来数学考试的全貌，又蕴涵着命题专家在《数学考试大纲》要求下的命题指导思想、原则、特点和趋势，是广大考生和教师了解试题信息、分析命题动态、总结命题规律最直接、最宝贵的第一手资料。

拥有一套内容完整、编排合理、分析透彻、解答规范、总结到位的数学历年真题，是广大准备考研学子的期盼。通过认真分析研究、了解、消化和掌握历年试题，可以发现命题的特点和趋势，找出知识之间的有机联系，总结每部分内容的考查重点、难点，归纳常考典型题型，凝练解题思路、方法和技巧，明确复习方向，从而真正做到有的放矢、事半功倍地进行复习。本书是作者在十多年收集、整理资料和进行考研数学辅导的基础上，通过对历年试题的精心分析研究，并结合授课体会和学生的需要全新编写而成的，相信能够满足考生的要求。

我们认为本书具有以下特点：

1. 内容最全面。汇集了统考以来 21 年的所有试题，便于考生全面系统地把握历年试题的动态变化。在**每章后面还将其余三类试卷的相关典型真题作为习题提供**（如数学一每章后面精选了数学二、数学三和数学四的同类型考题），以便考生进一步巩固相关知识，**考生有了本书后，也就相当于拥有了其余三类试卷的资料。**

2. 题型最丰富。根据考试大纲的要求，**每一章节均按题型进行归类，并对每一题型进行了分析、归纳和总结。**这样考生可通过题型研究，把握命题特点和命题思路，做到举一反三，触类旁通。

3. 解析最详尽。先分析——解题的思路、方法，然后详解——详细、规范的解答过程，再就是**评注——解题思路、方法和技巧的归纳总结，所涉及的知识点、命题意图和可能延伸的考查情形。**对命题思路、解题的重点难点进行这样深入细致的解析，相信有助于考生把握解题规律、拓展分析思路、提炼答题技巧，从而大大提高应试水平。

4. 对照最直接。本书在每部分的开头，先列出了考试大纲规定的内容与要求，与此相对照再进行**题型归类和分析总结，顺序与考试大纲和一般教材一致，**便于考生对照复习。

5. 总结最完整。除**每类题型均有归纳总结**外，**每章还有历年考研试题按题型分布和分数的总结，**这样可以帮助考生了解每类题型考查的频率、所占的比重，从而发现命题的重点、最常考的题型，以便更有针对性地进行复习。

本书既根据考试内容按章节编排，又提供成套试卷。复习前期建议考生按章节内容与教材、复习指导书同步进行，后期可将本书作为模拟训练套题使用。尽管本书每题均有详尽的解析，但希望读者不要轻易去查看分析、详解和评注，而一定要自己先动手去进行演练。在每题做完之后，再去看书中的分析、详解和评注，仔细回顾、研究一下自己的分析、思路和解答过程与书中有什么异同；如果存在问题，应尽量查清原因，看看自己是在基本理论、基本概念与基本方法等方面有欠缺，还是在做题技巧、知识的综合与灵活运用等方面掌握不够。**注意，这**

样的归纳总结过程是必不可少的，其重要性甚至超过做题本身。整本书都这样复习下来，在掌握基本理论、基本概念和基本方法上，在综合、灵活运用知识和思维能力的训练上，相信读者一定会有质的提高。

本书一方面保留了我们过去编写的历年试题解析图书的优点，同时在这次编写完善过程中，参考了众多相关的教材和复习指导书，在此不一一提及，谨对所有相关的作者表示真诚的谢意。

由于时间比较仓促，加上编者水平所限，书中难免还有不足之处，恳请广大读者批评指正。

成功来源于自信，只要广大考生充满信心，通过脚踏实地的艰苦努力，就一定能够心想事成。

编者

2007 年 2 月于北京

目　录

第一部分　高等数学

第二部分 线性代数

附　录

P A R T O N E

第一部分

高等数学

第一章　函数、极限、连续

考试内容与要求

考试内容

函数的概念及表示法，函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性，复合函数、反函数、分段函数和隐函数，基本初等函数的性质及其图形，初等函数，函数关系的建立，数列极限与函数极限的定义及其性质，函数的左极限与右极限，无穷小量和无穷大量的概念及其关系，无穷小量的性质及无穷小量的比较，极限的四则运算，极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则，两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e},$$

函数连续的概念，函数间断点的类型，初等函数的连续性，闭区间上连续函数的性质.

考试要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，并会建立应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.
5. 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.
6. 掌握极限的性质及四则运算法则.
7. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.
8. 理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小量的比较方法，会用等价无穷小量求极限.
9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型.
10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质.

题型 1.1　函数的概念及其特性

1. (87,4 分) * $f(x)=|x\sin x|\mathrm{e}^{\cos x},-\infty<x<+\infty$ 是

(A) 有界函数.　　(B) 单调函数.　　(C) 周期函数.　　(D) 偶函数.　　【　】

【答案】 应选(D).

【详解】 $f(-x)=|-x\sin(-x)|\mathrm{e}^{\cos(-x)}=|x\sin x|\mathrm{e}^{\cos x}=f(x)$，可见 $f(x)$ 为偶函数，故应选(D).

【评注】 周期性、奇偶性一般用定义进行验算，有界性经常要结合微分中值定理进行分析，而单调性一般用导数的符号来确定.

---

2. (88,5 分) 设 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

* (87,4 分)表示该题为 1987 年考研数学二真题，其分值为 4 分，下同.

【分析】 先由 $f[\varphi(x)]=1-x$ 确定 $\varphi(x)$ 的表达式，再求 $\varphi(x)$ 的定义域.

【详解】 由 $f[\varphi(x)]=1-x$，有 $e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$，解得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$. 其定义域为 $\ln(1-x)\geqslant 0$，得 $1-x\geqslant 1$，即 $x\leqslant 0$.

【评注】 假设有关系式 $f[g(x)]=\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 的表达式已知，有两种情况：

(1) 已知 f，求 g：相当于求反函数 $g(x)=f^{-1}[\varphi(x)]$.

(2) 已知 g，求 f：一般作变量代换 $g(x)=u\Rightarrow x=g^{-1}(u)$，于是有 $f(u)=\varphi[g^{-1}(u)]$，再根据函数关系与变量字母无关，得知 $f(x)=\varphi[g^{-1}(x)]$.

---

3. (90,3分) 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则函数 $f[f(x)]=$ ________.

【答案】 应填 1.

【分析】 直接按复合函数的定义计算即可，注意 $|f(x)|\leqslant 1$.

【详解】 由 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 知 $|f(x)|\leqslant 1$. 因此有 $f[f(x)]=1$.

【评注】 已知 $f(x)$，$g(x)$，求复合函数 $f[g(x)]$(或 $g[f(x)]$)，一般用代入法逐次复合即可，应特别注意的是 $g(x)$ 的值域与 $f(x)$ 的定义域的对应关系.

---

4. (92,3分) 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2+x, & x>0,\end{cases}$ 则

(A) $f(-x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0,\\ -(x^2+x), & x>0.\end{cases}$　　(B) $f(-x)=\begin{cases}-(x^2+x), & x<0,\\ -x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$

(C) $f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2-x, & x>0.\end{cases}$　　(D) $f(-x)=\begin{cases}x^2-x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$　　【　】

【答案】 应选(D).

【分析】 直接按复合函数的定义计算即可.

【详解】

$$f(-x)=\begin{cases}(-x)^2, & -x\leqslant 0\\ (-x)^2+(-x), & -x>0\end{cases}=\begin{cases}x^2-x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

故应选(D).

---

5. (97,3分) 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $g[f(x)]$ 为

(A) $\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2-x, & x\geqslant 0.\end{cases}$　(B) $\begin{cases}2-x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$　(C) $\begin{cases}2-x^2, & x<0,\\ 2-x, & x\geqslant 0.\end{cases}$　(D) $\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$　【　】

【答案】 应选(D).

【详解】 $g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x), & f(x)\leqslant 0\\ f(x)+2, & f(x)>0\end{cases}=\begin{cases}2-(-x), & x\geqslant 0\\ 2+x^2, & x<0\end{cases}=\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

故应选(D).

---

6. (99,3分) 设 $f(x)$ 是连续函数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时，$F(x)$ 必是偶函数.

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时，$F(x)$ 必是奇函数.

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时，$F(x)$ 必是周期函数.

(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时，$F(x)$ 必是单调增函数.　【　】

【答案】 应选(A).

【分析】 本题涉及原函数的基本特性，由于原函数有无穷多个，如何表示它是问题的关键. 实际上，只要找出一个原函数，则所有的原函数就可表示出来，而$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 正好就是所需要的一个原函数.

【详解】 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 可以表示为 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$，于是

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t+C\xlongequal{u=-t}\int_0^x f(-u)\mathrm{d}(-u)+C.$$

当 $f(x)$ 为奇函数时，$f(-u)=-f(u)$，从而有

$$F(-x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+C=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C=F(x),$$

即 $F(x)$ 为偶函数，

故应选(A).

至于选项(B)、(C)、(D)，可分别举反例如下：$f(x)=x^2$ 是偶函数，但其原函数 $F(x)=\frac{1}{3}x^3+1$，不是奇函数，可排除(B)；$f(x)=\cos^2x$ 是周期函数，但其原函数 $F(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x$ 不是周期函数，可排除(C)；$f(x)=x$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是单调增函数，但其原函数 $F(x)=\frac{1}{2}x^2$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内非单调增函数，可排除(D).

【评注1】 有些考生将原函数写成形如：$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+C$，结果在推导 $F(-x)=F(x)$ 时遇到困难，因此特殊形式的原函数$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是值得注意的.

【评注2】 函数的基本性质有：奇偶性、周期性、单调性和有界性，当 $f(x)$ 具有某性质时，$F(x)$ 是否也具有相应的性质?或反过来考虑，当 $F(x)$ 具有某性质时，$f(x)$ 是否也具有相应的性质?本题也可变形为考虑 $f(x)$ 与 $f'(x)$（或 $f'(x)$ 与 $f(x)$）的性质之间的关系，对于常见的结论与反例应做到心中有数.

---

7. (01,3分) 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于

(A)0.　(B)1.　(C)$\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$　(D)$\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1,\\ 1, & |x|>1.\end{cases}$　【　】

【答案】 应选(B).

【详解】 由于 $|f(x)|\leqslant 1$，于是 $f[f(x)]=1$，故 $f\{f[f(x)]\}=1$，故应选(B).

---

8. (05,4分) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，“$M\Leftrightarrow N$”表示“M 的充分必要条件是 N”，则必有

(A)$F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数.　(B)$F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.

(C)$F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数.　(D)$F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数.　【　】

【答案】 应选(A).

【分析】 本题可直接推证，但最简便的方法还是通过反例用排除法找到答案.

【详解1】 任一原函数可表示为 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$，且 $F'(x)=f(x)$. 当 $F(x)$ 为偶函数时，有 $F(-x)=F(x)$，于是 $F'(-x)\cdot(-1)=F'(x)$，即 $-f(-x)=f(x)$，也即 $f(-x)=-f(x)$，可见 $f(x)$ 为奇函数；反过来，若 $f(x)$ 为奇函数，则$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为偶函数，从而 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$ 为偶函数，故选(A).

【详解2】 令 $f(x)=1$，则取 $F(x)=x+1$，可排除(B),(C)；令 $f(x)=x$，则取 $F(x)=\frac{1}{2}x^2$，可排除(D)，故应选(A).

【评注】 请读者思考 $f(x)$ 与其原函数 $F(x)$ 的有界性之间有何关系？

小结

函数的概念及其复合，包括分段函数的复合，本质上是函数关系的建立问题，而建立函数关系是进一步研究函数性质的基础. 对于函数的四个主要特性：奇偶性和周期性一般用定义检验；单调性则大多用导数符号分析；有界性往往需要结合极限与连续的性质来确定.

题型 1.2 极限概念与性质

1. (87,4分) 函数 $f(x)=x\sin x$

(A) 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.
(B) 当 $x\to\infty$ 时为无穷大.
(C) 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界.
(D) 当 $x\to\infty$ 时有有限极限. 【 】

【答案】 应选(C).

【详解】 取 $x_k=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，则 $f(x_k)=2k\pi+\frac{\pi}{2}\to+\infty(k\to+\infty)$；

而取 $x_k=2k\pi$，则 $f(x_k)=2k\pi\sin(2k\pi)=0$.

可见当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 的极限不存在，也非无穷大，而是在 $(-\infty,+\infty)$ 内的无界函数，故应选(C).

【评注】 一个变量为无穷大量必为无界变量，但反过来不一定成立. 无穷大量要求在相应变化过程下变量的绝对值一致地无限增大，而无界变量只需在个别点上的取值不能限定在某范围内即可.

---

2. (93,3分) 当 $x\to0$ 时，变量 $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 是

(A) 无穷小.
(B) 无穷大.
(C) 有界的，但不是无穷小.
(D) 无界的，但不是无穷大. 【 】

【答案】 应选(D).

【详解】 若取 $x_k=\frac{1}{k\pi}\to0(k\to\infty)$，则 $\frac{1}{x_k^2}\sin\frac{1}{x_k}=(k\pi)^2\sin k\pi=0$；

$$\text{而取 } x_k=\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\to0(k\to\infty),\text{则}\frac{1}{x_k^2}\sin\frac{1}{x_k}=\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)^2\to+\infty(k\to\infty),$$

可见当 $x\to0$ 时，$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 的极限不存在，也非无穷大，故应选(D).

---

3. (98,3分) 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，则下列断言正确的是

(A) 若 x_n 发散，则 y_n 必发散.
(B) 若 x_n 无界，则 y_n 必有界.
(C) 若 x_n 有界，则 y_n 必为无穷小.
(D) 若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小，则 y_n 必为无穷小. 【 】

【答案】 应选(D).

【分析】 通过举反例用排除法或直接推导.

【详解1】 举反例：取 $y_n=0$，可排除(A)；

取 $x_n=\begin{cases}n,n\text{ 为奇数},\\0,n\text{ 为偶数},\end{cases}y_n=\begin{cases}0,n\text{ 为奇数},\\n,n\text{ 为偶数},\end{cases}$ 可排除(B)；

若取 $x_n=0$,则 y_n 可为任意数列,可排除(C).

故应选(D).

【详解 2】 若$\dfrac{1}{x_n}$为无穷小,则$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}\cdot x_ny_n=0$,必为无穷小,故应选(D).

4. (99,3 分)"对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$,总存在正整数 N,当 $n\geqslant N$ 时,恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$"是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的

(A) 充分条件但非必要条件.　　(B) 必要条件但非充分条件.

(C) 充分必要条件.　　(D) 既非充分条件又非必要条件.　　【　】

【答案】 应选(C).

【分析】 本题考查对数列收敛性定义的理解,注意到 2ε 仍是可任意小的正数,因此上述条件也是数列收敛的充要条件. 当然也可严格推导出它与标准定义是等价的.

【详解】 由数列 $\{x_n\}$ 收敛于 $a\Leftrightarrow$"对任意给定的 $\varepsilon_1>0$,总存在正整数 N_1,当 $n>N_1$ 时,恒有 $|x_n-a|<\varepsilon_1$",显然可推导出:"对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$,总存在正整数 N,当 $n\geqslant N$ 时,恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$".

反过来,若有"对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$,总存在正整数 N,当 $n\geqslant N$ 时,恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$",则对任意的 $\varepsilon_1>0$(不妨设 $0<\varepsilon_1<1$,当 $\varepsilon_1\geqslant 1$ 时,取一 $\widetilde{\varepsilon_1}$,$0<\widetilde{\varepsilon_1}<1\leqslant\varepsilon_1$,代替即可),取 $\varepsilon=\dfrac{1}{3}\varepsilon_1>0$,存在正整数 N,当 $n\geqslant N$ 时,恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon=\dfrac{2}{3}\varepsilon_1<\varepsilon_1$,令 $N_1=N-1$,则满足"对任意给定的 $\varepsilon_1>0$,总存在正整数 N_1,当 $n>N_1$ 时,恒有 $|x_n-a|<\varepsilon_1$". 可见上述两种说法是等价的,故应选(C).

【评注】 在复习过程中,对基本概念要理解透彻,而不仅仅在于是否记住. 本题若真正理解了数列极限的概念,并注意到 2ε 仍是可任意小的正数,则可立即得到正确选项.

5. (03,4 分) 设 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$ 均为非负数列,且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有

(A) $a_n<b_n$ 对任意 n 成立.　　(B) $b_n<c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在.　　(D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在.　　【　】

【答案】 应选(D).

【详解 1】 本题考查极限的概念,极限值与数列前面有限项的大小无关,可立即排除(A),(B);而极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 是"$0\cdot\infty$"型未定式,可能存在也可能不存在,举反例说明即可;极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 属"$1\cdot\infty$"型,必为无穷大量,即不存在. 故应选(D).

【详解 2】 用举反例法,取 $a_n=\dfrac{2}{n}$,$b_n=1$,$c_n=\dfrac{1}{2}n(n=1,2,\cdots)$,则可立即排除(A),(B),(C),故应选(D).

小结

关于极限的存在性,以下几点是值得注意的:

1. 若 $\lim f$ 存在,$\lim g$ 不存在,则 $\lim(f\pm g)$ 一定不存在,但 $\lim fg$,$\lim\dfrac{f}{g}$ 可能存在,也可能不存在;

2. 若 $\lim f=l\neq 0$,$\lim g=\infty$,则 $\lim fg=\infty$;

3. 若 f 有界,$\lim g=\infty$,则 $\lim(f\pm g)=\infty$,但 $\lim fg$ 不一定为 ∞.

题型 1.3 函数极限的计算

一、利用左、右极限求函数极限

1. (91,3 分) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}=$ ________.

【答案】 应填 -1.

【分析】 注意 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$，从而 $\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$.

【详解】
$$\lim_{x\to0^+}\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}-1}{xe^{-\frac{1}{x}}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1.$$

---

2. (92,3 分) 当 $x\to1$ 时，函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限

(A) 等于 2.　　(B) 等于 0.　　(C) 为 ∞.　　(D) 不存在但不为 ∞. 【　】

【答案】 应选(D).

【分析】 本题的关键是注意 $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$，$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$.

【详解】 因为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$，而 $\lim\limits_{x\to1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=0$，$\lim\limits_{x\to1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$，故有
$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=0,\quad \lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty,$$
可见，$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 不存在但不为 ∞.

【评注】 $\lim\limits_{x\to x_0}a^{\frac{1}{x-x_0}}$，$\lim\limits_{x\to x_0}\arctan\dfrac{1}{x-x_0}$ 等均是极限不存在的情形，遇此情形一般应通过左、右极限进行讨论.

小结

在讨论分段函数极限时一般用结论
$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A,$$
因此，当左、右极限 $f(x_{0^-})$，$f(x_{0^+})$ 有一个不存在或都存在但不相等时，极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在.

二、求未定式 $\left(\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty},0\cdot\infty,1^\infty,0^0,\infty^0\right)$ 的极限

1. (87,6 分) 求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

【分析】 本题为“$\infty-\infty$”型未定式，先通分再求极限即可.

【详解】
$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\frac{1}{2}.$$

2.(88,4分) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}=$ ________.

【答案】 应填1.

【分析】 本题为"∞^0"型未定式，先化指数函数再求极限即可.

【详解】 原式 $=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\tan x\ln\frac{1}{\sqrt{x}}}=e^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0^+}\tan x\ln x}$，又 $\lim\limits_{x\to0^+}\tan x\ln x=0$，故原式 $=e^0=1$.

3.(89,3分) $\lim\limits_{x\to0}x\cot2x=$ ________.

【答案】 应填$\dfrac{1}{2}$.

【分析】 本题为"$0\cdot\infty$"型未定式，先化为分式再求极限即可.

【详解】
$$\lim_{x\to0}x\cot2x=\lim_{x\to0}x\frac{\cos2x}{\sin2x}=\lim_{x\to0}x\frac{\cos2x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

4.(89,4分) 求$\lim\limits_{x\to0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

【分析】 本题为"1^∞"型未定式，直接按第二类重要极限或化为指数函数求极限即可.

【详解1】 原式 $=\lim\limits_{x\to0}[(1+2\sin x+\cos x-1)]^{\frac{1}{2\sin x+\cos x-1}\cdot\frac{2\sin x+\cos x-1}{x}}$，

又 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin x+\cos x-1}{x}=2$，于是原式 $=e^2$.

【详解2】 本题化为指数函数求极限为：
$$\lim_{x\to0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(2\sin x+\cos x)}{x}}=e^2.$$

5.(91,5分) 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^2(e^x-1)}$.

【分析】 本题为"$\dfrac{0}{0}$"型未定式，利用无穷小量的等价代换以及洛必塔法则求解即可.

【详解】
$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^2(e^x-1)}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{6}.$$

6.(92,3分) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{e^x-\cos x}=$ ________.

【答案】 应填0.

【详解】
$$\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{e^x-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}(-x^2)}{e^x-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{e^x+\sin x}=0.$$

【评注】 当 $x\to0$ 时，$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$.

7.(92,5分) 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$.

【详解】
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{6+x}\right)^{\frac{6+x}{-3}\cdot\frac{-3}{6+x}\cdot\frac{x-1}{2}}=e^{-\frac{3}{2}}.$$

8.(93,3分) $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=$ ________.

【答案】 应填0.