五年制高等职业学校教师用书

应用数学 YINGYONG SHUXUE

教学参考书

主编 葛渭高

语文出版社

使用说明

本书是语文出版社五年制高等职业教育文化基础课教材《应用数学》的配套教师用书。本书每章与教材内容相对应，各章包括概述、内容分析、习题参考答案三部分内容。概述主要介绍本章的教学要求、内容编排的具体内容及课时的分配建议。内容分析比较详细地介绍了各节教学内容的重点、难点及教学中应注意的问题。习题参考答案提供了教材各章节的练习、习题的答案及练习册练习题答案。

参加本书编写的有葛渭高、张学莲、高广志、王德才、王永琛、王琳、王霞、李广全、郭昌禄、李励信、韩启汉、黄海哨、赵宇、张刚民。责任编辑是张程。

语文出版社

2006 年 8 月

目　录

第一章　常微分方程

I 概　述

一、教学要求

1. 理解微分方程的定义，阶，解，通解，初始条件和特解等概念.

2. 掌握可分离变量的微分方程的解法.

3. 掌握一阶齐次线性方程$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$的通解 $y=Ce^{-\int P(x)dx}$（C 为任意常数）及特解.

4. 掌握一阶非齐次线性方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ 的通解 $y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$ 及特解.

5. 理解二阶常系数线性齐次微分方程的解的性质，掌握二阶常系数线性齐次微分方程的解法.

6. 理解二阶常系数线性非齐次方程的解法.

7. 理解拉普拉斯变换的定义及其性质，会求一些常见函数的拉氏变换.

8. 理解拉普拉斯逆变换，会用查表法求一些简单函数的拉氏逆变换.

9. 会用拉氏变换解常微分方程.

二、内容编排

本章是在前面学习了导数、微分、不定积分、广义积分的基础上，研究一阶微分方程的解法，二阶常系数齐次微分方程的解法，二阶常系数非齐次微分方程的解法，以及介绍了拉普拉斯变换及其性质，拉普拉斯逆变换，以及应用拉普拉斯变换来解微分方程.

微分方程是本书的一个重要组成部分，它是微积分学联系实际的重要渠道. 早在十七世纪末，微积分开始形成时，就涉及到微分方程的问题，可以说微分方程的理论和方法是与微积分同时发展起来的. 在 20 世纪以前，微分方程问题主要来源于几何学，力学和物理学，而现在则几乎在自然科学、工程技术以及经济学的各部门都会出现微分方程的问题，它已成为研究科学技术、解决实际问题的不可缺少的工具.

本章内容主要分两大部分. 第一部分主要讲常微分方程的基本概念和一阶微分方程的解法，以及二阶常系数齐次微分方程和二阶常系数非齐次微分方程的解法.

第二部分主要介绍拉普拉斯变换的概念及其性质，拉普拉斯逆变换，以及如何应用拉氏变换来解常微分方程.

本章内容中，一阶微分方程的解法，即分离变量法、常数变易法是重点，二阶常系数齐次微分方程解法也是重点，而二阶常系数非齐次微分方程的解，特别是它的初值问题是难

点.

三、课时分配

本章教学时间约需 18 课时，具体分配如下（仅供参考）：

§1.1	常微分方程的概念	约 1 课时
§1.2	一阶微分方程	约 3 课时
§1.3	二阶常系数线性齐次微分方程	约 3 课时
§1.4	二阶常系数线性非齐次微分方程	约 3 课时
§1.5	拉普拉斯变换及其性质	约 3 课时
§1.6	拉氏逆变换	约 1 课时
§1.7	用拉氏变换解常微分方程	约 2 课时
内容小结		约 2 课时

Ⅱ 内容分析

引言

引言说明了许多复杂的实际问题，当描述其运动规律的函数关系往往不能直接得到，而只能找到其函数与导数的关系式时，这个关系式就是所谓的“微分方程”，强调了“微分方程”在研究科学技术，解决工程实际问题中的重要性.

§1.1 常微分方程的概念

1. 教材通过分析两个具体例子，分别得到满足题意的微分方程，从而引出微分方程的一般定义，以及什么是微分方程的通解，微分方程的初始条件，微分方程的特解.

2. 在讲解例题时已经用到变量分离法.

§1.2 一阶微分方程

1. 教材直接给出可分离变量的一阶微分方程的求解步骤——分离变量法，并通过两个例子给出详细说明.

2. 一阶线性微分方程

教材直接给出一阶线性微分方程一般形式 $y'+P(x)y=Q(x)$，并说明一阶线性齐次方程和一阶线性非齐次方程的区别. 首先用分离变量法求出一阶线性齐次微分方程的通解公式 $y=Ce^{-\int P(x)dx}$（其中 C 为任意常数），今后学生可直接用该公式求一阶线性齐次微分方程的解.

用常数变易法求一阶非齐次线性微分方程的通解公式时，教材为降低难度，直接将一阶非齐次线性微分方程的解表示成

$$y=C(x)e^{-\int P(x)dx}$$

然后对其式求导，从而求得 $C(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}+C$ 便得到一阶非齐次线性微分方程的通解公式

$$y = e^{-\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C]$$

通解公式可改写成

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

根据通解结构，一阶线性非齐次微分方程的通解等于它的一个特解加上它对应的齐次方程的通解.

在解一阶线性非齐次微分方程时，可根据实际情况，既可用常数变易法求解，又可用公式直接求解.

§1.3 二阶常系数线性齐次微分方程

本小节主要是讨论二阶常系数齐次方程的性质，以及解法和应用.

1. 教材先说明什么叫二阶常系数线性齐次微分方程，并给出它一般形式：$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=0$（其中 a，b，c 都是常数，且 $a\neq0$），也可以写成：$y''+Py'+Qy=0$（其中 P、Q 为常数）

而形如 $a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=f(x)$（其中 a、b、c 为常数，$a\neq0$，$f(x)$是已知函数）叫做二阶常系数非齐次微分方程，也可以写成：

$$y''+Py'+Qy=f(x).$$

2. 对于二阶线性齐次微分方程的性质 1：如果 $y_1(x)$和 $y_2(x)$都是二阶线性齐次微分方程的解，那么 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$(其中 C_1,C_2 是任意常数)也是这个方程的解，教材中给予了证明.

特别要注意的是，这里 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$不一定是二阶常系数线性齐次方程的通解.

而性质 2：如果 $y_1(x)$与 $y_2(x)$是二阶线性齐次微分方程的任意两个线性无关的特解，那么 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$(C_1,C_2 均为任意常数)就是二阶线性齐次方程的通解. 为降低教材难度这个性质没有给予证明.

3. 求二阶常系数齐次方程的通解，关键在于求出它的两个线性无关的特解. 求此特解的方法是，假定所求特解的形式是 $y=e^{\alpha x}$，其中 α 是一特定常数，将它代入齐次方程并消去指数函数 $e^{\alpha x}$，便可得一个关于 α 的二次代数方程，称为二阶常系数线性齐次方程的特征方程，求解这个特征方程便可求出待定的常数 α. 值得注意的是，这个特征方程和微分方程相对应的项具有相同的系数，所以只要用 α^2 代替$\frac{d^2y}{dx^2}$(y'')，用 α 代替$\frac{dy}{dx}$（y')，用 1 代替 y，就得到特征方程. 在求得 α 之后便可直接写出这个二阶常系数线性齐次方程的通解. 现将此法列表如下：

给定二阶常系数线性齐项方程 $ay''+by'+cy=0$，写出特征方程 $a\alpha^2+b\alpha+c=0$.

特征方程的根 α	相应齐次方程的通解
α_1，α_2 为单根（$\alpha_1\neq\alpha_2$）	$y=C_1e^{\alpha_1x}+C_2e^{\alpha_2x}$
α 为重根	$y=(C_1x+C_2)e^{\alpha x}$
α 为复根 $\alpha=\beta+i\omega$	$y=e^{\beta x}(C_1\sin\omega x+C_2\cos\omega x)$（其中 C_1，C_2 为任意常数）

§1.4 二阶常系数线性非齐次微分方程

与一阶线性非齐次方程一样，它的通解等于它的任意一个特解，加上其对应的齐次方程的通解.

如果 $y_0(x)$是二阶常系数线性非齐次方程 $y''+by'+cy=f(x)$ 的任意一个特解，$Y(x)$ 是其对应的齐次方程 $y''+by'+cy=0$ 的通解，那么 $y=Y+y_0$ 是方程 $y''+by'+cy=f(x)$的通解.

二阶常系数线性齐次方程的通解 Y 总是可以求的. 因此，解二阶常系数线性非齐次方程的问题，关键在求它的一个特解 y_0，这是本章的难点. 本章只介绍当二阶常系数线性非齐次方程中右边的 $f(x)$是两种常见形式时求 y_0 的方法.

(1) $f(x)=A(x)e^{rx}$,其中 r 是常数，$A(x)$是 x 的一个 m 次多项式，

$A(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m$.

(2) $f(x)=e^{rx}A(x)\cos\omega x$ 或 $f(x)=e^{rx}A(x)\sin\omega x$，其中 r，ω 是常数.

求特解 y_0 采用的是待定系数法，关键在于正确地假定特解 y_0 的试探形式，现将 y_0 形式与 $f(x)$的对应关系列表如下：

$f(x)$的形式	y_0 的试探形式	说明
$e^{rx}A(x)$	$x^k\theta(x)e^{rx}$	$A(x)$与 $\theta(x)$是同次多项式 当 r 不是特征方程的根时，取 $k=0$；当 r 是单根时，取 $k=1$；当 r 是重根时，取 $k=2$.
(1) $e^{rx}A(x)\cos\omega x$	$x^k\theta(x)e^{(r+i\omega)}$	$A(x)$与 $\theta(x)$是同次多项式 当 $r+i\omega$ 不是特征方程的根时，取 $k=0$；当 $r+i\omega$ 是特征方程根时，取 $k=1$. y_0 的实部为 (1) 对应的特解， y_0 的虚部为 (2) 对应的特解.
(2)$e^{rx}A(x)\sin\omega x$		

第一步：确定 k.

当 r 不是特征方程的根时，取 $k=0$；

当 r 是特征方程的单根时，取 $k=1$；

当 r 是特征方程的重根时，取 $k=2$.

第二步：确定多项式 $\theta(x)$的系数.

将特解 y_0 的试探形式（k 已定）代入微分方程，比较系数，即可求得 $\theta(x)$的系数. 至此，得到特解 y_0.

§1.5 拉普拉斯变换及其性质

拉普拉斯变换是为了解决工程计算问题而发明的一种“运算法”. 这种方法的基本思想就是通过积分运算，把一种函数变成另一种函数，从而使运算变得更加简捷方便.

拉普拉斯变换是解常系数线性微分方程的一种简便方法，运用拉氏变换可以使微积分运算转变为复变数的代数运算，因而使解常系数线性微分方程转换成解代数方程.

本节主要介绍了拉氏变换的概念，根据拉氏变换定义可知拉氏变换是将给定的函数通过广义积分转换成一个新函数，它是一种积分变换，求原函数 $f(t)$的拉氏变换实际是求 $f(t)\cdot e^{st}$的广义积分，因此在讲拉氏变换时要先复习一下广义积分的有关概念.

在讲解例 3 时要用到分部积分法，要复习一下有关分部积分的知识，即

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u.$$

讲例 4 时要用到复数的有关知识，建议要复习复数有关知识，即

$\because\quad e^{it}=(\cos t+i\sin t), e^{-it}=(\cos t-i\sin t),$

$\therefore\quad \sin t=\dfrac{1}{2i}(e^{it}-e^{-it}).$

二、拉普拉斯变换的基本性质

拉普拉斯变换有一系列重要性质，这里我们重点介绍在常系数线性微分方程应用中几个简单而基本的性质，目地是能更快更方便地求函数的拉氏变换.

1. 线性性质

线性性质是拉氏变换中最常用的一种性质. 若 α_1，α_2 是常数，$L[\alpha_1 f_1(t)+\alpha_2 f_2(t)]=\alpha_1 L[f_1(t)]+\alpha_2 L[f_2(t)]$，此性质可推广.

$$L[\alpha_1 f_1(t)+\alpha_2 f_2(t)+\cdots+\alpha_n f_n(t)]=\alpha_1 L[f_1(t)]+\alpha_2 L[f_2(t)]+\cdots+\alpha_n L[f_n(t)].$$

根据性质 1，原函数 $f(t)$是复值函数时，即 $f(t)=u(t)+iv(t)$，其 u，v 是实数，则由线性性质可得

$$L[f(t)]=L[u(t)+iv(t)]=L[u(t)]+iL[v(t)].$$

2. 位移性质

若 $L[f(t)]=F(s)$，则有 $L[e^{kt}\cdot f(t)]=F(s-k)$，应用这个公式可由函数 $f(t)$的拉氏变换立即得到 $e^{kt}f(t)$的拉氏变换.

3. 微分性质

$$L[f'(t)]=sF(s)-f(0),$$

$$L[f''(t)]=s^2F(s)-sf(0)-f'(0),$$

$$\cdots$$

$$L[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0).$$

借助这个性质我们可以用拉氏变换来解常系数线性微分方程初值问题.

其余性质可从略.

§1.6 拉氏逆变换

在运用拉氏变换求解常系数线性微分方程时，我们要碰到如何根据象函数 $F(s)$去求原函数 $f(t)$的问题，这种由象函数 $F(s)$去推导出其原函数 $f(t)$的数学运算叫做拉普拉斯逆变换.

对一般较简单的拉氏变换，可以直接通过查拉氏变换表直接求出它的逆变换.

当象函数是比较复杂的有理分式时，就需设法先将有理分式的象函数凑成几个简单的分式之和形式，然后再分别求它们象原函数，再用线性性质求出原函数.

§1.7 用拉氏变换解常微分方程

用拉氏变换解微分方程是解微分方程的一种常用方法.

应用拉氏变换解常微分方程的步骤如下：

1. 对微分方程两边施行拉氏变换，根据拉氏变换的有关性质，与拉氏变换表，得到象

函数的代数方程.

2. 解这个代数方程求出象函数.

3. 查拉氏变换表求出原函数，就得到原微分方程的解. 注意：当象函数比较复杂时，要设法先将它化为表中已有的象函数，然后再查表求出原函数.

Ⅲ 习题参考答案

§1.1 常微分方程的概念

练 习

1. (1) 是；(2) 不是；(3) 是；(4) 不是；(5) 是；(6) 是；(7) 是；(8) 是.
2. (1) 一阶；(2) 二阶；(3) 三阶；(4) 一阶.

习题 1.1

1. 略.
2. (1) $y=2x+C$； (2) $y=\ln|x|+C$.
3. (1) $y=2-\cos x$；(2) $y=x^3+2x$.
4. $y=\frac{1}{3}(x^3-1)$.
5. $s=\frac{1}{12}t^4-\frac{1}{2}t^2+t$.

§1.2 一阶微分方程

练习 1

(1) $y^2+x^2=C$；

(2) $y=\frac{1}{5}x^3+\frac{1}{2}x^2+C$；

(3) $y=C(x-1)$；

(4) $\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}y^2+C=0$.

练习 2

1. (1) $y=e^{2x}-\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}+C$；

(2) $y=e^{-x}(x+C)$.

2. (1) $y=\frac{1}{2}e^x+\frac{3}{2}e^{-x}$；

(2) $y=\frac{x}{\cos x}$.

习题 1.2

1. (1) $y=e^{Cx}$；

(2) $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{5}x^3+C$；

(3) $\arcsin y=\arcsin x+C$；　(4) $\frac{1}{y}=a\ln|x+a-1|+C$；

(5) $\tan x-\tan y=C$；　(6) $10^{-y}+10^{x}=C$；

(7) $(e^x+1)\cdot(e^y-1)=C$；　(8) $\sin x\cdot\sin y=C$.

2. (1) $y=\frac{1}{3}x^2+\frac{3}{2}x+2+\frac{C}{x}$；　(2) $y=2+Ce^{-x^2}$；

(3) $y=C\cos x-2\cos^2 x$；　(4) $y=(x-2)^3+C(x-2)$.

3. (1) $x^2-y^2=1$；　(2) $y=\ln\frac{1+e^{2x}}{2}$；

(3) $y=\frac{1}{2}e^x+\frac{3}{2}e^{-x}$；　(4) $y=\frac{\pi-1-\cos x}{x}$.

§1.3 二阶常系数线性齐次微分方程

练　习

1. (1) $y=C_1e^{-5x}+C_2e^{-3x}$；　(2) $y=(C_1+C_2x)e^{-3x}$；

(3) $y=e^{-2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$；　(4) $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$；

(5) $y=C_1\cos x+C_2\sin x$；　(6) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$.

2. (1) $y=2\cos\sqrt{3}x+3\sin\sqrt{3}x$；　(2) $y=(2+x)e^{-\frac{x}{2}}$.

习题 1.3

1. (1) $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$；　(2) $y=C_1+C_2e^{4x}$；

(3) $y=C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x$；　(4) $y=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$；

(5) $x=(C_1+C_2t)e^{\frac{5}{2}t}$；　(6) $y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$.

2. (1) $y=4e^x+2e^{3x}$；　(2) $y=e^{-x}-e^{4x}$；

(3) $y=3e^{-2x}\cdot\sin 5x$；　(4) $y=2\cos 5x+\sin 5x$.

§1.4 二阶常系数线性非齐次微分方程

练习 1

(1) $y=C_1e^{-2x}+C_2e^x-\frac{1}{2}(x+\frac{1}{2})$；　(2) $y=C_1e^{\frac{x}{2}}+C_2e^{-x}+e^x$；

(3) $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-\frac{1}{2}x}+\frac{103}{4}-\frac{25}{2}x+\frac{5}{2}x^2$；(4) $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+\left(\frac{3}{2}x^2-3x\right)e^{-x}$.

练习 2

(1) $y=\frac{1}{4}xe^x\cos 2x$；

(2) $y=\frac{1}{3}x\cos x+\frac{2}{9}\sin x$.

习题 1.4

1. (1) $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}+\frac{11}{8}-\frac{1}{2}x$;

   (2) $y=C_1+C_2e^{-x}+\frac{e^{-x}}{2}(\cos x-\sin x)$.

2. (1) $y=-5e^{x}+\frac{7}{2}e^{2x}+\frac{5}{2}$;　　(2) $y=\frac{1}{2}(e^{9x}+e^{x})-\frac{1}{7}e^{2x}$;

   (3) $y=-\cos x-\frac{1}{3}\sin x+\frac{1}{3}\sin 2x$;　　(4) $y=e^{x}-e^{-x}+e^{x}(x^2-x)$.

§1.5 拉普拉斯变换及其性质

练习 1

$\frac{s}{s^2+1}$.

练习 2

(1) $\frac{9s}{9s^2+1}$;　　(2) $\frac{1}{s+2}$;

(3) $\frac{6}{s^4}$;　　(4) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}\right)$.

习题 1.5

(1) $\frac{6}{s^4}+\frac{2}{s^2}-\frac{2}{s}$;　　(2) $\frac{1}{s}-\frac{1}{(s-1)^2}$;

(3) $\frac{s^2-4s+5}{(s-1)^3}$;　　(4) $\frac{s^2-9}{(s^2+9)^2}$;

(5) $\frac{8}{s^2+4}-\frac{3s}{s^2+1}$;　　(6) $\frac{5}{(s+3)^2+25}$;

(7) $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$;　　(8) $\frac{s^2+2}{s(s^2+4)}$.

§1.6 拉氏逆变换

练习

(1) $3e^{-2t}$;　　(2) $2te^{2t}$;　　(3) $2\cos 4t$;　　(4) $\frac{1}{6}\sin\frac{3}{2}t$.

习题 1.6

(1) $\cos 2t$;　　(2) $\frac{1}{6}t^3e^{at}$;　　(3) $-2e^{2t}+3e^{3t}$;　　(4) $\frac{t}{a^2}-\frac{1}{a^3}\sin at$.

§1.7 用拉氏变换解常微分方程

习题 1.7

(1) $y=5(e^{-3t}-e^{-5t})$;

(2) $y=-2\sin t-\cos 2t+1$;

(3) $y=2t+3\cos 4t-\sin 4t$.

复 习 题 一

1. (1) 可分离变量; (2) 可分离变量; (3) 一阶非齐次; (4) 一阶齐次;
   (5) 一阶齐次.
2. (1) C; (2) C; (3) D; (4) C; (5) D; (6) B; (7) C; (8) B; (9) D; (10) C.
3. (1) $\tan y=C(e^x-1)$; (2) $\cos y=C\cos x$.
4. (1) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\dfrac{\sqrt{10}}{40}e^{2x}\sin(3x-\varphi)$; $\left(其中\ \varphi=\arctan\dfrac{1}{3}\right)$

   (2) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\dfrac{1}{2}x\sin x$;

   (3) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x+\dfrac{1}{2}x\sin x+\dfrac{\sqrt{10}}{40}e^{2x}\sin(3x-\varphi)$. $\left(其中\ \varphi=\arctan\dfrac{1}{3}\right)$
5. (1) $y=(C_1+C_2x)e^{2x}+\dfrac{1}{4}$; (2) $y=(C_1+C_2x)e^{2x}+\dfrac{1}{9}e^{-x}$;

   (3) $y=(C_1+C_2x+\dfrac{3}{2}x^2)e^{2x}$; (4) $y=(C_1+C_2x)e^{2x}+\dfrac{1}{8}\cos 2x$.
6. (1) $\dfrac{2s^3-24s}{(s^2+4)^3}$; (2) $\dfrac{2(s-1)}{[(s-1)^2+1]^2}$; (3) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s}-\dfrac{s}{s^2+16}\right)$.
7. (1) $e^{-t}(3\cos 3t+2\sin 3t)$; (2) $\dfrac{t}{a^2}-\dfrac{1}{a^3}\sin at$; (3) $1-te^{-t}$.
8. (1) $y=(3t^2+4t-2)e^{-2t}$; (2) $y=\cos t-\sin t+\dfrac{1}{2}t^2+t-1$.

练习册参考答案

练习 1.1

1. (1) 二阶微分方程; (2) 不是; (3) 二阶微分方程; (4) 三阶微分方程;
   (5) 一阶微分方程.
2. (1) 是通解; (2) 是通解; (3) 是特解; (4) 不是.
3. (1) $y'=x^2$; (2) $yy'+2x=0$; (3) $y'=y$, $y|_{x=1}=0$.

练习 1.2

1. (1) $3x^2-\ln(3y+2)^2=C$; (2) $y=e^{Cx}$;

(3) $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{5}x^3+C$; (4) $\arcsin y=\arcsin x+C$;

(5) $10^{-y}+10^x=C$; (6) $3x^4+4(y+1)^3=C$.

2. (1) $e^y=\frac{1}{2}(e^{2x}+1)$; (2) $\cos x-\sqrt{2}\cos y=0$;

(3) $\ln y=\tan\frac{x}{2}$; (4) $x^2y=\frac{1}{4}$.

练习 1.3

1. (1) C; (2)B; (3)A; (4)C; (5)C.
2. (1)√; (2)√; (3)√; (4)×.
3. (1)$y=Cx+x\ln\ln x$; (2)$y=e^{x^2}\left(-\frac{1}{4}e^{-2x^2}+C\right)$.
4. (1)$y=3-\frac{3}{x}$; (2)$y^2=2x^2(\ln x+2)$.

练习 1.4

1. (1)$y=\left(-\frac{1}{3}\cos 3x+C\right)x^2$; (2)$y=\frac{1}{x^2}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C\right)$;

(3)$y=\frac{1}{x^2-1}(\sin x+C)$; (4)$y=(x+C)e^{-\sin x}$.

2. (1)$y=\frac{x}{\cos x}$; (2)$y=\frac{1}{5}e^{-2x}(e^{5x}-1)$; (3)$\ln^2 y-2x\ln y=0$.
3. $y=-2x+2e^x-2$.

练习 1.5

1. (1)C; (2)D; (3)C; (4)B.
2. (1)$y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$; (2)$y=C_1+C_2e^{-3x}$; (3)$y=(C_1+C_2x)e^{5x}$;

(4)$y=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$; (5)$x=(C_1+C_2t)e^{\frac{5}{2}t}$.

3. (1)$y=(2+7x)e^{-\frac{x}{2}}$; (2)$y=e^{2x}\sin 3x$; (3)$y=e^{-x}\cos x$.

练习 1.6

1. (1)C; (2)D; (3)B; (4)A.
2. (1)$y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}-x+\frac{1}{3}$;

(2)$x=e^{3t}(C_1\sin 2t+C_2\cos 2t)+3$;

(3)$x=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}+\frac{1}{4}t-\frac{3}{8}$;

(4)$y=e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{5}{2}x^2+C_1x+C_2\right)$.

3. (1) $y=-\frac{7}{6}e^{-2x}+\frac{5}{3}e^{x}-x-\frac{1}{2}$；

(2) $y=xe^{-\frac{3}{2}x}+12e^{-\frac{3}{2}x}-9e^{-\frac{5}{2}x}$；

(3) $y=\frac{\pi}{4}\cos x-\frac{1}{2}x\cos x$.

练习 1.7

1. (1) $\frac{2}{s^3}$； (2) $\frac{1}{s-3}$； (3) $\frac{1}{(s-3)^2}$； (4) $\frac{1}{2(s-3)^3}$； (5) $\frac{3}{s^2+9}$；

(6) $\frac{s}{s^2+25}$； (7) $\frac{6s}{(s^2+9)^2}$； (8) $\frac{s^2-25}{(s^2+25)^2}$； (9) $\frac{3}{(s+2)^2+9}$； (10) $\frac{s+3}{(s+3)^2+25}$.

2. (1) $\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}$； (2) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+1};\right)$ (3) $\frac{2}{s^3}-\frac{2}{s^2}+\frac{3}{s}$； (4) $\frac{6}{s^4}-\frac{1}{s+2}$；

(5) $\frac{s^2+1}{(s-1)^3}$； (6) $\frac{s}{(s^2+1)^2}$； (7) $\frac{1}{s^2}+\frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$； (8) $\frac{6}{s^2+4}+\frac{4s}{s^2+9}$.

练习 1.8

1. (1) $L^{-1}[F(s)]=t$； (2) $L^{-1}[F(s)]=\frac{1}{2}t^2$；

(3) $L^{-1}[F(s)]=e^{3t}$； (4) $L^{-1}[F(s)]=e^{-3t}$；

(5) $L^{-1}[F(s)]=te^{3t}$； (6) $L^{-1}[F(s)]=t^3e^{3t}$；

(7) $L^{-1}[F(s)]=3\cos 5t+\frac{4}{5}\sin 5t$； (8) $L^{-1}[F(s)]=1+e^{2t}$；

(9) $L^{-1}[F(s)]=t\sin 3t$； (10) $L^{-1}[F(s)]=t\cos 2t$.

2. (1) $2e^{-t}+e^{2t}$； (2) $e^{t}+te^{-2t}$； (3) $\cos 3t$；

(4) $\frac{1}{3}\sin 3t$； (5) $\frac{1}{8}t\sin 4t$； (6) $\frac{1}{6}+\frac{e^{-3t}}{3}-\frac{e^{-2t}}{2}$；

(7) $\frac{t}{9}-\frac{t}{27}\sin 3t$； (8) $1+2e^{t}+4te^{t}$.

练习 1.9

(1) $y(t)=e^{t}-1$； (2) $y(t)=\frac{1}{2}t^2e^{-t}$；

(3) $y(t)=\frac{1}{2}e^{t}-\frac{1}{2}e^{-t}$； (4) $y(t)=2t-\frac{1}{2}\sin 2t$；

(5) $y(t)=\frac{2}{5}e^{t}-\frac{2}{5}e^{-t}-\frac{2}{5}\sin 2t$； (6) $y(t)=-e^{t}\sin t+te^{t}$.

综合练习（一）

1. (1)C；(2)A；(3)A；(4)A；(5)B；(6)D；(7)B；(8)C.

2. (1) $y=C\cos x$； (2) $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}+\frac{1}{4}xe^{2x}$；

(3) $y=C_1e^{-x}\cos 2x+C_2e^{-x}\sin 2x$;　(4) $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}+\frac{1}{2}x^2e^{-2x}$;

(5) $\frac{1}{s^3}$;　(6) $\frac{2}{s^2+4}$;　(7) $\frac{1}{s-3}$;　(8) $\frac{1}{(s-3)^2}$;

(9) $\cos 2t$;　(10) $t\sin t$;　(11) $t\cos t$　(12) $\frac{1}{4}(1-e^{-4t})$.

3. (1) $(1-x)(1+y)=C$;　(2) $x^2+y^2=25$.

4. (1) $y=C(x+2y)^2$;　(2) $y=xe^{Cx+1}$.

5. (1) $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$;　(2) $y=e^{3x}(C_1\cos 4x+C_2\sin 4x)$;

(3) $y=(C_1+C_2x)e^{-5x}+x^2e^{-5x}$;　(4) $y=C_2\cos 2x+C_2\sin 2x+x\cos 2x$.

6. $f(t)=e^t-te^{2t}$.

7. $y(t)=\frac{1}{2}(t-1)^2e^{-t}$.

第二章 线性代数

Ⅰ 概 述

一、教学要求

1. 理解行列式意义，熟练掌握利用对角线法则计算二阶、三阶行列式的方法. 理解掌握三阶行列式的性质. 掌握用行列式性质化行列式为三角形并计算其值的方法. 掌握克莱姆法则，并会选用它解线性方程组.

2. 理解矩阵的概念. 掌握方阵、单位阵、三角阵等概念. 掌握线性方程组系数矩阵、增广矩阵的概念.

3. 掌握矩阵的加法、减法、数乘、乘法等运算及其所满足的运算规律. 理解逆矩阵的概念，明确矩阵有逆的条件，了解逆矩阵的性质. 掌握利用伴随矩阵求逆矩阵的方法. 熟练地利用矩阵的初等变换求逆矩阵的方法.

4. 掌握线性方程组有解的充要条件. 明确当非齐次线性方程组有解时，何时有唯一解，何时有无穷多组解，并能熟练地用矩阵的初等行变换求出方程组的一般解. 搞清齐次线性方程组何时只有零解，何时有非零解. 在有非零解时，能熟练地用矩阵的初等行变换求出其非零解的一般表达式.

5. 了解投入产出表的基本结构及各项指标的经济意义，明确最终产品、新创造价值与总产品之间的关系. 掌握投入产出数学模型的分配平衡方程和消耗平衡方程的经济意义及其矩阵表示法，了解直接消耗系数的经济意义，并掌握其计算方法，会求解平衡方程组.

二、内容编排

本章教材是在初中学习了用消元法解二元一次方程组及三元一次方程组的基础上，通过引入行列式、矩阵，并把它们作为工具，进一步讨论线性方程组的求解问题. 通过介绍投入产出法说明线性代数在经济领域中的应用.

行列式、矩阵与线性方程组有密切的联系，利用行列式可以解决未知量个数与方程个数相等的线性方程组的求解问题；利用矩阵可以解决一般线性方程组的求解问题. 投入产出数学模型，是一种线性经济模型，是矩阵、线性方程组等数学知识的具体应用.

本章教材分为五部分，第一部分讲行列式及其性质（含克莱姆法则）. 首先从求二元、三元线性方程组的解引入二阶、三阶行列式的概念及对角线展开法则，并将二阶、三阶行列式运用于解线性方程组. 讨论了三阶行列式的性质并用于对三阶行列式的计算. 直接给出了高阶行列式的概念把三阶行列式的性质推广到高阶行列式. 高阶行列式的计算主要是利用行列式性质化其为三角形进行计算. 最后讲解克莱姆法则. 当未知量个数与方程个数相等，且系数行列式不为零时，应用克莱姆法则可求出这类线性方程组的解，并且用方程组的系数和常数项构成的行列式表示出它的解. 第二部分讲线性方程组和矩阵. 首先从具体问题中抽象出矩阵概念. 线

性方程组中的系数和常数项可构成矩阵，最为常用的是系数矩阵和增广矩阵. 重点介绍了几个常见的特殊矩阵. 最后通过消元法，展示了解线性方程组的过程，说明用消元法解线性方程组的过程是对其增广矩阵实施一系列的变换. 第三部分讲矩阵运算、逆矩阵与初等变换. 首先对实例进行分析，引出了矩阵运算同时还分析了性质. 用矩阵运算表示线性方程组. 引入逆矩阵的概念后，直接给出了矩阵的逆存在的条件下用伴随矩阵求逆的方法，利用计算逆矩阵的方法解线性方程组. 最后给出了矩阵的初等变换的概念及秩的概念，利用矩阵的初等变换的方法，求矩阵的秩、逆矩阵及解线性方程组. 第四部分讲一般线性方程组求解. 首先介绍线性方程组有解的判定定理，然后介绍齐次线性方程组解的判定定理，同时介绍了齐次线性方程有非零解时求一般解的方法. 最后介绍非齐次线性方程组解的判定定理及非齐次线性方程组求一般解的方法. 第五节作为应用，讲投入产出法. 用实例直观地说明了投入产出法的基本概念，产品总值、中间产品、最终产品、分配平衡方程组、消耗平衡方程组、直接消耗系数及计算最终产品、总产品、直接消耗系数，求解平衡方程组的方法.

本章内容中，重点是行列式性质以及行列式的计算，矩阵的运算及矩阵的初等变换的应用，判定线性方程组解的情况及求一般解的方法，建立和求解平衡方程组. 难点是行列式计算，矩阵的乘法和矩阵的初等变换，求线性方程组的一般解，求直接消耗系数矩阵.

三、课时分配

本章教学时间约需 20 课时，具体分配如下(仅供参考)：

§2.1	行列式及其性质	约 6 课时
§2.2	线性方程组和矩阵	约 1 课时
§2.3	矩阵运算　逆矩阵与初等变换	约 6 课时
§2.4	线性方程组求解	约 3 课时
§2.5	投入产出法	约 2 课时
内容小结		约 2 课时

Ⅱ 内容分析

引言

首先，教材引言说明许多实际问题可以表示为多个变量之间的线性关系，线性代数是解决这些问题的工具.

然后，引言指出多个变量之间的线性关系有时是未知量个数与方程个数相等的线性方程组，有时是未知量个数与方程个数不相等的线性方程组，说明了学习本章知识要解决的具体问题.

最后概括说明了本章的主要内容及线性代数在投入产出分析上的应用，使学生初步了解全章内容的概貌.

§2.1　行列式及其性质

1. 本小节内容包括二阶、三阶行列式及其性质、n 阶行列式及性质、克莱姆法则.

2. 引入二阶、三阶行列式可以简单地表示出二元一次、三元一次线性方程组的解. 二阶行