



# 学习计划

总主编 刘增利

配全日制普通高级中学教科书

高二数学 ①

北京教育出版社  
BEIJING EDUCATION PUBLISHING HOUSE



北京万向思维®



个性化计划 个性化成功

成功公式: 计划+方法+习惯+悟性=成功

计划学习·知识细品·题例推敲·方法总结

CHENG GONG

成功

200000000 学子的助力器

# 学习计划

## 高二数学(上)

总主编: 刘增利

学科主编: 杨 斌

本册主编: 卢永平

作 者: 卢永平

聂欢欢

朱永宏 万 敢

李小玲

 北京万向思维<sup>®</sup>

 北京教育出版社  
BEIJING EDUCATION PUBLISHING HOUSE

# 北京万向思维幸运之星奖学金评选活动

**参加办法** 凡购买北京万向思维任意产品,填写下面的“幸运之星奖学金申请表”,或者编辑短信提供建议,并于2006年11月30日之前将申请表送给我们(北京市海淀区王庄路1号清华同方科技广场8座11层,北京万向思维国际教育科技中心抽奖活动办公室,邮编100083),就有机会获得万向思维幸运之星奖学金。

**抽奖时间** 第一次:2006年12月10日 第二次:2007年6月10日

**奖项设置** 每次均抽出以下奖项(各奖项中均含13名幸运抽奖名额):

一等奖1名,奖学金5000元

二等奖10名,奖学金1000元

三等奖100名,奖学金100元

鼓励奖1000名,各赠送图书价值10元的学习参考资料

一、二、三等奖奖金均为税前,个人所得税由北京万向思维国际教育科技中心代扣代缴。

以上获奖者还将有幸成为万向思维幸运之星,参加全国性、地方性宣传推广活动。

**中奖概率** 0.12%

**抽奖结果** 中奖名单分别于2006年12月31日和2007年6月30日在万向思维学习网上公布,届时我们将以电话或信件方式通知本人并以邮寄的方式将奖金及奖品,敬请关注。

**开奖地点** 北京市海淀区王庄路1号清华同方科技广场8座1108室。

详情请登陆 [www.wxtw.com](http://www.wxtw.com)

本次抽奖活动的最终解释权归北京万向思维国际教育科技中心。

本次抽奖活动经北京市海淀区公证处公证。

## 幸运之星奖学金申请表

|                |                                                                                                                       |  |    |        |  |      |  |
|----------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|----|--------|--|------|--|
| 姓名             |                                                                                                                       |  | 学校 |        |  | 性别   |  |
| 通信地址           |                                                                                                                       |  |    | 邮编     |  | 家庭电话 |  |
| 本人电话           |                                                                                                                       |  |    | E-mail |  |      |  |
| 购买方式           | 书店购买 <input type="checkbox"/> 学校订购 <input type="checkbox"/> 网上购买 <input type="checkbox"/> 邮购 <input type="checkbox"/> |  |    |        |  |      |  |
| 购书书店           |                                                                                                                       |  |    |        |  | 联系电话 |  |
| 请粘贴买过万向思维产品时附书 |                                                                                                                       |  |    |        |  |      |  |

## 成功学习计划 高二数学(上)

|      |                     |      |                             |
|------|---------------------|------|-----------------------------|
| 策划设计 | 北京万向思维基础教育教研中心数学教研组 | 出版发行 | 北京教育出版社                     |
| 总主编  | 刘增利                 | 印 刷  | 陕西思维印务有限公司                  |
| 学科主编 | 杨 斌                 | 经 销  | 各地书店                        |
| 本册主编 | 卢永平                 | 开 本  | 890×1240 1/32               |
| 责任编辑 | 周 华 安 明             | 印 张  | 13.5                        |
| 责任校对 | 葛欢欢                 | 字 数  | 378千字                       |
| 责任校对 | 阮 晋 乔利勋 彭凤祥 陈桂荣     | 版 次  | 2006年4月第1版                  |
| 封面设计 | 阮 晋                 | 印 次  | 2006年4月第1次印刷                |
| 版式设计 | 董奇娟                 | 书 号  | ISBN 7-5303-8006-X/J·G·5015 |
|      |                     | 定 价  | 17.80元                      |

版权所有 翻印必究 本书如有装订质量问题,请与发行部门联系。



## 第六章 不等式

本章综合评价 ..... (1)

本章学习计划表 ..... (1)

### 6.1 不等式的性质

细品书中知识 ..... (2)

归纳解题方法 ..... (4)

多角度推敲试题 ..... (7)

知识规律总结 ..... (10)

题海轻舟 ..... (11)

题海轻舟参考答案 ..... (13)

教材课后习题解答 ..... (16)

### 6.2 算术平均数与几何平均数

细品书中知识 ..... (18)

归纳解题方法 ..... (21)

多角度推敲试题 ..... (23)

知识规律总结 ..... (28)

题海轻舟 ..... (28)

题海轻舟参考答案 ..... (30)

教材课后习题解答 ..... (34)

### 6.3 不等式的证明

细品书中知识 ..... (36)

归纳解题方法 ..... (40)

多角度推敲试题 ..... (42)

知识规律总结 ..... (46)

题海轻舟 ..... (46)

题海轻舟参考答案 ..... (48)

教材课后习题解答 ..... (52)

### 6.4 不等式的解法举例

细品书中知识 ..... (54)

归纳解题方法 ..... (60)

多角度推敲试题 ..... (62)

知识规律总结 ..... (65)

题海轻舟 ..... (66)

题海轻舟参考答案 ..... (68)

教材课后习题解答 ..... (73)

### 6.5 含有绝对值的不等式

细品书中知识 ..... (74)

归纳解题方法 ..... (77)

多角度推敲试题 ..... (79)

知识规律总结 ..... (81)

题海轻舟 ..... (81)

题海轻舟参考答案 ..... (83)

教材课后习题解答 ..... (87)

全程计划 ..... (88)

互动立体思维 ..... (88)



# 目录

CHENGGONGXUEXIJIHUA

|              |      |                  |       |
|--------------|------|------------------|-------|
| 错题笔记 .....   | (88) | 全章综合测试参考答案 ..... | (99)  |
| 高考分析 .....   | (91) | 教材课后习题解答 .....   | (103) |
| 全章综合测试 ..... | (97) |                  |       |

## 第七章 直线和圆的方程

|               |       |
|---------------|-------|
| 本章综合评价 .....  | (107) |
| 本章学习计划表 ..... | (107) |

### 7.1 直线的倾斜角和斜率

|                |       |
|----------------|-------|
| 细品书中知识 .....   | (108) |
| 归纳解题方法 .....   | (111) |
| 多角度推敲试题 .....  | (113) |
| 知识规律总结 .....   | (117) |
| 题海轻舟 .....     | (118) |
| 题海轻舟参考答案 ..... | (119) |
| 教材课后习题解答 ..... | (121) |

### 7.2 直线的方程

|                |       |
|----------------|-------|
| 细品书中知识 .....   | (123) |
| 归纳解题方法 .....   | (127) |
| 多角度推敲试题 .....  | (129) |
| 知识规律总结 .....   | (134) |
| 题海轻舟 .....     | (134) |
| 题海轻舟参考答案 ..... | (136) |
| 教材课后习题解答 ..... | (140) |

### 7.3 两条直线的位置关系

|                |       |
|----------------|-------|
| 细品书中知识 .....   | (143) |
| 归纳解题方法 .....   | (148) |
| 多角度推敲试题 .....  | (151) |
| 知识规律总结 .....   | (155) |
| 题海轻舟 .....     | (156) |
| 题海轻舟参考答案 ..... | (158) |
| 教材课后习题解答 ..... | (161) |

### 7.4 简单的线性规划

|                |       |
|----------------|-------|
| 细品书中知识 .....   | (166) |
| 归纳解题方法 .....   | (171) |
| 多角度推敲试题 .....  | (173) |
| 知识规律总结 .....   | (177) |
| 题海轻舟 .....     | (178) |
| 题海轻舟参考答案 ..... | (180) |
| 教材课后习题解答 ..... | (185) |

### 7.5 曲线和方程

|              |       |
|--------------|-------|
| 细品书中知识 ..... | (188) |
|--------------|-------|



|                 |       |                   |       |
|-----------------|-------|-------------------|-------|
| 归纳解题方法 .....    | (191) | 知识规律总结 .....      | (218) |
| 多角度推敲试题 .....   | (195) | 题海轻舟 .....        | (219) |
| 知识规律总结 .....    | (198) | 题海轻舟参考答案 .....    | (221) |
| 题海轻舟 .....      | (198) | 教材课后习题解答 .....    | (226) |
| 题海轻舟参考答案 .....  | (200) | <b>全程计划</b> ..... | (229) |
| 教材课后习题解答 .....  | (204) | 互动立体思维 .....      | (229) |
| <b>7.6 圆的方程</b> |       | 错题笔记 .....        | (230) |
|                 |       | 高考分析 .....        | (233) |
| 细品书中知识 .....    | (206) | 全章综合测试 .....      | (242) |
| 归纳解题方法 .....    | (212) | 全章综合测试参考答案 .....  | (244) |
| 多角度推敲试题 .....   | (215) | 教材课后习题解答 .....    | (250) |

## 第八章 圆锥曲线方程

|                     |       |                      |       |
|---------------------|-------|----------------------|-------|
| 本章综合评价 .....        | (254) | 教材课后习题解答 .....       | (272) |
| 本章学习计划表 .....       | (254) | <b>8.2 椭圆的简单几何性质</b> |       |
| <b>8.1 椭圆及其标准方程</b> |       |                      |       |
|                     |       | 细品书中知识 .....         | (273) |
| 细品书中知识 .....        | (255) | 归纳解题方法 .....         | (277) |
| 归纳解题方法 .....        | (258) | 多角度推敲试题 .....        | (280) |
| 多角度推敲试题 .....       | (262) | 知识规律总结 .....         | (285) |
| 知识规律总结 .....        | (265) | 题海轻舟 .....           | (285) |
| 题海轻舟 .....          | (266) | 题海轻舟参考答案 .....       | (288) |
| 题海轻舟参考答案 .....      | (268) | 教材课后习题解答 .....       | (293) |



### 8.3 双曲线及其标准方程

---

|                |       |
|----------------|-------|
| 细品书中知识 .....   | (295) |
| 归纳解题方法 .....   | (299) |
| 多角度推敲试题 .....  | (302) |
| 知识规律总结 .....   | (307) |
| 题海轻舟 .....     | (307) |
| 题海轻舟参考答案 ..... | (310) |
| 教材课后习题解答 ..... | (314) |

### 8.4 双曲线的简单几何性质

---

|                |       |
|----------------|-------|
| 细品书中知识 .....   | (315) |
| 归纳解题方法 .....   | (320) |
| 多角度推敲试题 .....  | (323) |
| 知识规律总结 .....   | (327) |
| 题海轻舟 .....     | (328) |
| 题海轻舟参考答案 ..... | (330) |
| 教材课后习题解答 ..... | (334) |

### 8.5 抛物线及其标准方程

---

|               |       |
|---------------|-------|
| 细品书中知识 .....  | (336) |
| 归纳解题方法 .....  | (341) |
| 多角度推敲试题 ..... | (342) |
| 知识规律总结 .....  | (346) |

|                |       |
|----------------|-------|
| 题海轻舟 .....     | (346) |
| 题海轻舟参考答案 ..... | (348) |
| 教材课后习题解答 ..... | (352) |

### 8.6 抛物线的简单几何性质

---

|                  |       |
|------------------|-------|
| 细品书中知识 .....     | (354) |
| 归纳解题方法 .....     | (357) |
| 多角度推敲试题 .....    | (360) |
| 知识规律总结 .....     | (365) |
| 题海轻舟 .....       | (366) |
| 题海轻舟参考答案 .....   | (368) |
| 教材课后习题解答 .....   | (373) |
| 全程计划 .....       | (375) |
| 互动立体思维 .....     | (375) |
| 错题笔记 .....       | (376) |
| 高考分析 .....       | (379) |
| 全章综合测试 .....     | (390) |
| 全章综合测试参考答案 ..... | (393) |
| 教材课后习题解答 .....   | (397) |

|                |       |
|----------------|-------|
| 期中测试题 .....    | (400) |
| 期中测试参考答案 ..... | (402) |
| 期末测试题 .....    | (408) |
| 期末测试参考答案 ..... | (411) |

## 第六章 不等式

## 克劳修斯不等式

(Clausius Inequality)

$$\Delta S_{\text{总}} = \Delta S_{\text{系}} + \frac{\Delta Q}{T} \geq 0$$

熵永不减少

$$\Delta S_{\text{总}} = \Delta S_{\text{系}} + \frac{\Delta Q}{T} = 0$$

Rudolph Clausius (1822–1888)  
德国物理学家，提出上面的不等式

时间是常数  
又是变数  
对勤奋者而言  
用“分秒”来计算  
更多的人  
用“小时”来计算  
他比他们  
多59倍的时间

## 本章综合评价

在初中已有的实数大小关系与简单不等式知识基础上,本章将对不等式的性质、不等式的几个重要公式及不等式的证明、不等式的求解等方面作进一步学习与探究,在学习过程中进一步培养化归、数形结合、分类讨论等重要思想方法,并能综合不等式与其他章节知识,解决一些综合性问题.不等式研究的是数的不等量关系,属于基础性章节,它对以后进一步学习代数知识将有较重要影响.

## 本章学习计划表

| 章节  | 指数   |      |        |        |        |        | 状元建议                            |  |
|-----|------|------|--------|--------|--------|--------|---------------------------------|--|
|     | 重要指数 | 难度指数 | 课后温习   | 练习反思   | 适时巩固   | 复习提高   | 温习关键点                           |  |
| 6.1 | ☆☆☆☆ | ☆☆☆  | 25 min | 20 min | 20 min | 25 min | 作差比较法,不等式的性质定理(五定理三推论),不等式性质的应用 |  |
| 6.2 | ☆☆☆  | ☆☆   | 30 min | 25 min | 25 min | 30 min | 均值定理,应用基本不等式时注意“一正二定三相等”        |  |
| 6.3 | ☆☆☆☆ | ☆☆☆☆ | 40 min | 35 min | 30 min | 35 min | 常用证明方法有:比较法、综合法、分析法等            |  |
| 6.4 | ☆☆☆☆ | ☆☆☆☆ | 40 min | 40 min | 35 min | 35 min | 一元、二元不等式,分式、高次及其他不等式求解          |  |
| 6.5 | ☆☆☆  | ☆☆☆☆ | 25 min | 20 min | 20 min | 25 min | 含绝对值的不等式性质定理公式及推论               |  |



## 6.1 不等式的性质

预习自测要点

※两个实数的大小比较及作差法

※不等式性质中的“五定理三推论”

状元心得笔记

※作差比较法比较两个数(式)大小时,一般将作差的结果通过因式分解等方法来判断符号

※证明定理时,要用更“原始的”性质定理进行证明

※不等式性质中,同向不等式相加,不等号方向不变,但同向不等式相乘,不等号方向可能会改变,要使它方向也不变,不等式需满足“同向且同正”

绽放的思维之花——思维导图



**【细品书中知识】** 关键词:作差比较法 “五定理三推论”

### 001-1 作差比较法

由实数三歧性即有序性

$$\begin{cases} a > b \Leftrightarrow a - b > 0; \\ a = b \Leftrightarrow a - b = 0; \\ a < b \Leftrightarrow a - b < 0. \end{cases}$$

可得,要比较两个实数的大小,只要考察它们的差与零的大小关系就可以了,即判断它们的差的符号。

**【教材点引申】** (1)用作差比较法不仅能比较两个实数的大小,还可以比较两个代数式的大小。

(2)用作差比较法比较两个数(式)的大小,关键在于判断它们差的符号,基本步骤是①作差;②变形;③判断符号。而变形的常见方法为因式分解、配方、分子(母)有理化等。

### ► 作差比较法

**例1** 比较  $M = (x^2 + 1)^2$  与  $N = x^4 + x^2 + 1$  的大小。

**分析:** 要比较两个代数式的大小,实际上是比较它们的值的大小,而这又可转为判断它们的差的符号。

**解:**  $\because M - N = (x^2 + 1)^2 - (x^4 + x^2 + 1) = x^4 + 2x^2 + 1 - x^4 - x^2 - 1 = x^2 \geq 0$  (当且仅当  $x = 0$  时取“=”号)。

$\therefore$  当  $x = 0$  时,  $M = N$ ; 当  $x \neq 0$  时,  $M > N$ 。

**反思:** 代数式中的字母的取值范围是实数集的,可以省略不写,在

## 扫雷专区

误解:比较两个数(式)的大小,将两个数(式)作差后,就在此结果上进行判断,得出符号.

辨析:用作差比较法比较两个数(式)的大小,在将两个数(式)作差后,有时可以直接判断结果的符号,但多数情况往往需要将作差所得结果进行适当变形,如因式分解、配方、分子(母)有理化等,然后再进行符号判断.若作差所得结果中有字母,有时还需要进行适当的分类讨论.

## 002-2 “五定理三推论”

利用比较实数大小的方法,可以推出下列不等式的性质.

**定理1** (不等式的对称性) 如果  $a > b$ , 那么  $b < a$ ; 如果  $b < a$ , 那么  $a > b$ .

**定理2** (不等式的传递性) 如果  $a > b$ , 且  $b > c$ , 那么  $a > c$ .

**定理3** (不等式的可加性) 如果  $a > b$ , 那么  $a + c > b + c$ .

**推论1** 如果  $a > b$ , 且  $c > d$ , 那么  $a + c > b + d$ .

**定理4** 如果  $a > b$ , 且  $c > 0$ , 那么  $ac > bc$ ; 如果  $a > b$ , 且  $c < 0$ , 那么  $ac < bc$ .

**推论2** 如果  $a > b > 0$ , 且  $c > d > 0$ , 那么  $ac > bd$ .

**推论3** 如果  $a > b > 0$ , 那么  $a^n > b^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ , 且  $n > 1$ ).

**定理5** 如果  $a > b > 0$ , 那么  $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$  ( $n \in \mathbb{N}$ , 且  $n > 1$ ).

**教材索引** (1) 定理1、定理2、定理3

及推论1 都是对一切实数都成立.

(2) 定理3 也是不等式变形移项的依据, 推论1 可推广到任意有限个同向不等式的两边分别相加, 所得不等式与原不等式同向.

(3) 定理4 说明了不等式两边同乘一个

不等式

用作差比较法比较两个数(式)的大小时, 得到的结果是大于等于(小于等于)时, 应指出等号何时成立.

**例2** 已知  $a > 1, b > 1, c > 1$ , 比较  $abc + a + b + c$  与  $ab + bc + ac + 1$  的大小.

**分析:** 先作差, 再因式分解, 然后利用所得结果判断符号, 从而得出结果.

**解:**  $abc + a + b + c - (ab + bc + ac + 1) = (abc - ab) + (a - ac) + (b - bc) + (c - 1) = ab(c - 1) + a(1 - c) + b(1 - c) + (c - 1) = (c - 1)(ab - a - b + 1) = (c - 1) \cdot [(ab - a) - (b - 1)] = (c - 1) \cdot (b - 1)(a - 1).$

$\because a > 1, b > 1, c > 1, \therefore c - 1 > 0, b - 1 > 0, a - 1 > 0. \therefore (c - 1) \cdot (b - 1)(a - 1) > 0. \therefore abc + a + b + c > ab + bc + ac + 1.$

**反思:** 变形是作差法比较的关键, 配方、因式分解是常用变形手段. 为了便于判断“差式”的符号, 常将“差式”变形为几个因式积的形式, 或分离成若干个易判定符号的几部分的代数和. 本题中所用的变形是因式分解.

## “五定理三推论”

**例3** 已知  $a > b > 0, d > c > 0$ .

求证:  $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$ .



数时,所得不等式可能与原不等式同向,也可能与原不等式反向,甚至会变成等式(当 $c=0$ 时).

(4)定理4、定理5及推论2、推论3在应用时,需注意符号限制;推论3与定理5条件相同,结论也相似,可以整合起来记忆为:当 $s$ 为正有理数时,如果 $a>b>0$ ,那么 $a^s>b^s$ .

(5)由这些不等式的基本性质,还可以引申出下列较常见的不等式性质:

减法法则: $a>b, c>d \Rightarrow a-d>b-c$ ;

除法法则: $a>b>0, d>e>0 \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{d}$ ;

倒数法则: $a>b, ab>0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ .

## 扫描专区

误解:(1)同向不等式都可以进行加、乘法计算;

(2)同向不等式也可以进行减法计算.

辨析:在不等式性质中,同向不等式进行相加计算,不等号方向不变;

当两个同向不等式两边全是正时,它们相乘后,不等式方向不变;

同向不等式不能进行减法计算.

分析:不等式的证明可用作差比较法来证,也可以用不等式的性质来证,还可二者结合起来.

证法一:(作差法)  $\frac{a}{c} - \frac{b}{d}$   

$$= \frac{ad-bc}{cd}$$

$\because a>b>0, d>e>0$ .

$\therefore ad>be$ (根据推论2).

$\therefore ad-bc>0$ .

又 $cd>0$ ,  $\therefore \frac{ad-bc}{cd} > 0$ .

$\therefore \frac{a}{c} > \frac{b}{d}$ .

证法二: $\because d>e>0$ ,两边同乘正数 $\frac{1}{cd}$ 得 $\frac{1}{c} > \frac{1}{d}$ ,即 $\frac{1}{d} < \frac{1}{c}$ .

又 $\because a>b>0$ ,  $\therefore \frac{a}{c} > \frac{b}{d}$ .

反思:要注意严格按照不等式性质定理及其推论给出证明,不能将一些简单结论作为论证依据.

## 归纳解题方法

关键词:作差比较法 分类讨论思想方法 特殊值法 利用不等式的性质进行证明

### 003-3 作差比较法

(1)知识准备

①实数三歧性.

②代数式的因式分解.

③配方、分式有理化.

④函数单调性.

(2)应用技巧

一般步骤是:

例4 求证: $a^2+b^2 \geq ab+a+b-1$ .

分析:证明不等式成立,可看成比较不等式两边的大小,所以可用作差比较法进行证明.

证明: $a^2+b^2-(ab+a+b-1)$

$$= \frac{1}{2}[(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)]$$

$$= \frac{1}{2}[(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2],$$

$$\therefore (a-b)^2 \geq 0, (a-1)^2 \geq 0, (b-1)^2 \geq 0,$$

①作差,有时要变形作差.

②变形,常采用因式分解或配方等手段.

③确定差的符号.符号的确定有时要根据题目所给的字母的范围,有时根据实数固有的正负特征,如 $m^2 \geq 0$ 等.上述步骤中,变形是关键.若采用因式分解法进行变形时,要分解彻底才便于符号的确定,解题时要详细说明符号的确定过程.

#### 004-4 分类讨论思想方法

##### (1) 知识准备

对代数式进行符号判断时,若不能直接判断结果,则应找到确定代数式符号的因素,并对其进行讨论.

##### (2) 应用技巧

①有需要时,才进行讨论,不盲目进行讨论.

②讨论时,找准讨论对象,讨论切入点.

③讨论要根据字母的范围进行,做到不重不漏.

#### 005-5 特殊值法

##### (1) 知识准备

①简易逻辑知识.

②数值的适当取值与运算.

$$\therefore \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2] \geq 0.$$

$\therefore a^2 + b^2 \geq ab + a + b - 1$ , 当且仅当  $a = b = 1$  时, 等号成立.

反思: 利用作差比较法证明不等式, 也需注意要将所得结果进行适当变形, 以便能确定符号.

**例5** 若  $x \neq a$ , 比较  $x^3 + 13a^2x$  与  $5ax^2 + 9a^3$  的大小 ( $a \neq 0$ ).

分析: 先作差, 再因式分解、配方, 然后判断符号.

$$\begin{aligned} \text{解: } & (x^3 + 13a^2x) - (5ax^2 + 9a^3) \\ &= (x^3 - a^3) - a(5x^2 - 13ax + 8a^2) \\ &= (x-a)(x^2 + ax + a^2) - a(x-a)(5x-8a) \\ &= (x-a)(x^2 - 4ax + 9a^2) \\ &= (x-a)[(x-2a)^2 + 5a^2]. \end{aligned}$$

$$\therefore a \neq 0, \therefore (x-2a)^2 + 5a^2 > 0.$$

又知  $x \neq a$ ,  $\therefore$  当  $x > a$  时,  $x^3 + 13a^2x > 5ax^2 + 9a^3$ ;

当  $x < a$  时,  $x^3 + 13a^2x < 5ax^2 + 9a^3$ .

反思: 用作差法比较大小时, 应将作差所得结果进行适当变形(因式分解、配方等), 若其中某个因式不能确定符号时, 需根据该因式取不同符号, 对相应字母取不同范围进行讨论, 才能得出正确结果.

**例6** 若  $a < b < 0$ , 则下列不等式中不能成立的是( ).

$$\text{A. } \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \quad \text{B. } \frac{1}{a-b} > \frac{1}{a} \quad \text{C. } |a| > |b| \quad \text{D. } a^2 > b^2$$

分析: 本题是判断“不能成立”的选项, 可以根据不等式的性质或作差法判断, 但这种方法对做客观题来说, 是“杀鸡用牛刀”, 且较费时. 可以考虑将特殊值代入, 直接判断出结果.

解: 令  $a = -2, b = -1$  代入各选项, 可得

$$\frac{1}{a-b} = -1, \frac{1}{a} = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{1}{a-b} < \frac{1}{a}. \therefore \text{B 选项不能成立, 故选 B.}$$



## (2) 应用技巧

①在对不等式的客观题判断时,要先对题干与题支仔细阅读,防止因看错题而“功亏一篑”。

②对题中字母取值时,要注意应符合题意。

③若取一次特殊值不能确定结果,可考虑取两次或两次以上,结合简易逻辑知识进行取舍判断,最终确定结果。

## 006-6 利用不等式的性质进行证明

### (1) 知识准备

①不等式的基本性质定理与推论。

②不等式证明的一般思路与解题规范常识。

### (2) 应用技巧

①审题要清:仔细审题,尤其需看清题中限制条件,防止因审错题而“失之毫厘,谬以千里”。

②落点要准:在证明之前,多将题目条件与结论以及不等式的性质定理之间进行横向、纵向的对比与联系,找准着眼点,再进行证明。

③表达要规范、准确:找到思路后,要对表达过程进行一个统筹,使得整个过程思路明确、依据准确、层次分明、详略得当。

反思:特殊值代入法在解决客观题中不等式的判断时往往比较简单、有效,灵活应用,可大大提高解题速度与效率。在运用时,取特殊值一定要在条件范围内取值,若取一次特殊值不能确定结果,可考虑取两次或两次以上,达到最终确定结果的目的。但在解答题中,特殊值法要慎用。



**例7** 已知  $a > b > 0, c < d < 0, e < 0$ , 求证:  $\frac{e}{a-c} > \frac{e}{b-d}$ 。

分析:不等式的证明可用作差法证明,也可以从不等式的基本性质定理与条件出发,对不等式进行证明。

$$\text{证法一: } \frac{e}{a-c} - \frac{e}{b-d} = \frac{e[(b-d)-(a-c)]}{(a-c)(b-d)} = \frac{e[(b-a)+(c-d)]}{(a-c)(b-d)}.$$

$$\because a > b > 0, c < d < 0,$$

$$\therefore a-c > 0, b-d > 0, b-a < 0, c-d < 0.$$

$$\because e < 0, \therefore \frac{e[(b-a)+(c-d)]}{(a-c)(b-d)} > 0. \therefore \frac{e}{a-c} > \frac{e}{b-d}.$$

$$\text{证法二: } \because c < d < 0, \therefore -c > -d > 0.$$

$$\text{又 } \because a > b > 0, \therefore a-c > b-d > 0, \text{ 两边同乘}$$

$$\frac{1}{(a-c)(b-d)} \text{ 得 } 0 < \frac{1}{a-c} < \frac{1}{b-d}.$$

$$\because e < 0, \therefore \text{上式两边同乘 } e \text{ 得}$$

$$\frac{e}{a-c} > \frac{e}{b-d}, \text{ 不等式得证.}$$

反思:利用不等式的性质证明不等式,要注意应严格利用题中条件与性质定理、推论进行证明,不能随便引用一些简易结论作为论证依据,否则会造成论证不严谨,或成为“伪证”。

## 多角度推敲试题

## (一)紧扣教材试题研究

**例8** 下列命题是否正确？为什么？

(1) 若  $a > b$ , 则  $ac^2 > bc^2$ ;

(2) 若  $a > b, x \in \mathbf{R}$ , 则  $a\left(\frac{1}{2}\right)^x > b\left(\frac{1}{2}\right)^x$ .

◆**易错提示** 极易判断(1)正确,

注意  $c^2 \geq 0$ . 此命题的逆命题是正确的,  
 $ac^2 > bc^2$  隐含了  $c^2 > 0$  的条件.

◆**规律总结** 判断命题正确,需严格按照定理及其推论给出证明,判断命题不正确只需找到一个反例即可.

**分析:**可灵活应用不等式的性质定理进行判断,但要注意已知条件中的特殊值与隐含条件.

**解:**(1) 错误. 因为若  $c=0$ , 则  $ac^2=0, bc^2=0$ ,  $\therefore ac^2 = bc^2$ , 而不是  $ac^2 > bc^2$ ,  $\therefore$  命题不正确.

(2) 正确. 因为对一切  $x \in \mathbf{R}, \left(\frac{1}{2}\right)^x > 0$  恒成立, 由定理4, 可得命题正确.

**例9** 已知  $a, b$  为正数,  $n \in \mathbf{N}^+$ , 求证:  $\frac{b^{n-1}}{a^n} + \frac{a^{n-1}}{b^n} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ .

**分析:**不等式的证明,可考虑采用作差法进行证明.

$$\begin{aligned} \text{证明: } & \frac{b^{n-1}}{a^n} + \frac{a^{n-1}}{b^n} - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \\ &= \left(\frac{b^{n-1}}{a^n} - \frac{1}{a}\right) + \left(\frac{a^{n-1}}{b^n} - \frac{1}{b}\right) \\ &= \frac{b^{n-1} - a^{n-1}}{a^n} + \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{b^n} \\ &= \frac{(b^{n-1} - a^{n-1})(b^n - a^n)}{a^n b^n} \end{aligned}$$

$\because a, b$  为正数,  $n \in \mathbf{N}^+$ ,  $\therefore (b^{n-1} - a^{n-1})(b^n - a^n) \geq 0$ , 且  $a^n b^n > 0$ ,

$$\therefore \frac{(b^{n-1} - a^{n-1})(b^n - a^n)}{a^n b^n} \geq 0,$$

$$\text{即 } \frac{b^{n-1}}{a^n} + \frac{a^{n-1}}{b^n} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad (\text{当且仅当 } n$$

$=1$  时, 取“ $=$ ”).

◆**解题关键** 作差后变形时, 将作差所得结果通过一系列代数变形, 最终将所得作差结果进行因式分解, 并且能明确判断符号为止.

◆**易错提示** 利用作差比较法比较两个式子的大小, 作差后要所得结果进行适当的、彻底的变形, 一直到能最终判断出结果的符号为止, 不能只变形到中途就进行判断.

◆**规律总结** 对于分式间的比较大小问题, 一般是利用作差法, 将作差所得结果进行适当的因式分解, 使之能将每一个因式的符号判断出来.



**例 10** 设  $2 < x < 5$ ,  $4 < y < 10$ , 求

(1)  $3x - 2y$  的取值范围; (2)  $\frac{x}{y}$  的取值范围.

**分析:** 利用不等式的性质定理及推论, 进行计算求值.

**解:** (1)  $\because 2 < x < 5, \therefore 6 < 3x < 15$ . ①

又由  $4 < y < 10$ , 两边同乘  $-2$  得  
 $-20 < -2y < -8$ . ②

① + ②, 得  $-14 < 3x - 2y < 7$ .

(2)  $\because 4 < y < 10, \therefore \frac{1}{10} < \frac{1}{y} < \frac{1}{4}$ . ③

又  $\because 2 < x < 5$ , ④

$\therefore$  由 ③  $\times$  ④, 得  $\frac{1}{5} < \frac{x}{y} < \frac{5}{4}$ .

### (二) 综合拔高试题研究

**例 11** (1) 如果  $-2 < x < 1$ , 求  $x^2$  的取值范围;

(2) 如果  $2a < \frac{1}{x} < -a$ , 求  $x$  的取值范围.

**分析:** 本题可以采用不等式的性质求解, 也可以利用函数图象及性质求解.

**解法一:** (1) 当  $-2 < x < 0$  时, 可得  $0 < -x < 2$ , 利用不等式的性质定理 4 的第一个推论, 将两个  $0 < -x < 2$  相乘得  $0 < x^2 < 4$ ;

当  $x = 0$  时,  $x^2 = 0$ ; 当  $0 < x < 1$  时, 可得  $0 < x^2 < 1$ ,

$\therefore -2 < x < 1$  时,  $x^2$  的取值范围是  $\{0\} \cup (0, 1) \cup (0, 4)$ , 即  $x^2 \in [0, 4)$ .

(2)  $\because 2a < -a, \therefore a < 0$ .

当  $0 < \frac{1}{x} < -a$  时, 两边同乘  $x$  得

$$-ax > 1, \therefore x > -\frac{1}{a}.$$

**◆ 解题关键** 利用不等式的性质时, 同向不等式进行相加计算, 在特定条件下, 对同向不等式进行相乘计算.

**◆ 易错提示** 在不等式性质中, 只有同向不等式相加与相乘, 并没有相减与相除, 所以在运用不等式的性质进行不等式计算时, 要注意不能将一些“伪性质”当成真的性质.

**◆ 规律总结** 如果需对已知的不等式进行相“减”或“乘”计算, 往往不是一步完成的, 而是要将其分解成几个步骤.

**◆ 解题关键** 严格利用题中条件与性质定理, 对不等式进行加或乘的运算; 利用函数图象也可以比较直观地解出不等式.

**◆ 易错提示** 在运用不等式性质时, 每一步变形与变化步骤都应严格利用不等式的性质定理进行, 不要輕易地“跳步骤”.

**◆ 规律总结** 解题时, 如果考虑使用不等式的性质进行求解, 一般将式子化为能方便使用不等式的性质的形式. 如果考虑使用函数图象求解, 应找出其对应或者相关的函数, 并结合其图象, 使问题更形象与直观.

当  $2a < \frac{1}{x} < 0$  时, 两边同乘  $x$  得  $2ax > 1$ ,  $\therefore x < \frac{1}{2a}$ .

综上所述,  $x$  的取值范围是  $\left(-\infty, \frac{1}{2a}\right) \cup \left(-\frac{1}{a}, +\infty\right)$ .

解法二: (1) 利用函数  $y = x^2$  的图象 (如图 6-1-1).

在该图象上可看出当  $x$  的范围为  $-2 < x < 1$  时,  $x^2$  的取值范围是  $[0, 4)$ .

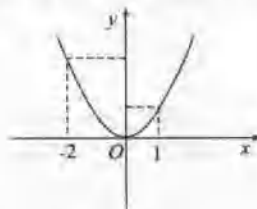


图 6-1-1

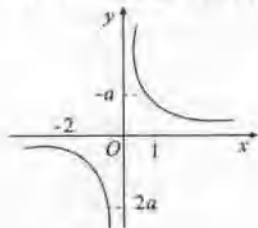


图 6-1-2

(2) 作出函数  $y = \frac{1}{x}$  (如图 6-1-2).

$\therefore$  根据函数  $y = \frac{1}{x}$  的图象,  $\frac{1}{x} = 2a$  时,  $x = \frac{1}{2a}$ ;  $\frac{1}{x} = -a$  时,  $x = -\frac{1}{a}$ .

$\therefore$  结合其单调性可得  $x$  的取值范围是  $\left(-\infty, \frac{1}{2a}\right) \cup \left(-\frac{1}{a}, +\infty\right)$ .

**例 12** 设  $f(x)$  是不含常数项的二次函数, 且  $1 \leq f(-1) \leq 2$ ,  $2 \leq f(1) \leq 4$ , 求  $f(2)$  的取值范围.

**分析:** 本题可将二次函数表达式设出, 并根据条件列出不等式组, 再利用不等式的性质定理求解.

**解:** 设  $f(x) = ax^2 + bx$ ,

则  $f(-1) = a - b$ ,  $f(1) = a + b$ .

$$\therefore a = \frac{f(-1) + f(1)}{2},$$

$$b = \frac{f(1) - f(-1)}{2}.$$

$$\therefore f(2) = 4a + 2b = 3f(1) + f(-1).$$

$$\text{由 } 2 \leq f(1) \leq 4 \text{ 可得 } 6 \leq 3f(1) \leq 12.$$

$$\text{又 } 1 \leq f(-1) \leq 2, \therefore 7 \leq 3f(1) + f(-1) \leq 14.$$

$$\text{即 } 7 \leq f(2) \leq 14.$$

**命题关键** 在本题中, 把  $f(-1)$

与  $f(1)$  看成两个整体, 并用这两个整体通过方程组将  $f(2)$  表示出来, 从而求出  $f(2)$  的范围.

**命题提示** 本题不能利用

$f(-1) = a - b$ ,  $f(1) = a + b$  相加分别得到  $a, b$  的范围, 再求  $f(2)$  的取值范围, 因为这样得出的  $a, b$  的范围中,  $a, b$  的最大值与最小值不能同时取到.

**命题点拨** 在求解有关不等式

的这类问题中, 已知某些式子的范围, 求其他一些式子的范围, 要注意结合整体思想, 利用不等式性质求解, 且同向不等式在相加时, 还要注意两个不等式是否能同时成立.



## 知识规律总结

| 知识要点              | 关键总结                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 注意问题                                                                                                                                                                                   |
|-------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 实数三歧性与作差法比较大小     | $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$<br>$a = b \Leftrightarrow a - b = 0$<br>$a < b \Leftrightarrow a - b < 0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 用作差法比较时,一般要用以下三个步骤:①作差;②变形;③判断.其中以第二个步骤“变形”最为重要,常用变形方式有因式分解、配方等                                                                                                                        |
| 不等式的基本性质(五定理三推论)  | 定理1 如果 $a > b$ , 那么 $b < a$ ; 如果 $b < a$ , 那么 $a > b$ . 定理2 如果 $a > b$ , 且 $b > c$ , 那么 $a > c$ . 定理3 如果 $a > b$ , 那么 $a + c > b + c$ . 推论1 如果 $a > b$ , 且 $c > d$ , 那么 $a + c > b + d$ . 定理4 如果 $a > b$ , $c > 0$ , 那么 $ac > bc$ ; 如果 $a > b$ , $c < 0$ , 那么 $ac < bc$ . 推论2 如果 $a > b > 0$ 且 $c > d > 0$ , 那么 $ac > bd$ . 推论3 如果 $a > b > 0$ , 那么 $a^n > b^n$ ( $n \in \mathbf{N}$ , 且 $n > 1$ ). 定理5 如果 $a > b > 0$ , 那么 $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ ( $n \in \mathbf{N}$ , 且 $n > 1$ ) | ①定理1、定理2、定理3及推论1都是对一切实数都成立. ②定理3也是不等式变形移项的依据, 推论1可推广到任意有限个同向不等式的两边分别相加, 所得不等式与原不等式同向. ③定理4说明了不等式两边同乘以一个数时, 所得不等式可能与原不等式同向, 也可能与原不等式反向, 甚至会变成等式(当 $c=0$ 时). ④定理4、定理5及推论2、3在应用时, 需注意符号限制 |
| 解题方法              | 关键总结                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 链接例题                                                                                                                                                                                   |
| 作差比较法             | 三个步骤:①作差②变形③判断                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 例1、例2、例3、例4、例5、例7、例9                                                                                                                                                                   |
| 分类讨论思想方法          | 有需要时, 才进行讨论, 不盲目进行讨论; ②讨论时, 找准讨论对象; ③讨论要根据字母的范围进行, 做到不重不漏                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 例5                                                                                                                                                                                     |
| 特殊值法              | 取特殊值一定要在条件范围内取值, 若取一次特殊值不能确定结果, 可考虑取两次或两次以上                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 例6                                                                                                                                                                                     |
| 利用不等式的性质进行解题的一般方法 | 熟练掌握不等式的性质                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 例3、例8、例10、例11、例12                                                                                                                                                                      |