北京大学数学教学系列丛书

研究生
数学基础课教材

黎曼几何引论

下册

陈维桓　李兴校　编著

北京大学出版社

北京大学数学教学系列丛书

黎曼几何引论

（下　册）

陈维桓　李兴校　编著

北京大学出版社

·北　　京·

图书在版编目(CIP)数据

黎曼几何引论(下册)/陈维桓,李兴校编著.—北京:北京大学出版社,2004.1

(北京大学数学教学系列丛书)

ISBN 7-301-06794-1

Ⅰ.黎… Ⅱ.①陈… ②李… Ⅲ.黎曼几何-研究-研究生-教材
Ⅳ.O186.12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 118519 号

书　　名:黎曼几何引论(下册)
著作责任者:陈维桓　李兴校　编著
责 任 编 辑:邱淑清
标 准 书 号:ISBN 7-301-06794-1/O·0582
出 版 发 行:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区中关村 北京大学校内　100871
网　　址:http://cbs.pku.edu.cn
电　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752021
电 子 信 箱:zpup@pup.pku.edu.cn
排　版　者:北京大学印刷厂
印　刷　者:北京大学印刷厂
经　销　者:新华书店
890 毫米×1240 毫米　A5　11.25 印张　300 千字
2004 年 1 月第 1 版　2004 年 1 月第 1 次印刷
印　　数:0001—3000 册
定　　价:18.00 元

内容简介

《黎曼几何引论》分上、下两册出版，本书为下册，可以作为“黎曼几何”课程的后续课“黎曼几何 II”的教材。当前，微分几何与数学的各个分支的相互影响越来越深刻、关系越来越密切。本书较好地反映了这种紧密的联系，其内容共有三章，包括 Kähler 流形、黎曼对称空间及主纤维丛上的联络。每章末都附有大量的习题，书末并附有习题解答和提示，便于读者深入学习和自学。

本书的选材和叙述都有它独到之处，与现有的数学文献相比颇具特色，可作为综合大学、师范院校数学系、物理系等相关专业研究生课程或研究生讨论班的教材或参考书，也可供从事微分几何、调和分析，以及数学物理等专门方向的研究人员参考。

作者简介

陈维桓　北京大学数学科学学院教授，博士生导师。1964 年毕业于北京大学数学力学系，后师从吴光磊先生读研究生。长期从事微分几何方向的研究工作和教学工作，开设的课程有“微分几何”、“微分流形”、“黎曼几何引论”和“纤维丛的微分几何”等。已出版的著作有：《微分几何讲义》(与陈省身合著)，《黎曼几何选讲》(与伍鸿熙合著)，《微分几何初步》，《微分流形初步》和《极小曲面》等。

李兴校　河南师范大学数学系教授，1994 年在四川大学获得博士学位，主要研究方向是子流形微分几何。

序　言

自1995年以来，在姜伯驹院士的主持下，北京大学数学科学学院根据国际数学发展的要求和北京大学数学教育的实际，创造性地贯彻教育部“加强基础，淡化专业，因材施教，分流培养”的办学方针，全面发挥我院学科门类齐全和师资力量雄厚的综合优势，在培养模式的转变、教学计划的修订、教学内容与方法的革新，以及教材建设等方面进行了全方位、大力度的改革，取得了显著的成效。2001年，北京大学数学科学学院的这项改革成果荣获全国教学成果特等奖，在国内外产生很大反响。

在本科教育改革方面，我们按照加强基础、淡化专业的要求，对教学各主要环节进行了调整，使数学科学学院的全体学生在数学分析、高等代数、几何学、计算机等主干基础课程上，接受学时充分、强度足够的严格训练；在对学生分流培养阶段，我们在课程内容上坚决贯彻“少而精”的原则，大力压缩后续课程中多年逐步形成的过窄、过深和过繁的教学内容，为新的培养方向、实践性教学环节，以及为培养学生的创新能力所进行的基础科研训练争取到了必要的学时和空间。这样既使学生打下宽广、坚实的基础，又充分照顾到每个人的不同特长、爱好和发展取向。与上述改革相适应，积极而慎重地进行教学计划的修订，适当压缩常微、复变、偏微、实变、微分几何、抽象代数、泛函分析等后续课程的周学时。并增加了数学模型和计算机的相关课程，使学生有更大的选课余地。

在研究生教育中，在注重专题课程的同时，我们制定了30多门研究生普选基础课程（其中数学系18门），重点拓宽学生的专业基础和加强学生对数学整体发展及最新进展的了解。

教材建设是教学成果的一个重要体现。与修订的教学计划相

配合，我们进行了有组织的教材建设。计划自1999年起用8年的时间修订、编写和出版40余种教材。这就是将陆续呈现在大家面前的《北京大学数学教学系列丛书》。这套丛书凝聚了我们近十年在人才培养方面的思考，记录了我们教学实践的足迹，体现了我们教学改革的成果，反映了我们对新世纪人才培养的理念，代表了我们新时期的数学教学水平。

经过20世纪的空前发展，数学的基本理论更加深入和完善，而计算机技术的发展使得数学的应用更加直接和广泛，而且活跃于生产第一线，促进着技术和经济的发展，所有这些都正在改变着人们对数学的传统认识。同时也促使数学研究的方式发生巨大变化。作为整个科学技术基础的数学，正突破传统的范围而向人类一切知识领域渗透。作为一种文化，数学科学已成为推动人类文明进化、知识创新的重要因素，将更深刻地改变着客观现实的面貌和人们对世界的认识。数学素质已成为今天培养高层次创新人才的重要基础。数学的理论和应用的巨大发展必然引起数学教育的深刻变革。我们现在的改革还是初步的。教学改革无禁区，但要十分稳重和积极；人才培养无止境，既要遵循基本规律，更要不断创新。我们现在推出这套丛书，目的是向大家学习。让我们大家携起手来，为提高中国数学教育水平和建设世界一流数学强国而共同努力。

张 继 平

2002年5月18日

于北京大学蓝旗营

前　　言

《黎曼几何引论》上、下两册的分工是：上册作为基础数学专业研究生课程“黎曼几何引论”的教材，其主要内容应该、而且能够在周学时为 3 、或 4 的一学期课程中讲完，重点是黎曼几何的基本概念和基本理论，以及大范围黎曼几何的主要结果和变分方法的运用；下册可以作为后续课程“黎曼几何 II ”的教材，或讨论班的学习材料. 当前，微分几何与数学的各个分支的相互影响越来越深刻、关系越来越密切，本书的下册则体现了这种紧密的联系. 例如， Kähler 流形是复流形几何以及代数几何的主要角色，在本书我们从微分几何的角度论述了 Kähler 流形上的各种结构的相容性及其几何意义. 黎曼对称空间是一类特殊的黎曼流形，有相当丰富的对称性质，与李群和李代数有密切的联系，它是微分几何的重要研究对象，也是调和分析等的演绎舞台. 微分几何在数学各个分支中的主要应用是，它提供了一种对于光滑切向量场进行微分的结构，所以联络是微分几何的核心内容. 本书的第十章从平行移动的角度阐述了主丛上的联络的由来及其几何意义. 一个约定俗成的准则是，一个数学命题是否属于微分几何的范畴，关键是看它是否涉及曲率的概念. 曲率是图形或某种空间结构通过微分手段获得的不变量，是微分几何中最基本的概念，是衡量空间的某种结构是否平凡的数量特征. 本书各章都要讲到各种结构的曲率及其几何意义为止.

翻阅本书不难发现，本书的选材和叙述与现有的数学文献相比较都有它的独到之处. 本书是作者在北京大学学习微分几何和长期从事微分几何教学和研究的经验总结. 在这里，我们特别怀念吴光磊教授，因为本书的有些讲法出自吴先生在讨论班上的演讲. 例如，复向量空间的对偶空间，向量丛上联络所诱导的水平分布等等都是吴先生在讨论班上曾经讲过的内容，凝集了他的学习心得. 而且，他经常要求我们用最简洁的语言把概念清晰地表达出来. 我们在本书所追求的目标

之一就是把概念的由来和意义讲清楚，而不满足于它们的形式表述. 数学的概念不只是术语和公式的堆砌，它们都有发生、发展和推广的过程. 我们试图努力反映这种发展的过程. 例如，第十章的 (2.18) 式定义的标架丛上的联络形式 θ 是主丛上的联络形式的特殊情形，我们还进一步指出：实际上它是向量丛 E 上的活动标架的相对分量. 在这样理解的基础上，我们才能体会到抽象概念的丰富、生动的内涵，而不只是一堆枯燥的公式. 当然，本书只提供了 Kähler 流形、黎曼对称空间、主纤维丛上的联络的基础理论，并不是直接从事这些课题的前沿研究，但是它们为有关课题的前沿研究提供了坚实的基础，我们相信这些内容对于从事微分几何、非线性分析、调和分析和数学物理研究的工作者是十分有用的.

和上册一样, 李兴校教授参与了本书的写作, 特别是本书的习题、答案和提示以及 §10.6 是由他执笔的. 本书的写作得到国家自然科学基金 (项目批准号 NSFC 10271004) 的资助，我们对此表示衷心的感谢. 作者对责任编辑邱淑清老师的卓有成效的辛勤工作表示感谢. 20 年多来，她为数学书籍的出版倾注了很多心血，严格、细致的工作作风有口皆碑. 借此机会向她表示崇高的敬意.

限于作者的水平，本书中的不足之处肯定是存在的，诚恳地希望读者能不吝指正.

陈维桓

2003 年 8 月于北京大学

下 册 目 录

上 册 要 目

第六章　弧长的第二变分公式

第七章　黎曼流形的子流形

第八章　Kähler 流形

在第二章到第四章，我们已经系统地介绍了黎曼几何的基本理论，特别是黎曼流形上的黎曼联络、测地线和黎曼曲率张量等等. 在当代数学的研究中，复流形的几何变得越来越重要了，特别是 Kähler 流形. 所谓的 Kähler 流形是一个具有在典型复结构的作用下不变的黎曼度量的复流形，同时它的典型复结构在相应的黎曼联络下又是平行的. 因此， Kähler 流形是一类特殊的黎曼流形，具有更加丰富的几何结构，从而具有更加丰富多彩的几何性质. 当然， Kähler 流形可以从代数几何的角度进行研究，而且它是代数几何的主角，但是从微分几何的角度来了解它的几何结构和特征是十分重要的，是研究 Kähler 流形的基础. 在本章主要介绍复流形、 Hermite 流形和 Kähler 流形在微分几何方面的基础理论，即介绍这些特殊黎曼流形上的各种联络和曲率.

§8.1　复向量空间

8.1.1　复结构

在研究复流形时需要和复向量空间打交道，因此我们首先讨论复向量空间. 从代数上看，复向量空间和实向量空间的定义是一样的，只需要把基域实数域改为复数域. 但是从几何上看有它的复杂性. 一个复向量空间同时也是一个实向量空间 (因为实数域是复数域的子域)，但是具有一个特定的几何结构，即所谓的复结构. 在考虑复向量空间及其作为有复结构的实向量空间的对偶向量空间时便会出现各种不同的情况. 本节着重讨论复向量空间和实向量空间之间的关系.

设 V 是一个复向量空间，即在 V 中有两种运算：加法以及与复数的乘法，它们满足条件：

(1) V 关于加法构成一个交换群;

(2) 对于任意的 $u, v \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ 有

$$1 \cdot u = u, \quad (\lambda\mu)u = \lambda(\mu u),$$
$$\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v, \quad (\lambda+\mu)u = \lambda u + \mu u.$$

若有 V 的一组元素 $\{e_1, \cdots, e_n\}$, 使得 V 的任意一个元素 v 都能够唯一地表示为它们的复系数线性组合, 即存在唯一的一组复数 $(v^1, \cdots, v^n)$, 使得

$$v = \sum_{i=1}^{n} v^i e_i, \tag{1.1}$$

则称 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是复向量空间 V 的一个 **基底**. 很明显, V 的基底 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 V 中极大的复线性无关元素组. 极大复线性无关元素组的成员个数与该组的取法无关, 称为复向量空间 V 的 **(复) 维数**.

当复向量空间 V 的基域限制为实数域时, 即只考虑 V 中的元素与实数相乘时, 则 V 本身也是一个实向量空间. 为了强调起见, 在把 V 看作实向量空间时, 记为 $V_{\mathbb{R}}$. 要指出的是, 作为集合, $V = V_{\mathbb{R}}$; 但是, 在 V 中元素与复数的乘法是有意义的, 而在 $V_{\mathbb{R}}$ 中只考虑其元素与实数的乘法.

假设 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是复向量空间 V 的一个基底, 则 $\{e_1, \cdots, e_n, \sqrt{-1}\,e_1, \cdots, \sqrt{-1}\,e_n\}$ 构成实向量空间 $V_{\mathbb{R}}$ 的基底. 事实上, 对于 $v \in V$, 有唯一的复线性表达式 (1.1). 若设

$$v^i = a^i + \sqrt{-1}\,b^i, \quad a^i, b^i \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

则

$$v = \sum_{i=1}^{n} a^i e_i + \sum_{i=1}^{n} b^i (\sqrt{-1}\,e_i), \tag{1.3}$$

即 v 是 $\{e_i, \sqrt{-1}\,e_i\}$ 的实线性组合. 显然, $\{e_i, \sqrt{-1}\,e_i\}$ 是实线性无关的, 因而构成 $V_{\mathbb{R}}$ 的基底. 由此可见, $V_{\mathbb{R}}$ 是 $2n$ 维实向量空间.

在 $V_{\mathbb{R}}$ 上可以定义实线性变换 $J: V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}}$, 使得

$$\begin{cases} Je_i = \sqrt{-1}\, e_i, \\ J(\sqrt{-1}\, e_i) = -e_i, \qquad 1 \le i \le n. \end{cases} \tag{1.4}$$

对于任意的 $v \in V_{\mathbb{R}}$, 设 (1.3) 式成立, 则

$$\begin{aligned} Jv &= \sum_{i=1}^{n} a^i J(e_i) + \sum_{i=1}^{n} b^i J(\sqrt{-1}\, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a^i (\sqrt{-1}\, e_i) + \sum_{i=1}^{n} b^i (-e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\sqrt{-1}\, a^i - b^i) e_i = \sqrt{-1} \cdot v. \end{aligned} \tag{1.5}$$

上式的含意是: J 在 $v \in V_{\mathbb{R}}$ 上的作用相当于把 v 看作 V 中的元素乘以 $\sqrt{-1}$, 然后再把它作为 $V_{\mathbb{R}}$ 中的元素. 由此可见, 实线性变换 J 在 $V_{\mathbb{R}}$ 上的作用是已定义好的, 与 V 的基底 $\{e_i\}$ 的选取无关.

很明显, 线性变换 J 满足 $J^2 = J \circ J = -\mathrm{id}$.

定义 1.1 设 W 是一个实向量空间. 若有一个线性变换 $J: W \to W$ 满足条件 $J^2 = -\mathrm{id}$, 则称 J 是 W 上的一个 **复结构**.

很明显, 复结构是实向量空间 W 上的一个特殊的 $(1,1)$ 型张量.

设 V 是一个有限维复向量空间, 在把 V 视为实向量空间 $V_{\mathbb{R}}$ 时, 由 (1.5) 式定义的映射 $J: V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}}$ 就是 $V_{\mathbb{R}}$ 上的一个复结构, 称为 $V_{\mathbb{R}}$ 上的 **典型复结构**.

反过来, 有下面的

命题 1.1 设 W 是有复结构 J 的 m 维实向量空间, 则 m 必是偶数, 设 $m = 2n$; 并且存在 W 的一个基底 $\{e_\alpha, 1 \le \alpha \le 2n\}$, 使得

$$Je_i = e_{n+i}, \quad Je_{n+i} = -e_i, \qquad 1 \le i \le n.$$

因此存在一个 n 维复向量空间 V, 使得 $V_{\mathbb{R}} = W$, 并且 J 恰好是 $V_{\mathbb{R}}$ 上的典型复结构.

证明 首先定义复数和向量空间 W 中的元素的乘法如下：设 $a+\sqrt{-1}\,b\in\mathbb{C}$, $v\in W$, 命

$$(a+b\sqrt{-1}\,)\cdot v=av+bJv. \tag{1.6}$$

容易验证：对于任意的 $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$, $u,v\in W$ 有

$$\begin{aligned}\lambda(\mu u)&=(\lambda\mu)u,\\ \lambda(u+v)&=\lambda u+\lambda v,\\ (\lambda+\mu)u&=\lambda u+\mu u.\end{aligned}$$

所以 W 关于与复数的乘法 (1.6) 成为一个复向量空间，记为 V. 很明显， $V_{\mathbb{R}}=W$, 且 J 是 $V_{\mathbb{R}}$ 的典型复结构.

若设 $\dim_{\mathbb{C}}V=n$, 则 $m=2n$. 在复向量空间 V 中任意取定一个基底 $\{e_i:1\le i\le n\}$, 则 $Je_i=\sqrt{-1}\,e_i$, 并且 $\{e_1,\cdots,e_n,Je_1,\cdots,Je_n\}$ 是实向量空间 $W=V_{\mathbb{R}}$ 的基底. 证毕.

由此可见，复向量空间 V 等价于有一个确定的复结构 J 的偶数维实向量空间 $V_{\mathbb{R}}$.

定义 1.2 设 V,W 是两个复向量空间， $f:V\to W$ 是从 V 到 W 的一个映射. 如果对于任意的 $u,v\in V$ 和任意的 $\lambda\in\mathbb{C}$ 有

$$\begin{aligned}f(u+v)&=f(u)+f(v),\\ f(\lambda u)&=\lambda f(u),\end{aligned}$$

则称 $f:V\to W$ 是 **复线性映射**. 如果进一步要求 $f:V\to W$ 是可逆的，则其逆也是复线性映射，此时称 f 是复向量空间 V 和 W 的 **(复线性) 同构**.

很明显，从 n 维复向量空间 V 到它自身的复线性同构的集合关于映射的复合成为一个群，记为 $\mathrm{GL}(V)$. 若在 V 中取定一个基底 $\{e_i\}$, 则群 $\mathrm{GL}(V)$ 和 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$(非退化 $n\times n$ 复矩阵的集合) 是同构的.

从定义知道, 复线性映射 $f: V \to W$ 也是实线性映射. 若用 $J, \tilde{J}$ 分别表示 $V_{\mathbb{R}}, W_{\mathbb{R}}$ 上的典型复结构, 由于 f 是复线性映射, 故 $f(\sqrt{-1}\,v) = \sqrt{-1}\,f(v)$, 即 $f \circ J(v) = \tilde{J} \circ f(v), \forall v \in V$, 因此 $f \circ J = \tilde{J} \circ f$. 如下的逆命题也成立:

命题 1.2 设 V, W 是两个有限维复向量空间, $J, \tilde{J}$ 分别是 $V_{\mathbb{R}}, W_{\mathbb{R}}$ 上的典型复结构. 若实线性映射 $f: V_{\mathbb{R}} \to W_{\mathbb{R}}$ 满足条件

$$f \circ J = \tilde{J} \circ f, \tag{1.7}$$

则 f 是从 V 到 W 的复线性映射.

证明 由于 $J, \tilde{J}$ 分别是 $V_{\mathbb{R}}, W_{\mathbb{R}}$ 上的典型复结构, 故 $v \in V, w \in W$ 与 $\sqrt{-1}$ 的乘积分别是

$$\sqrt{-1}\,v = Jv, \quad \sqrt{-1}\,w = \tilde{J}w.$$

这样, 对于任意的 $a, b \in \mathbb{R}, v \in V$ 有

$$\begin{aligned} f((a+\sqrt{-1}\,b)v) &= f(av + bJv) = af(v) + bf(Jv) \\ &= af(v) + b\tilde{J}f(v) = (a + b\sqrt{-1}\,)f(v), \end{aligned}$$

即 f 是复线性映射. 证毕.

例 1.1 n 维复向量空间 $\mathbb{C}^n$.

设 $\mathbb{C}$ 是复数域, $\mathbb{C}^n$ 是 n 元有序复数组构成的集合, 即

$$\mathbb{C}^n = \{(z^1, \cdots, z^n);\ z^i \in \mathbb{C},\ 1 \le i \le n\}, \tag{1.8}$$

则 $\mathbb{C}^n$ 关于通常的加法和数乘运算构成一个 n 维复向量空间.

如果令 $z^i = x^i + \sqrt{-1}\,y^i, x^i, y^i \in \mathbb{R}, 1 \le i \le n$, 则 $\mathbb{C}^n$ 与 $\mathbb{R}^{2n}$ 有如下的一一对应关系:

$$\mathbb{C}^n \ni (z^1, \cdots, z^n) \longleftrightarrow (x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^n) \in \mathbb{R}^{2n}. \tag{1.9}$$