

高等学校教材

微积分学

修订版 下册

华中科技大学数学系 编



高等教育出版社

高等学校教材

微积分学

修订版 (下册)

华中科技大学数学系 编



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

图书在版编目(CIP)数据

微积分学(修订版)(下册)/华中科技大学数学系 编. -北京:高等教育出版社;2002.7

理工科本科生用书

ISBN 7-04-010822-4

I. 微… II. 华… III. 高等学校-教材 IV. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 038215 号

责任编辑:徐可 封面设计:王凌波

版式设计:杨明 责任印制:陈伟光

微积分(修订版)(下册)

华中科技大学数学系 编

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社址	北京市东城区沙滩后街55号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100009	网址	http://www.hep.edu.cn
传真	010-64014048		http://www.hep.com.cn

经销 新华书店北京发行所

印刷 北京民族印刷厂

开本	880×1230 1/32	版次	2002年7月第1版
印张	8.875	印次	2002年7月第1次印刷
字数	260 000	定价	15.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

目 录

第八章 矢量代数与空间解析几何	(1)
§8.1 空间直角坐标系	(1)
§8.2 矢量及其线性运算	(4)
8.2.1 矢量概念	(4)
8.2.2 矢量的线性运算	(4)
8.2.3 矢量的坐标	(7)
§8.3 矢量间的积	(10)
8.3.1 数量积	(10)
8.3.2 矢量积	(12)
8.3.3 混合积	(14)
*8.3.4 三重矢量积	(15)
§8.4 平面与直线	(17)
8.4.1 平面方程	(17)
8.4.2 直线方程	(19)
8.4.3 关于平面与直线的基本问题	(21)
§8.5 曲面与曲线	(31)
8.5.1 曲面	(31)
8.5.2 空间曲线	(33)
8.5.3 二次曲面	(36)
第九章 多元函数微分学	(42)
§9.1 多元函数	(42)
9.1.1 区域	(42)
9.1.2 多元函数的概念	(45)

9.1.3 极限与连续性	(47)
§ 9.2 偏导数	(51)
9.2.1 偏导数的定义与计算	(51)
9.2.2 复合函数微分法	(54)
9.2.3 隐函数微分法	(58)
9.2.4 高阶偏导数	(61)
§ 9.3 全微分与 Taylor 公式	(66)
9.3.1 全微分	(66)
9.3.2 Taylor 公式	(71)
§ 9.4 方向导数与梯度	(75)
9.4.1 方向导数	(75)
9.4.2 梯度	(77)
§ 9.5 极值	(79)
9.5.1 自由极值	(79)
9.5.2 条件极值	(83)
9.5.3 应用问题	(87)
§ 9.6 微分学的几何应用	(91)
9.6.1 曲线的切线与法平面	(91)
9.6.2 曲面的切平面与法线	(93)
第十章 重积分	(99)
§ 10.1 二重积分的定义与性质	(99)
10.1.1 体积问题与质量问题	(99)
10.1.2 二重积分的定义	(100)
10.1.3 二重积分的性质	(102)
§ 10.2 二重积分的计算	(103)
10.2.1 化为逐次积分	(104)
10.2.2 极坐标代换	(108)
* 10.2.3 一般变量代换	(114)
§ 10.3 三重积分	(121)

10.3.1	三重积分的定义	(121)
10.3.2	化为逐次积分	(122)
10.3.3	柱面坐标与球面坐标代换	(127)
§ 10.4	重积分的应用	(134)
10.4.1	几何应用	(135)
10.4.2	物理应用	(138)
第十一章	曲线积分与曲面积分	(145)
§ 11.1	第一型曲线积分	(145)
11.1.1	定义与性质	(145)
11.1.2	化为定积分	(147)
§ 11.2	第二型曲线积分	(152)
11.2.1	定义与性质	(152)
11.2.2	化为定积分	(154)
11.2.3	全微分式的积分	(157)
11.2.4	Green 公式	(161)
11.2.5	平面曲线积分与路径无关的条件	(166)
11.2.6	二元函数的全微分求积与全微分方程	(170)
§ 11.3	第一型曲面积分	(174)
11.3.1	定义与性质	(175)
11.3.2	化为二重积分	(176)
§ 11.4	第二型曲面积分	(180)
11.4.1	定义与性质	(180)
11.4.2	化为二重积分	(183)
§ 11.5	Stokes 公式与 Gauss 公式	(187)
11.5.1	散度与旋度	(188)
11.5.2	Stokes 公式	(190)
11.5.3	Gauss 公式	(193)
11.5.4	场论概念	(197)
第十二章	无穷级数	(205)

§ 12.1 数项级数	(205)
12.1.1 级数的概念与性质	(205)
12.1.2 正项级数	(208)
12.1.3 变号级数	(214)
§ 12.2 函数项级数	(220)
12.2.1 一致收敛性	(220)
12.2.2 和函数的分析性质	(224)
§ 12.3 幂级数	(227)
12.3.1 收敛区间与收敛半径	(227)
12.3.2 展开函数为幂级数	(231)
12.3.3 级数求和	(236)
§ 12.4 Fourier 级数	(241)
12.4.1 Fourier 级数及其收敛性	(241)
12.4.2 展开函数为 Fourier 级数	(243)
12.4.3 Fourier 级数的其他形式	(248)
习题答案	(257)
人名索引	(270)
名词索引	(271)

第八章 矢量代数与空间解析几何

本书上册所介绍的“一元函数微积分学”，是建立在平面解析几何的基础上的。本书下册转向“多元函数微积分学”的讨论，为此，空间解析几何的知识是不可缺少的。鉴于矢量用于表达几何与分析概念都具有特殊的便利，而且已成为现代科学中的通用工具，本章着重介绍矢量代数的基本内容，并且将其应用于空间解析几何问题的研究。

§ 8.1 空间直角坐标系

空间解析几何的出发点，是建立空间中的点与三元有序数组之间的联系，这要通过引进空间直角坐标系来实现。

在空间中取定一点 O ，过 O 作三条互相垂直的数轴： x 轴（横轴）、 y 轴（纵轴）与 z 轴（竖轴），它们统称为坐标轴，且均以 O 为原点。规定三坐标轴的正向构成右手系，如图 8-1 所示。这样得到一空间直角坐标系，记作 $Oxyz$ ，其中 O 是坐标原点（或就叫原点）。

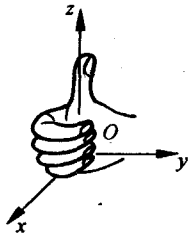


图 8-1

以下总假定已取定空间直角坐标系 $Oxyz$ 。

由 x 轴、 y 轴确定的平面称为 xy 坐标平面，简称 xy 平面； yz 平面与 xz 平面的意义仿此。三坐标平面两两互相垂直，且将空间分成八个部分，每个部分称为卦限。位于 xy 平面上的一、二、三、四象限上方（假定 z 轴朝上）的四个卦限依次称为 I, II, III, IV 卦限，与之相对的 xy 平面下方的四个卦限依次称为 V, VI, VII, VIII 卦限。

任给空间中一点 M ，过 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、 y 轴与 z 轴，它们与 x 轴、 y 轴、 z 轴的交点依次为 A, B, C ，这三点在各坐标轴上的坐标分别为 x, y, z 。这样，点 M 唯一确定一三元有序数组 (x, y, z) ，称之为点 M 在坐标系 $Oxyz$ 中的坐标，依次称 x, y, z 为 M 的横标、纵

标与竖标(图 8-2). 将点 M 记为 $M(x, y, z)$, 或简写为 (x, y, z) . 反之, 任给一有序数组 (x, y, z) , 在 x 轴、 y 轴与 z 轴上分别取点 A, B, C , 使其坐标分别为 x, y, z , 然后通过 A, B, C 分别作 x 轴、 y 轴、 z 轴的垂直平面, 这三个平面的交点 M 就是以 (x, y, z) 为其坐标的唯一的点. 这样, 就建立了空间的点与三元有序数组之间的一一对应关系.

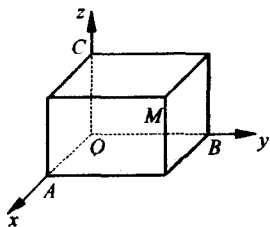


图 8-2

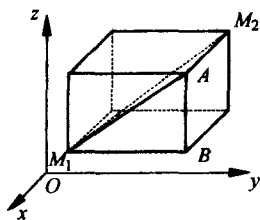


图 8-3

坐标面与坐标轴上的点, 其坐标各有一定特征. 例如, xy 平面上的点的坐标形如 $(x, y, 0)$; x 轴上的点的坐标形如 $(x, 0, 0)$. 原点的坐标为 $(0, 0, 0)$.

给定点 $M(x, y, z)$, 点 M 关于 xy 平面的对称点有坐标 $(x, y, -z)$; 点 M 关于 x 轴的对称点有坐标 $(x, -y, -z)$; 点 M 关于原点的对称点有坐标 $(-x, -y, -z)$. 点 M 在 xy 平面上的投影为点 $(x, y, 0)$, 在 x 轴上的投影为点 $(x, 0, 0)$ (一点在一平面(直线)上的投影是由该点向该平面(直线)所引垂线之垂足). 其余情况类推.

给定两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 与 $M_2(x_2, y_2, z_2)$, 以 d 记此两点之间的距离, 即 $d = |M_1M_2|$, 今推出 d 的计算公式. 过 M_1, M_2 各作三个分别垂直于三坐标轴的平面, 这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(图 8-3). 分别对直角三角形 M_1AM_2 与 M_1BA 用勾股定理得

$$d^2 = |AM_2|^2 + |M_1A|^2 = |AM_2|^2 + |M_1B|^2 + |BA|^2.$$

因

$$|AM_2| = |y_2 - x_1|, |M_1B| = |y_2 - y_1|, |BA| = |z_2 - z_1|,$$

故得

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (1)$$

特别,点 $M(x, y, z)$ 与原点 $O(0, 0, 0)$ 之间的距离为

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (2)$$

例 1 试证以点 $A(4, 1, 9)$, $B(10, -1, 6)$ 与 $C(2, 4, 3)$ 为顶点的三角形为等腰直角三角形.

证 依公式(1)有

$$|AB|^2 = (10 - 4)^2 + (-1 - 1)^2 + (6 - 9)^2 = 49;$$

$$|BC|^2 = (2 - 10)^2 + (4 + 1)^2 + (3 - 6)^2 = 98;$$

$$|CA|^2 = (4 - 2)^2 + (1 - 4)^2 + (9 - 3)^2 = 49.$$

可见 $|AB| = |CA|$, $|AB|^2 + |CA|^2 = |BC|^2$, 这表明 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

例 2 在 xy 平面上求一点 M , 使 M 与点 $A(1, 2, 1)$, $B(2, 2, 0)$, $C(1, 3, 0)$ 的距离相等.

解 设 M 的坐标为 $(x, y, 0)$, 则等式 $|MA| = |MB| = |MC|$ 相当于

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + 1 &= (x - 2)^2 + (y - 2)^2 \\ &= (x - 1)^2 + (y - 3)^2. \end{aligned}$$

由此解出 $x = 1, y = 2$, 故所求点为 $M(1, 2, 0)$.

习题 8.1

1. 求点 $M(3, -4, 5)$ 关于各坐标面的对称点的坐标.
2. 求点 $M(3, -4, 5)$ 关于各坐标轴的对称点的坐标.
3. 求点 $A(4, -3, 5)$ 到坐标原点及各坐标轴的距离.
4. 在 z 轴上求一点, 使它到点 $M(-4, 1, 7)$ 和 $N(3, 5, -2)$ 的距离相等.
5. 在 yz 面上求一点, 使它到点 $A(3, 1, 2)$, $B(4, -2, -2)$ 和 $C(0, 5, 1)$ 的距离相等.

§ 8.2 向量及其线性运算

8.2.1 向量概念

我们熟知的力、速度、电场强度等物理量不仅有大小,而且有方向.这种“有方向的量”广泛出现在各个邻域,其重要性并不亚于数量.这种量无论其具体特性如何,都可用有向线段来表示,于是作以下定义:

定义 1 对空间中任意两点 A, B , 称从 A 到 B 的有向线段为一个向量, 记作 \overrightarrow{AB} , 或记为单个黑体字母 \mathbf{a} . 称线段 AB 的长度为向量 \overrightarrow{AB} 的模, 记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\mathbf{a}|$. 若向量 \mathbf{a} 的模为零, 则称 \mathbf{a} 为零向量, 记作 $\mathbf{0}$. 称向量 \overrightarrow{BA} 为向量 \overrightarrow{AB} 的负向量, 写作 $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

在图示上, 用箭头指出向量的方向. 可以认为零向量的方向是任意的.

给定向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} , 若 \mathbf{a} 经平行移动后可与 \mathbf{b} 重合 (即起点与起点重合, 终点与终点重合), 则规定 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. 在这个意义上, 向量并无固定的起点, 因此称为自由向量. 本书中所研究的向量皆为自由向量.

任给向量 \mathbf{a} , 必有唯一的点 M , 使得 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OM}$ (O 是坐标原点). 反之, 任给空间中一点 M , M 确定唯一向量 \overrightarrow{OM} , 称为点 M 的矢径, 记作 r_M . 这样, 通过点 M 与向量 r_M 的对应, 得到空间中点的全体与向量的全体之间的一一对应. 下面将看到, 这种对应对于向量的研究与应用至关重要.

给定向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} , 设 $\mathbf{a} = r_A, \mathbf{b} = r_B$, 若 O, A, B 三点共线, 则说向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 共线 (或平行), 且当 A, B 在点 O 之同侧时, 说 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 同向; 当 A, B 在点 O 之异侧时, 说 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 反向. 注意零向量与任何向量共线.

8.2.2 向量的线性运算

力或速度的合成是依“平行四边形法则”施行的, 向量的加法是这类合成的一种抽象.

定义 2 给定向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} , 设 $\mathbf{a} = r_A, \mathbf{b} = r_B$. 若 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 不共线, 则以

OA, OB 为邻边作平行四边形 $OACB$ (图 8-4), 称矢量 r_C 为矢量 a 与 b 的和, 记作 $a + b$. 若 a 与 b 共线且同向, 则规定 $c = a + b$ 是一个与 a, b 同向的矢量, 且 $|c| = |a| + |b|$; 若 a 与 b 反向且 $|a| \geq |b|$, 则规定 $c = a + b$ 是一个与 a 同向的矢量且 $|c| = |a| - |b|$.

不难理解, 如上定义的 $a + b$ 与原点 O 的选取无关. 从图 8-4 看出, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$. 这个等式表达了求矢量和的“三角形法则”, 它可以进一步推广为如下的“多边形法则”(图 8-5):

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \cdots + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} \quad (1)$$

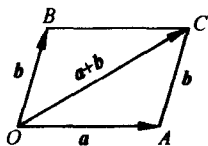


图 8-4

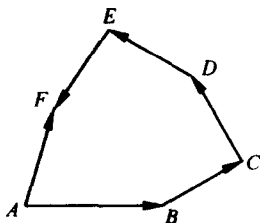


图 8-5

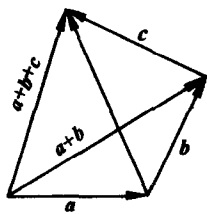


图 8-6

容易验证, 矢量加法有以下性质:

- (i) 交换律: $a + b = b + a$
- (ii) 结合律: $(a + b) + c = a + (b + c)$
- (iii) 零矢量的作用: $a + 0 = a$
- (iv) 负矢量的作用: $a + (-a) = 0$

图 8-6 说明了结合律的正确性.

任给矢量 a, b , 约定 $a - b = a + (-b)$, 称 $a - b$ 为 a 与 b 之差. 显然 $c = a - b \Leftrightarrow a = b + c$, 由此得出 $a - b$ 的几何意义 (如图 8-7 所示).

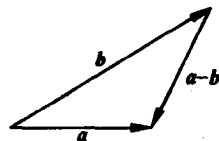


图 8-7

定义 3 给定矢量 a 与数量 λ , 规定 λ 与 a 的乘积为一矢量, 记作 λa , 其模为 $|\lambda| |a|$; 当 $\lambda > 0$ 时, λa 与 a 同向; 当 $\lambda < 0$ 时, λa 与 a 反向.

称如上定义的运算为数量与矢量的乘法,或简称为矢量的数乘.矢量的加法与数乘合称为矢量的线性运算.

容易验证,矢量的数乘有以下性质:

(v) 结合律: $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a) = \mu(\lambda a)$.

(vi) 分配律: $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$; $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$.

(vii) $1a = a$; $(-1)a = -a$; $0a = 0$.

分配律 $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$ 的正确性可由图 8-8 看出.

称模为 1 的矢量为单位矢量.任给非零矢量 a ,以 a^0 记与 a 同向的单位矢量.显然

$$a = |a|a^0 \text{ 或 } a^0 = a/|a| \quad (2)$$

通常以 a^0 表示 a 的方向.

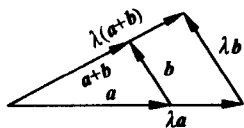


图 8-8

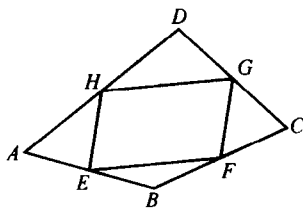


图 8-9

矢量的线性运算可用来解某些几何问题,试看一个简单例子.

例1 设 $ABCD$ 是一空间四边形,四边中点依次为 E, F, G, H (图 8-9),证明四边形 $EFGH$ 为平行四边形.

证 只需证边 EF 与 HG 平行且相等,这相当于证 $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$.由定义 3 及题设条件有

$$\overrightarrow{EB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC},$$

于是

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}.$$

同理 $\overrightarrow{HG} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$, 因此 $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$.

8.2.3 矢量的坐标

前面已经指出, 每个矢量 \mathbf{a} 是某一确定的点 A 的矢径: $\mathbf{a} = \mathbf{r}_A$. 通过对应 $A \rightarrow \mathbf{r}_A$, 可将点的坐标转化为矢量的坐标, 从而得到矢量的坐标表示. 准确说来就是:

定义 4 任给点 $M(x, y, z)$, 设 $\mathbf{a} = \mathbf{r}_M$, 则称 x, y, z 为矢量 \mathbf{a} (关于给定坐标系) 的坐标, 记作 $\mathbf{a} = \{x, y, z\}$.

为方便起见, 对任给矢量 \mathbf{a} , 今后以 $\{a_x, a_y, a_z\}$ 记其坐标, 即将定义 4 中的 x, y, z 分别记成 a_x, a_y, a_z . 于是 \mathbf{a} 有坐标表示式

$$\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\} \quad (3)$$

分别以 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 记矢量 $\{1, 0, 0\}, \{0, 1, 0\}$ 与 $\{0, 0, 1\}$, 并称之为 (给定坐标系的) 基矢量, 它们是互相垂直的单位矢量. 基矢量的意义在于: 任一矢量 \mathbf{a} 有唯一分解式:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \quad (4)$$

式(4)不过是式(3)的另一种写法而已.

图 8-10 说明了式(4)的几何意义.

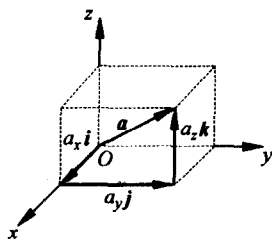


图 8-10

利用分解式(4)及矢量线性运算的性质(i) ~ (vii), 容易得出矢量线性运算的以下坐标公式:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \pm \mathbf{b} &= \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\} \\ \lambda \mathbf{a} &= \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\} \end{aligned} \quad (5)$$

公式(5)表明, 矢量的线性运算归结为其坐标的相应运算.

例 2 给定点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 与 $B(x_2, y_2, z_2)$, 求矢量 \overrightarrow{AB} 的坐标.

解 首先注意 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$, 然后用公式(5)得

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2, y_2, z_2\} - \{x_1, y_1, z_1\}$$

$$= \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}.$$

例3 设 A, B 如例2, 线段 AB 上的点 C 将 AB 分成有定比 $AC/CB = \lambda$ 的两段, 求点 C 的坐标.

解 由定义4, 只需求向量 r_C 的坐标. 由 $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}$ 与 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ 解出 $\overrightarrow{CB} = \frac{1}{1+\lambda} \overrightarrow{AB}$. 另一方面, $r_C = r_B - \overrightarrow{CB}$, 于是

$$\begin{aligned} r_C &= r_B - \frac{1}{1+\lambda} \overrightarrow{AB} \\ &= \{x_2, y_2, z_2\} - \left\{ \frac{x_2 - x_1}{1+\lambda}, \frac{y_2 - y_1}{1+\lambda}, \frac{z_2 - z_1}{1+\lambda} \right\} \\ &= \left\{ \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} \right\}, \end{aligned}$$

所以点 C 的坐标为 $\left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} \right)$.

利用数乘与向量的坐标, 可对“共线”这一几何关系给出一种代数刻画.

定理1 设 a, b 是两个非零矢量, 则 a 与 b 共线 \Leftrightarrow 存在实数 λ 使

$$a = \lambda b \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

证 若 a 与 b 共线, 则 $a^0 = \pm b^0$ (同向时取正号, 反向时取负号), 于是由式(2)有

$$a = |a|a^0 = \pm |a|b^0 = \pm (|a|/|b|)b = \lambda b,$$

其中 $\lambda = \pm |a|/|b|$. 反之, 若 $a = \lambda b$, 则直接由定义3看出 a 与 b 共线. 其次, 借助于公式(5)易见 $a = \lambda b \Leftrightarrow a_x/b_x = a_y/b_y = a_z/b_z = \lambda$. \square

若 $a = \overrightarrow{OM} = \{a_x, a_y, a_z\}$, 则由 §8.1 公式(2)有

$$|a| = |OM| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (6)$$

若 $a \neq 0$, 则 a 的方向完全决定于 a 与三坐标轴的夹角之余弦 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ (约定 $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi$), 称他们为矢量 a 的方向余弦. 从图8-10看出 $a_x = |a| \cos \alpha, a_y = |a| \cos \beta, a_z = |a| \cos \gamma$. 这结合式(6)得

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad (7)$$

$$\cos \gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

由式(7)推出

$$\mathbf{a}^0 = \mathbf{a}/|\mathbf{a}| = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\} \quad (8)$$

称任一组与 $\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ 成比例的数 l, m, n 为向量 \mathbf{a} 的方向数. 由定理1, l, m, n 是 \mathbf{a} 的方向数 \Leftrightarrow 向量 $\{l, m, n\}$ 非零且与 \mathbf{a} 共线.

例4 给定点 $A(2, 1, 1), B(1, 3, 0)$, 求 $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ 的模、方向余弦与 \mathbf{a}^0 .

解 首先,如同例2一样得出

$$\mathbf{a} = \{1 - 2, 3 - 1, 0 - 1\} = \{-1, 2, -1\}.$$

然后分别用公式(6), (7), (8)算得

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6};$$

$$\cos \alpha = -1/\sqrt{6}, \cos \beta = 2/\sqrt{6}, \cos \gamma = -1/\sqrt{6};$$

$$\mathbf{a}^0 = \{-1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}\}.$$

习题 8.2

1. 设 M 是平行四边形 $ABCD$ 两对角线的交点, 用 $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ 和 $\mathbf{b} = \overrightarrow{AD}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}$.

2. 给定点 $M_1(1, -3, 3), M_2(4, 2, -1)$, 求 $|\overrightarrow{M_1M_2}|, \overrightarrow{M_1M_2}$ 的方向余弦及与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 同方向的单位矢量.

3. 已知向量 \mathbf{a} 与 x 轴、 y 轴正向的夹角分别为 $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$, 且 $|\mathbf{a}| = 6$, 求向量 \mathbf{a} .

4. 设 $\overrightarrow{M_1M_2} = 8\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$, 点 M_1 的坐标为 $(2, -1, 7)$, 求点 M_2 的坐标.

5. 求各坐标平面分点 $A(2, -1, 7)$ 和 $B(4, 5, -2)$ 之间的线段之比, 并求其分点的坐标.

6. 给定 $F_1 = \{1, 2, 3\}$, $F_2 = \{-2, 3, -4\}$, $F_3 = \{3, -4, 5\}$. 三力同时作用于一点, 求合力的大小和方向余弦.

§ 8.3 向量间的积

任给向量 a, b , 可构成数量积 $a \cdot b$ 与向量积 $a \times b$, 二者源于完全不同的物理问题. 本节给出这两种乘积的定义, 然后给出若干运算性质, 并用以得出计算 $a \cdot b$ 与 $a \times b$ 的坐标公式. 下面以 $\langle a, b \rangle$ 记向量 a 与 b 之间的夹角, 约定 $0 \leq \langle a, b \rangle \leq \pi$. 若 $a = 0$ 或 $b = 0$, 则可认为 $\langle a, b \rangle$ 是任意的.

8.3.1 数量积

力学中有如下熟知结论: 若物体在常力 F 作用下由点 A 移动至点 B , 则力 F 所作的功 W 为:

$$W = |F| |\overrightarrow{AB}| \cos \langle F, \overrightarrow{AB} \rangle. \quad (1)$$

类似于(1)的算式还出现于许多其他科学问题中, 因此抽象如下一般概念.

定义1 任给向量 a, b , 称 $|a| |b| \cos \langle a, b \rangle$ 为向量 a 与 b 的数量积(亦称内积或点积), 记作 $a \cdot b$, 即

$$a \cdot b = |a| |b| \cos \langle a, b \rangle \quad (2)$$

利用定义1, 现在可将式(1)缩写成 $W = F \cdot \overrightarrow{AB}$.

利用定义式(2), 不难验证数量积有以下性质:

(i) 交换律: $a \cdot b = b \cdot a$.

(ii) 结合律: $\lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b)$.

(iii) 分配律: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

(iv) $a^2 = |a|^2$ (通常记 $a^2 = a \cdot a$).

(v) $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a \perp b$, 即 a 与 b 垂直(约定零矢量与任何矢量垂

直).