開天

滕素珍 主编

概率论与数理统计大讲堂

提高冲刺版

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

概率论与数理统计大讲堂

提高冲刺版

滕素珍 主编
滕素珍 任玉杰 斯琴 编著

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计大讲堂·提高冲刺版 / 滕素珍主编. —2 版. 大连 :大连理工大学出版社,2005. 8
ISBN 7-5611-2112-1

Ⅰ. 概… Ⅱ. 滕… Ⅲ. ①概率论—研究生入学考试—自学参考资料 ②数理统计—研究生入学考试—自学参考资料 Ⅳ. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 047614 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市凌水河 邮政编码:116024
电话:0411-84708842 传真:0411-84701466 邮购:0411-84707961
E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:140mm×203mm 印张:12.75 字数:473 千字
印数:6 001～12 000
2002 年 11 月第 1 版 2005 年 8 月第 2 版
2005 年 8 月第 2 次印刷

责任编辑:吴孝东 责任校对:高继巍
封面设计:宋 蕾

定 价:20.00 元

卷首感言

大学是人一生中最为关键的阶段。从入学的第一天起，你就应当对大学四年有一个正确的认识和规划。为了在学习中享受到最大的快乐，为了在毕业时找到自己最喜爱的工作，每一个刚进入大学校园的人都应当掌握七项学习：学习自修之道、基础知识、实践贯通、兴趣培养、积极主动、掌控时间、为人处事。只要做好了这七点，大学生临到毕业时的最大收获就绝不会是“对什么都没有的忍耐和适应”，而应当是“对什么都可以有的自信和渴望”。只要做好了这七点，你就能成为一个有潜力、有思想、有价值、有前途的、快乐的毕业生。

数学是理工科学生必备的基础。很多学生在高中时认为数学是最难学的，到了大学里，一旦发现本专业对数学的要求不高，就会彻底放松对数学知识的学习，而且他们看不出数学知识有什么现实的应用或就业前景。但大家不要忘记，绝大多数理工科专业的知识体系都建立在数学的基础之上。例如，要想学好计算机工程专业，那至少要把离散数学（包括集合论、图论、数理逻辑等）、线性代数、概率统计和数学分析学好；要想进一步攻读计算机科学专业的硕士或博士学位，可能还需要更高的数学素养。同时，数学也是人类几千年积累的智慧结晶，学习数学知识可以培养和训练人的思维能力。通过对几何的学习，我们可以学会用演绎、推理来求证和思考的方法；通过学习概率统计，我们可以知道该如何避免钻进思维的死胡同，该如何让自己面前的机会最大化。所以，大家一定要用心把数学学好，不能敷衍了事。学习数学也不能仅仅局限于选修多门数学课程，而是要知道自己为什么学习数学，要从学习数学的过程中掌握认知和思考的方法。

虽然我一向鼓励大家追寻自己的兴趣，但在这里仍需强调，生活

中有些事情即便不感兴趣也是必须要做的。例如，打好基础，学好数学、英语和计算机的使用就是这一类必须做的事情。如果你对数学、英语和计算机有兴趣，那你是幸运儿，可以享受学习的乐趣；但就算你没有兴趣，你也必须把这些基础打好。打基础是苦功夫，不愿吃苦是不能修得正果的。

经过大学四年，你会从思考中确立自我，从学习中寻求真理，从独立中体验自主，从计划中把握时间，从交流中锻炼表达，从交友中品味成熟，从实践中赢得价值，从兴趣中攫取快乐，从追求中获得力量。

离开大学时，只要做到了这些，你最大的收获将是“对什么都可以拥有的自信和渴望”。你就能成为一个有潜力、有思想、有价值、有前途的中国未来的主人翁。

李开复

2005 年 2 月

摘自：“给中国学生的第四封信：大学四年应是这样度过”

前 言

概率论与数理统计是高等院校理工类、管理类、经济类等专业必修的基础课程，也是工程硕士研究生的选修课程。概率统计包含的内容丰富，理论深刻，并且是实际应用广泛的数学学科。概率论是研究随机现象的统计规律性，数理统计则是研究随机数据中的数学问题，其理论的抽象性使得读者在学习和实践过程中，时常会碰到思路上的障碍。为了使读者能尽快地、更好地掌握概率统计的基本概念、理论、方法和原理，提高理解、分析、计算和证明各种问题的能力及它的独特的思维方法，特编写本书。本书对读者不仅是抛砖引玉，更重要的是帮助读者领悟到解题的规律和技巧，树立信心，勇于攻破一个个难关，向更高的层次冲刺，并能在各种水平考试中取得优异的成绩。

本书根据教育部制订的《全国硕士研究生入学统一考试·数学考试大纲》中概率统计部分的要求，并结合浙大版的《概率论与数理统计》教材的章节顺序编写。全书共分8章，每章包括如下内容：

内容精讲　简明扼要地总结了学习过程中必须掌握的基本概念、性质、定理和常用结论，力求做到基本概念准确、精炼，基本理论条理、系统，基本方法简明、实用，帮助读者把各章的基本内容系统地掌握住。

重要结论　言简意赅地总结了必须掌握的核心知识点，并将结论进行分类、归纳。

常考题型　详细归纳了考研中出现频率高的题型。针对这些题型，后面的分类剖析中列举相应例题进行逐一讲解。

例题分析　配合各章内容的经典例题，且有易有难，目的是帮助读者加深理解基本知识点。

分类剖析　这部分是每章的核心。采用专题与教材体系相结合的方式，对教材的知识点进行概括总结，并精选经典例题及历年考研真题（为了能简洁地传递考研信息，本书中对所选用的历年考研真

题采用“年代/类别/分值”的标注方式。例如,“010403”表示该题是2001年全国硕士研究生入学统一考试“数学四”试卷的一道分值为3分的试题),进行详细的剖析和解答。

真实考场和挑战极限 用考试实战的形式测试并提高学生的应试能力。“真实考场”目的是考察学生对本章基本概念、定理、公式等知识的理解以及掌握程度,与期末考试难度相当;“挑战极限”更多的是一些较难题,综合题,与考研题难度相当。

书末附有两套综合测试题,读者可以此来检验自己的水平和能力。

编者长期从事概率论与数理统计的教学与研究生入学考试辅导工作,在本书编写过程中力求将多年的教学心得和积累融入书中,同时积极地汲取其他著作的有益之处为我所用,希望本书能成为高等院校大学生和参加全国硕士研究生入学统一考试的考生(理工类和经济类)的理想参考书;成为工学硕士和工程硕士的良师益友;成为在高等院校从事概率统计教学工作的教师及相关专业从业人员的参考资料。

全书由杜祖缔和张友贵教授审阅,他们认真严谨的工作和真诚的建议,深深感动作者,在此向他们表示致敬。由于水平有限,书中不足和疏漏之处在所难免,恳请同仁和读者批评指正。

滕素珍

2005年8月

目　录

第一章　概率论的基本概念

内容精讲 /1　重要结论 /8　常考题型 /10

例题分析 /10　分类剖析 /17　真实考场 /42

真实考场参考答案 /44　挑战极限 /49　挑战极限参考答案 /51

第二章　随机变量及其分布

内容精讲 /58　重要结论 /65　常考题型 /67

例题分析 /67　分类剖析 /72　真实考场 /88

真实考场参考答案 /90　挑战极限 /97　挑战极限参考答案 /99

第三章　多维随机变量及其分布

内容精讲 /105　重要结论 /112　常考题型 /114

例题分析 /114　分类剖析 /127　真实考场 /156

真实考场参考答案 /159　挑战极限 /164　挑战极限参考答案 /166

第四章　随机变量的数字特征

内容精讲 /180　重要结论 /185　常考题型 /187

例题分析 /187　分类剖析 /198　真实考场 /232

真实考场参考答案 /234　挑战极限 /239　挑战极限参考答案 /240

第五章　大数定律和中心极限定理

内容精讲 /253　重要结论 /255　常考题型 /255

例题分析 /256　分类剖析 /260　真实考场 /265

真实考场参考答案 /266　挑战极限 /270　挑战极限参考答案 /271

第六章　样本及抽样分布

内容精讲 /276　重要结论 /281　常考题型 /281

例题分析 /281　分类剖析 /287　挑战极限 /295

挑战极限参考答案 /296

第七章　参数估计

内容精讲 /301　重要结论 /309　常考题型 /310

例题分析 /310　分类剖析 /323　挑战极限 /340

挑战极限参考答案 /342

第八章　假设检验

内容精讲 /353　重要结论 /359　常考题型 /359
例题分析 /359　分类剖析 /363　真实考场 /368
真实考场参考答案 /371

附录　综合测试题及参考答案

综合测试题(一) /379　综合测试题(二) /381
综合测试题(一)参考答案 /384　综合测试题(二)参考答案 /392

第一章 概率论的基本概念

■ 内容精讲

1 样本空间和随机事件

1.1 随机试验

(1) 试验可以在相同条件下重复地进行;

(2) 每次试验的可能结果不止一个,并且能事先确定试验的所有可能结果;

(3) 进行一次试验之前不能确定会出现哪一个结果,但一次试验恰好出现这些结果中的一个。

我们称这种试验为随机试验,简称试验。随机试验呈现出的现象称为随机现象。用 E 表示随机试验。

1.2 样本空间

我们将随机试验的所有可能结果组成的集合称为样本空间,记为 S。样本空间的元素称为样本点。S 中包含的样本点可以是有限多个,可列无限多个或在区间、整个数轴上取值。

1.3 随机事件

样本空间的子集合称为随机事件,简称事件。它在每次试验中可能发生,可能不发生,即它的发生带有随机性。通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示事件。每次试验,当且仅当这一子集合中的一个样本点出现,则称这一事件发生。以下是特别情形。

(1) 基本事件

随机试验 E 的每一个可能结果,称为基本事件。随机事件就是由若干个基本事件组成的集合。

(2) 必然事件

每次试验中一定发生的事件,称为必然事件。样本空间 S 包含所有的样本

点，它是 S 的自身的子集合，在每次试验中它总是发生的，所以 S 是必然事件。

(3) 不可能事件

每次试验中不可能发生的事件，称为不可能事件，记为 $\varnothing$。空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，它也作为样本空间的子集，在每次试验中都不发生，所以 $\varnothing$ 是不可能事件。

1.4 事件之间的关系

事件是一个集合，因而事件之间的关系和运算自然按照集合之间的关系和运算来处理。

设试验 E 的样本空间为 S，而 $A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$ 是 S 的子集合。

(1) 事件包含关系

如果事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生，则称事件 B 包含事件 A，或称 A 包含于 B，记为 $A \subset B$，或 $B \supset A$。

设 A 为任意事件，$\varnothing$ 为不可能事件，则 $\varnothing \subset A, A \subset S$。

(2) 事件相等关系

如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A=B$。即 A 与 B 同时发生，同时不发生。

(3) 并事件(和事件)

如果“事件 A 与事件 B 至少有一个发生”，则称这一事件为事件 A 与事件 B 的并事件(和事件)，记为 $A \cup B$。

设 A,B 为任意两个事件，S 为样本空间，则 $A \cup S = S, \varnothing \cup A = A, A \subset A \cup B, B \subset A \cup B$。

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个事件，则 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 表示“n 个事件中至少有一个发生”，即称这一事件为 n 个事件的并事件。

(4) 交事件(积事件)

如果“事件 A 与事件 B 同时发生”，则称这一事件为事件 A 与事件 B 的交事件(积事件)，记为 $A \cap B$ 或 AB。

设 A,B 为任意两个事件，S 为样本空间，则 $A \cap \varnothing = \varnothing, A \cap S = A, A \cap B \subset A, A \cap B \subset B$。

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个事件，则 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 表示“n 个事件同时发生”，即称这一事件为 n 个事件的交事件。

(5) 差事件

如果“事件 A 发生，但事件 B 不发生”，则称这一事件为事件 A 与事件 B 的差事件，记为 $A-B$。

设 A,B 为任意两个事件，则 $A-B \subset A, A-B \subset A \cup B$。

(6) 互不相容事件(互斥事件)

如果两个事件 A 与 B 不能同时发生，即 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 为互不相容事件，或称互斥事件。

(7) 对立事件(互逆事件)

如果两个事件 A 与 B 中必有一个发生，且仅有一个发生，即 $A\cup B=S, A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 为对立事件或互逆事件。

设 A,B 为任意两个事件，A 和 B 的对立事件分别记为$\overline{A},\overline{B}$，则$\overline{A}=S-A,\overline{\overline{A}}=A,A-B=A\overline{B}$。

如果 n 个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=S,A_iA_j=\varnothing,i\neq j$，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为两两互不相容的完备事件组，或称样本空间的一个划分。

1.5 事件之间的运算

交换律 $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$

结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C=A\cup B\cup C$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)=A\cap B\cap C$

分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

德·摩根律(De. Morgan)，又称对偶原则。设 A,B 为任意两个事件，则

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}\qquad\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

一般地

$$\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n}=\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}$$
$$\overline{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n}=\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\cdots\cup\overline{A_n}$$

2 频率与概率

2.1 频率(概率的统计定义)

在相同条件下进行 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数，比值$\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的频率，记为 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$。

频率的基本性质：

(1) 非负性和有界性：$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$。

(2) 规范性：$f_n(S)=1$。

(3) 有限可加性：若 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是两两互不相容的事件，则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=\sum_{i=1}^{k}f_n(A_i)$$

当 n 较小时，用频率来表达事件发生可能性的大小是不合适的；当 n 逐渐增大时，频率 $f_n(A)$ 逐渐稳定于某个常数，记此常数为 p，这种频率稳定性就是所说的统计规律性。这个常数 p 就是度量事件发生可能性大小的概率，记为 $P(A) = p$。

2.2　概率的公理化定义

称所有随机事件构成的集合为事件域，记为 $\mathscr{F} = \{A \mid A \subset S; A$ 为随机事件$\}$。对于每个事件 A，赋予一个实数，记为 $P(A)$，$P(A)$ 是定义在 $\mathscr{F}$ 上的集合函数。如果 $P(A)$ 满足下列条件：

① 非负性：$P(A) \geqslant 0$；

② 规范性：$P(S) = 1$；

③ 可列可加性：设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 为两两互不相容的事件，即 $A_iA_j = \varnothing$，$i \neq j$，则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \tag{1-1}$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 发生的概率。

2.3　概率的性质

①$P(\varnothing) = 0$。

② 有限可加性。设 $A_1、A_2、\cdots、A_n$ 为两两互不相容的事件，即 $A_iA_j = \varnothing$，$i \neq j$，则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \tag{1-2}$$

③ 设 A, B 是两个事件，如果 $A \subset B$，则有

$$P(B - A) = P(B) - P(A)、P(A) \leqslant P(B) \tag{1-3}$$

④ 设 A 为任意事件，则 $P(A) \leqslant 1$。

⑤ 两个对立事件的概率之和等于 1，即

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \tag{1-4}$$

⑥ 概率的加法定理。设 A, B 为任意两个事件，则有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \tag{1-5}$$

性质 ⑥ 的推广。设 A_1, A_2, A_3 为任意三个事件，则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3)$$

一般地，有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_iA_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_iA_jA_k) +$$

$$\cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n) \tag{1-6}$$

3 古典概型和几何型概率

3.1 古典概型

一随机试验满足两个特点：

(1) 样本空间含有有限多个样本点，即 $S = \{e_1, \cdots, e_n\}$。

(2) 每个基本事件发生的可能性相等，即

$$P(\{e_1\}) = P(\{e_2\}) = \cdots = P(\{e_n\}) = \frac{1}{n}, \{e_i\} \cap \{e_j\} = \varnothing, i \neq j$$

描述这种等可能的数学模型称为古典概型。下面给出古典概型中事件发生概率的计算公式。

设事件 A 包含 k 个基本事件，即

$$A = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_k}\}, 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$$

则有

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\{e_{i_1}\} \cup \{e_{i_2}\} \cup \cdots \cup \{e_{i_k}\}) = \sum_{j=1}^{k} P(e_{i_j}) = \frac{k}{n} \\ &= \frac{\text{事件 } A \text{ 包含的基本事件数}}{\text{基本事件的总数}} \end{aligned} \tag{1-7}$$

由式(1-7)定义的概率称为古典概率。

如果一随机试验的基本事件有可列无限多个或每个基本事件发生的可能性不相等，则古典概型不适合。

当样本空间的样本点较多时，一般不再将 S 中的样本点一一列出，而是分别计算出 S 中与事件 A 中包含的基本事件个数。通常利用排列和组合法进行计数，然后再求概率 $P(A)$。

3.2 几何型概率

对于一随机试验的所有可能结果有无穷多个的情形，概率的古典定义就不适用了，这时将古典概率的定义推广。

一随机试验的所有可能结果有无穷多个，且每个基本事件出现的概率相等，则在等可能性基础之上，可以借助几何度量(长度、面积和体积等)来定义概率。事件 A 发生的概率为

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(S)} \tag{1-8}$$

其中 $\mu(S)$ 表示整个取值区域(相当样本空间)的长度、面积和体积等，$\mu(A)$ 表示 A 的有利区域(相当古典概型的有利子空间)的长度、面积和体积等。

4 条件概率和概率的乘法定理

4.1 条件概率的定义

设 A,B 是两个事件,且 $P(A)>0$,则称

$$P(B \mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \tag{1-9}$$

为事件 A 发生条件下,事件 B 发生的条件概率。

不难验证,条件概率符合概率定义的三个条件,即

① 非负性:$P(B \mid A) \geqslant 0$。

② 规范性:$P(S \mid A)=1$。

③ 可列可加性:设 $B_1,B_2,\cdots$ 是两两互不相容的事件,则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \mid A\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(B_i \mid A)$$

条件概率具有概率的一切性质。由条件概率定义,可得概率乘法定理。

4.2 概率乘法定理

设 A,B 为两个事件,且 $P(A)>0$,则有

$$P(AB)=P(A)P(B \mid A) \tag{1-10}$$

或若 $P(B)>0$,则有

$$P(AB)=P(B)P(A \mid B)$$

推广到三个事件的积事件情形。设 A,B,C 为三个事件,且 $P(AB)>0$,则有

$$P(ABC)=P(A)P(B \mid A)P(C \mid AB) \tag{1-11}$$

一般地,设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件,$n \geqslant 2$,且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$,则有

$$\begin{aligned}P(A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n)=&P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)\cdots\\&P(A_n \mid A_1A_2\cdots A_{n-1})\end{aligned} \tag{1-12}$$

5 全概率公式和贝叶斯公式

设一随机试验 E 的样本空间为 S,$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为一组事件,若

①$B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n=S$;②$B_iB_j=\varnothing$,$i \neq j$,$i,j=1,2,\cdots,n$,则称 B_1,$B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间 S 的一个划分。

若 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是样本空间的一个划分,则每次试验,事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 中必有一个且仅有一个发生。

定理 1.1 设试验 E 的样本空间为 S,A 为 E 的任一事件,$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间的一个划分,且 $P(B_i)>0$,则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i) \tag{1-13}$$

称式(1-13)为全概率公式。

定理 1.2 设试验 E 的样本空间为 S,A 为 E 的任一事件,$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间的一个划分,且 $P(A)>0$,$P(B_i)>0$,则

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(B_iA)}{P(A)}=\frac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)} \tag{1-14}$$

称式(1-14)为贝叶斯公式。

6 随机事件的独立性

一般来说,条件概率 $P(B\mid A)$ 与 $P(B)$ 不相等,因为事件 A 发生对事件 B 发生的概率是有影响的,只有在这种影响不存在时,才会有 $P(B\mid A)=P(B)$。

对于两个事件 A,B,若 $P(A)>0,P(B)>0$,当 $P(A\mid B)=P(A)$ 成立时,则等式 $P(B\mid A)=P(B)$ 也成立,反之亦然。这时概率的乘法公式写为

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

6.1 事件独立性定义

设 A,B 是任意两个事件,若

$$P(AB)=P(A)P(B) \tag{1-15}$$

则称 A,B 为相互独立的事件。

定理 1.3 若事件 A 和 B 相互独立,则 A 和$\overline{B}$,$\overline{A}$ 和 B,$\overline{A}$ 和$\overline{B}$ 各对事件也相互独立。

6.2 三个事件独立性定义

设 A,B,C 为三个任意事件,如果具有

$$\begin{cases}P(AB)=P(A)P(B)\\P(BC)=P(B)P(C)\\P(AC)=P(A)P(C)\\P(ABC)=P(A)P(B)P(C)\end{cases} \tag{1-16}$$

则称 A,B,C 为相互独立的事件。式(1-16)的前三个等式成立,则称 A,B,C 为两两独立。

6.3 n 个事件独立性定义

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是任意 n 个事件,如果对于任意 $k(1<k\leqslant n)$,任意 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$,具有等式

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}) \tag{1-17}$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为相互独立的事件。

式(1-17)包含的等式总数为

$$C_n^2 + C_n^3 + \cdots + C_n^n = 2^n - n - 1$$

如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 满足 $P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j)$，其中 A_i, A_j 为任意两个事件，$1 \leqslant i < j \leqslant n$，则称 n 个事件是两两独立的。

由上述定义可知，若 n 个事件相互独立，则这 n 个事件一定是两两独立的；反之，不一定成立。

定理 1.4 设 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，则概率的乘法公式为

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n) \tag{1-18}$$

在实际应用中，对于事件的独立性通常不是用定义判断，而是根据实际意义直观地作判断。

注意 若 $P(A) > 0, P(B) > 0$，则 A, B 相互独立与 A, B 互不相容不能同时成立。

7 伯努利概型

将试验 E 重复进行 n 次，若各次试验结果互不影响，即每次试验结果出现的概率都不依赖于其他各次试验的结果，这样的试验称为 n 重独立试验。特别情形，若一次试验的所有可能结果有两个，且事件 A 在每次试验中发生的概率为 $P(A) = p$，不发生的概率为 $P(\overline{A}) = 1 - p$，则称这样的 n 次试验为 n 重伯努利(Bernoulli)试验。

定理 1.5 在 n 重伯努利试验中，设事件 A 在每次试验中发生的概率都为 $P(A) = p(0 < p < 1)$，则在 n 次试验中，事件 A 恰好发生 k 次的概率为

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \tag{1-19}$$

其中 $q = 1 - p, p + q = 1, k = 0, 1, 2, \cdots, n$。

称式(1-19)为伯努利概型。因为 $\sum\limits_{k=0}^{n} P_n(k) = (p+q)^n = 1$，式(1-18)的右端是 $(p+q)^n$ 展开式的第 $k+1$ 项，所以又称式(1-19)为二项概率公式。

重要结论

1 随机事件之间的关系和运算

(1) 包含关系，相等关系

(2) 并事件，交事件，差事件

(3) 互不相容事件和对立事件

(4) 德·莫根律