

弹性固体中的 非线性波

· 张善元 刘志芳 路国运 编著

TANXING GUTI ZHONG DE
FEI XIAN XING BO

中国建材工业出版社

弹性固体中的非线性波

张善元 刘志芳 路国运 编著

中国建材工业出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

弹性固体中的非线性波/张善元, 刘志芳, 路国运编著. —北京: 中国建材工业出版社, 2006. 12

ISBN 7-80159-960-8

I. 弹... II. ①张... ②刘... ③路... III. 非线性弹性力学 IV. 0343. 5

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 150287 号

内 容 简 介

全书共分为六章三个附录, 第一章简述了孤波的形成机制、基本特征及其有关孤波理论的研究进展; 第二章介绍了有限变形弹性动力学的基本理论; 第三章介绍了求解非线性波动的一些常用方法; 第四、五、六章分别讨论了圆杆波导中非线性纵波、梁中的非线性弯曲波和非圆截面杆中非线性扭转波。

弹性固体中的非线性波

张善元 刘志芳 路国运 编著

出版发行: 中国建材工业出版社

地 址: 北京市西城区车公庄大街 6 号

邮 编: 100044

经 销: 全国各地新华书店

印 刷: 北京鑫正大印刷有限公司

开 本: 787mm × 1092mm 1/16

印 张: 13.5

字 数: 337 千字

版 次: 2006 年 12 月第 1 版

印 次: 2006 年 12 月第 1 次

定 价: 32.00 元

网上书店: www.ecool100.com

本书如出现印装质量问题, 由我社发行部负责调换。联系电话: (010) 88386906

前 言

20世纪60年代,自然科学的许多科学分支几乎不约而同地出现了非线性问题的研究热潮,诸方面的研究汇成了非线性的洪流。孤子、湍流、混沌、分形及复杂系统等新的物理现象被揭示,大大扩展了人们的视野,并导致了自然科学认识论和发展观的一场大革命。非线性科学已成为近代科学发展的一个重要标志,它是自然科学各科学分支共同关心的基础性研究。非线性科学涉及到自然界诸多复杂现象,具有广阔应用前景。特别是非线性波动的研究对于解决物理学、化学、生物学和地球物理学中遇到的复杂现象和问题有着极其重要的意义。非线性科学发展中一个重要成就就是孤立子理论的建立。在许多非线性物理领域,已经发现一大批非线性演化方程具有孤立子解。这些方程的共同特征是具有无穷个守恒律、可用逆散射法解析求解、存在 Backlund 变换、完全可积分等。孤立子典型的特征是在其传播过程中伴随有能量集聚,且孤立子间相互作用时表现出犹如粒子弹性碰撞一样的行为。这些特性已在流体力学、等离子体、光纤通讯等技术领域获得广泛应用。

固体力学在线性波的研究方面曾取得过辉煌的成就,为推动物理学中波动理论的发展做出过巨大贡献。近年来固体结构中非线性波的研究已受到关注。本书在已有其他非线性物理领域孤立子理论的研究基础上,考虑了固体结构中常出现的非线性源及黏性耗散效应、几何弥散性质等,研究了固体中几类非线性波的传播问题,取得了一些有价值的结果。重点讨论各类非线性弥散波的特征,揭示其传播规律,同时也介绍非线性波动方程的求解方法。

全书共分为六章三个附录,第一章简述了孤波的形成机制、基本特征及其有关孤波理论的研究进展;第二章介绍了有限变形弹性动力学的基本理论;第三章介绍了求解非线性波动的一些常用方法;第四、五、六章分别讨论了圆杆波导中非线性纵波、梁中的非线性弯曲波和非圆截面杆中非线性扭转波。

第一章和第二章由张善元撰写,第三章由路国运撰写,其余三章及附录由刘志芳撰写,全书由张善元统稿。书中相关的研究得到了国家自然科学基金(10472076)和山西省自然科学基金(20031011, 20051003, 2006021005)支持,在此表示感谢。

由于水平所限,书中难免有不妥与错谬之处,敬请读者指正。

作 者

2006年11月15日

于太原理工大学

目 录

第一章 绪 论	1
1.1 波动及其弥散特性	1
1.2 非线性波的基本特征	4
1.3 孤波及其研究进展	6
1.4 弹性固体中非线性波的研究进展	11
参考文献	15
第二章 有限变形弹性动力学基本理论	18
2.1 笛卡尔张量	18
2.1.1 张量分析梗概	18
2.1.2 符号与约定	18
2.1.3 笛卡尔张量	21
2.1.4 张量代数	21
2.1.5 二阶张量 (仿射量)	23
2.1.6 张量场的微分	25
2.1.7 各向同性张量函数及其表示定理	27
2.2 运动与变形	28
2.2.1 运动及其描述	28
2.2.2 变形梯度、变形张量和应变张量	30
2.2.3 物质时间导数	35
2.3 连续介质动力学基本定律与场方程	40
2.3.1 质量守恒定律与连续性方程	40
2.3.2 线动量守恒、应力张量及运动方程	41
2.3.3 角动量守恒及应力张量的对称性	44
2.3.4 能量守恒定律	44
2.3.5 热力学第二定律及熵不等式	46
2.4 弹性体的本构方程	47
2.5 弹性动力学的 Hamilton 原理	51
2.6 线弹性动力学中的几个基本问题	54
2.6.1 场方程的线性化	54
2.6.2 无限均匀弹性介质中的波	56
2.6.3 弹性波导的几何弥散效应	59
2.6.4 一维杆中的弹性波	61
2.6.5 梁中的弯曲波	63

参考文献	66
第三章 研究非线性波动的常用数学方法	68
3.1 特征线法与 Riemann 不变量	68
3.2 定性分析	72
3.3 行波法	76
3.4 齐次平衡法	78
3.5 摄动法	80
3.5.1 摄动法	81
3.5.2 远方场、简单波与约化摄动法	84
3.6 Hirota 方法	86
3.7 逆散射方法	90
3.7.1 量子力学中的正散射方法	90
3.7.2 逆散射方法	91
3.8 Bäcklund 变换	96
3.8.1 不同方程之间的 Bäcklund 变换	96
3.8.2 同一个方程两个不同解之间的 Bäcklund 变换	97
3.9 数值算法	100
3.9.1 有限差分法	101
3.9.2 符号运算用的数学软件简介	106
参考文献	108
第四章 弹性杆中的非线性纵波	110
4.1 黏性效应与 Burgers 方程	110
4.2 非线性弹性杆中的应变孤波	112
4.2.1 基本方程的导出	112
4.2.2 非线性弹性杆中的孤波	114
4.2.3 结果与讨论	117
4.3 考虑耗散和弥散时的几何非线性波动方程	120
4.4 非线性波动方程的解法	123
4.4.1 非线性波动方程的特征线解法	123
4.4.2 非线性波动方程的摄动解法	125
4.4.3 广义 KdV-Burgers 方程的一组新行波解	130
4.5 三类非线性方程的定性分析	132
4.6 双非线性双弥散支配方程的导出	135
4.6.1 有限变形弹性杆的纵向波动方程	135
4.6.2 非线性弹性杆中的纵向波动方程	139
4.7 双非线性双色散支配方程的解	140
4.7.1 Jacobi 椭圆函数展开法	140
4.7.2 Sine-cosine 三角函数展开法	146
4.7.3 双曲正弦, 双曲余弦展开法	149

4.7.4 双曲正切,双曲余切,正切及余切展开法	151
4.8 截断的非线性波动方程的解	154
4.8.1 Jacobi 椭圆函数展开法	154
4.8.2 双曲正切,双曲余切,正切及余切展开法	158
4.8.3 小结	161
4.9 双非线性双弥散方程的定性分析	161
4.10 非线性纵向波动方程的远方场	165
4.11 小结	169
参考文献	170
第五章 梁中的非线性弯曲波	173
5.1 基本假定和方程	173
5.2 非线性弯曲波动方程的定性分析	175
5.3 非线性弯曲波动方程的行波解	177
5.3.1 Jacobi 椭圆正弦函数展开法	177
5.3.2 Jacobi 椭圆余弦函数展开法	178
5.3.3 第三类 Jacobi 椭圆函数展开法	179
5.4 包络孤立子解	179
5.5 小结	183
参考文献	184
第六章 非圆截面杆中的非线性扭转波	185
6.1 非圆截面杆的扭转	185
6.2 扭转的有限变形	187
6.3 非线性扭转波动方程的导出	189
6.4 非线性扭转波动方程的行波解	191
6.4.1 Jacobi 椭圆正弦函数展开法	192
6.4.2 Jacobi 椭圆余弦函数展开法	193
6.4.3 第三类 Jacobi 椭圆函数展开法	193
6.5 非线性扭转波动方程的定性分析	194
6.6 小结	195
参考文献	196
附录 I Jacobi 椭圆函数	197
附录 II KdV 方程的守恒律	200
附录 III 非线性 Schrödinger 方程	203

第一章 绪 论

1.1 波动及其弥散特性

波动是一个极其广泛而有趣的研究课题，几乎所有学科和工程技术领域都包含着波动现象。如声波、水波、电磁波、固体中的波，量子力学中的几率波等都从不同的物理系统来研究波动问题。又如化学反应、生命过程、人口迁移以及交通流等过程中也都涉及到波动现象。尽管这些系统或过程彼此相互独立，所考察的现象和所关心的结果毫不相干，但却表现出许多极为相似的规律。可见这些不同的时间过程都受着某种共同的运动法则的制约，因而，跟踪这些时间过程的发展方程及其求解技术也必然有着一定的联系。由于波动被包含在如此广泛的自然现象之中，所以它一直在强烈地吸引着各个方面研究者的兴趣，并把许多研究领域微妙地联系起来。波动问题十分惹人注目，因此研究波动现象的数学概念和技巧取得了极为丰富的研究成果和进展，目前已形成一套相当完善的理论和方法。近年来，由于非线性效应日益被人们所关注，给波动理论的研究开辟了更为广阔的前景。

波动现象早已为人们所熟悉，然而抛开具体物理过程，概括波动现象整个范畴还难以给出它一个简明确切的定义。下述直观的定义似乎可以排除更多的限制而具有较大的覆盖性。波是一个以可以鉴别的速度，由介质的一部分向另外一部分传递的可以鉴别的信号。这个信号可以理解为某种性质的扰动，它可以是某个量的极大值或突变，只要可以清楚地识别出来，并在任何时刻可以确定它的位置，而且容许在传播过程中改变其强度、形状和传播速度。简单地说，波动就是扰动在介质中的传播。扰动总是具有某种能量，因此，波的基本特征之一是能量在介质中的传递。显而易见，一个均匀场，尽管是可变的，是不会有波动现象存在的。另外，一个信号的传递若没有可以识别的速度也不称其为波动过程。

一个波动总是受到扰动源激发而产生并通过介质而传递的，所以它既携带着扰动源的信息，又能包含着介质本身的特征。如果我们的兴趣在于了解介质本身的一般的波动性质，这类问题常属于波的传播问题，如果我们关心的是某一特定扰动的传播规律，则属于波的激发问题。这两类问题的研究是相辅相成的，而且往往是耦合在一起的。

数学上最简单的波是扰动沿一个方向，如笛卡尔直角坐标系 x 轴正方向，以固定的速度 c 并保持其原来形状的传播。如果与这个扰动相关的某种特性用 ψ 来量测，在 $t=0$ 时用某个函数 $F(x)$ 来表示，则对于 $t>0$ ，扰动可以表示为 $\psi(x, t) = F(\xi)$ ，此处 $\xi = x - ct$ ，于是对一个以速度 c 沿 x 正向前进的观察者来说，其感受到 ψ 的条件是不变的。按照这种规律随时间在空间变化的量 ψ ，代表了一个沿 x 轴的正向行波。这里宗量 $\xi = x - ct$ 称为波函数 ψ 的相(位)，显然，如果 $\frac{d\xi}{dt} = 0$ ，即 $\frac{dx}{dt} = c$ ， ξ 保持常数，可见 c 是恒定相位沿 x 轴正向传播的速

度，所以称为相速度。在目前的情况下，由于相 ξ 为常数时，扰动 ψ 就保持常数，所以 c 也就是扰动传播的速度，即波速。 $F(\xi) = F(x - ct)$ 的物理意义是明显的，实际上，对于某个特定的时刻 t_1 ， $F(x - ct_1)$ 仅是 x 的函数，它代表 t_1 时刻扰动 ψ 沿 x 轴的分布。经过一个时段 Δt 以后，函数的宗量变成 $x - c(t_1 + \Delta t)$ ，显然 x 点处的函数值随着发生变化。然而如果将 x 也增加一个 $c\Delta t$ ，于是函数的宗量为 $(x + c\Delta t) - c(t_1 + \Delta t) = x - ct_1$ ，和原来的一样，即 $x + c\Delta t$ 处于 $t_1 + \Delta t$ 时刻的相位与 x 处 t_1 时刻的相位相同。于是 t_1 时刻扰动的分布，经过时段 Δt 后沿 x 正方向平移了一个距离 $c\Delta t$ (图 1.1)。由此可见， $F(x - ct)$ 代表了沿 x 轴正向以速度 c 传播的行波。不难看出， x_2 处所经历的扰动将完全重复 x_1 处所经历的扰动过程，只是在时间上推迟了 $\Delta t = \frac{x_2 - x_1}{c}$ 。

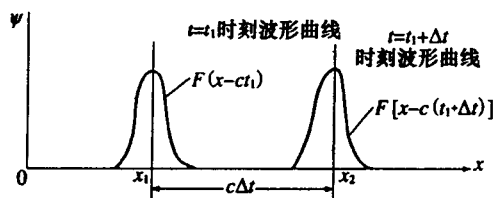


图 1.1 不同时刻的波形剖面

类似地，对沿 x 负方向保持形状不变以速度 c 传播的扰动，若其 $t=0$ 时 $\psi = G(x)$ ，则 $t > 0$ 以后的扰动可表示为 $\psi(x, t) = G(\eta)$ ，其中 $\eta = x + ct$ 。

对于上述沿 x 轴正向行进的波，其波函数满足微分方程

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + c \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (1.1.1)$$

借助于直接代入可以证明。同理沿 x 负方向行进的波，其波函数满足微分方程

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - c \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (1.1.2)$$

式(1.1.1)和式(1.1.2)是两个一阶的波动方程，它们是描述波动现象的最简单的数学模型。显然沿 x 轴正向和负向行进的波，它们同时满足二阶微分方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \quad (1.1.3)$$

上式(1.1.3)常称为一维波动方程，其解为两个反方向行波的叠加

$$\psi = F(x - ct) + G(x + ct) \quad (1.1.4)$$

推广式(1.1.3)可以得到三维的波动方程

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \psi = 0 \quad (1.1.5)$$

其中 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ，方程(1.1.5)有如下形式的解

$$\psi = f(\alpha x + \beta y + \gamma z \pm ct) \quad (1.1.6)$$

此处 f 是任意函数， α, β, γ 是常数，且满足 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ 。解方程(1.1.6)代表了三维介质中沿某一方向传播的平面波，即在特定时刻垂直于波传播方向的同一平面上各点感受到的

扰动均相同。除平面波形式的解外，方程(1.1.5)还有其他形式的解。

方程(1.1.3)和方程(1.1.5)在经典波动理论中起着相当重要的作用，它们能给出许多物理现象很好地近似描述。在弹性动力学问题中，经线性化后的波动方程基本上都可以化为这两个方程。

为了讨论方便，有必要对波动进行分类。基于不同的考虑则有不同的分类方式。如可根据所描述的物理现象对波进行分类，也可根据支配方程的性质进行分类。下面根据方程解的特点进行的分类是有用的，尽管不是十分严格。为简明起见，我们只考虑一维线性波，然而，由此对波所作的分类，不失一般性，可推广到更为一般的波动问题中去。

考虑初值问题，若 $t=0$ 时施加于系统的扰动为 $\psi = F(x)$ ，可将其展成简谐函数的叠加

$$F(x) = \sum A(k) \exp(ikx) \quad (1.1.7)$$

如果 $t > 0$ 有

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \sum A(k) \exp\{ik[x - c(k)t]\} \\ &= \sum A(k) \exp\{i[kx - \omega(k)t]\} \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

其中

$$c(k) = \frac{\omega(k)}{k} \quad (1.1.9)$$

则根据波动的意义， $\psi(x, t)$ 代表了一个波动。此处 k 称为简谐波的圆波数； $c(k)$ 和 $\omega(k)$ 分别为波数为 k 的简谐波的相速度和圆频率。我们称 $\omega = \omega(k)$ 为系统的弥散关系。随弥散关系的不同，波动将呈现出不同的特征。现根据 $\omega(k)$ 的性质对系统或波动进行如下分类：

(1) 如果 $\omega(k)$ 是实函数，且正比于 k ，则相速度 c 与波数 k 无关。这个系统是简单的，此时波动在传播过程中速度不变，形状不变，故称这样的波动为简单波或者是非弥散非耗散波。

(2) 如果 $\omega(k)$ 是关于 k 的非线性实函数，即 $\omega''(k) \neq 0$ ，我们说系统是弥散的。在此情况下不同波数的简谐波具有不同的传播速度。于是初始扰动的波形随着时间的发展将发生波形的歪曲，一个脉冲状的扰动在传播过程中会逐渐平坦下来，这样的波称为弥散波。根据引起弥散的原因不同，可分为物理弥散和几何弥散。前者是由于介质的特性所引起，弥散关系可由问题的支配方程来导出；后者是由于几何效应所引起，其弥散关系往往由边界条件来确定。通常认为介质为非弥散的，弥散效应主要来自几何弥散，几何弥散效应是由于把几何上某些特征尺寸引入到问题中来所导致的。

(3) 如果 $\omega(k)$ 是复函数，则波的相速度由 $\omega(k)/k$ 的实部给出。如令 $\omega(k) = a(k) + ib(k)$ ，则解方程(1.1.8)可写成

$$\psi(x, t) = \sum A(k) \exp[b(k)t] \exp\{i[kx - a(k)t]\} \quad (1.1.10)$$

基于物理上的要求 $b(k)$ 应为负的。上式给出的波既有弥散又有耗散效应，称为耗散波。黏弹性介质同时具有弥散和耗散效应。

如果 $\omega(k)$ 是纯虚函数，则不能给出波动现象，这时实际上是描述了一个扩散过程。

对一个系统或过程判别其是否为弥散的，只需假定问题有形如 $A \exp[i(kx - \omega t)]$ 的基本解，将其代入问题的支配方程(有时要满足边界条件)就得到 ω 和 k 的关系 $G(\omega, k) = 0$ ，

或 $\omega = \omega(k)$ 。如将基本解代入式(1.1.3)可得 $\omega = \pm ck$ ，可见式(1.1.3)所描述的系统是简单系统。又如对于梁的运动方程

$$\psi_{tt} + \gamma^2 \psi_{xxxx} = 0 \quad (1.1.11)$$

可得其弥散关系为 $\omega = \pm \gamma k^2$ ，故知梁中的弯曲波是弥散的。式(1.1.11)右下角的字母表示对该量求偏导，以后某些场合常采用这种记号。

应该说明的是，对于一般的线性偏微分方程，应用上述方法求得的弥散关系是与方程一一对应的，即由给定的线性偏微分方程可以确定出弥散关系，反过来可由某个弥散关系写出对应的线性偏微分方程。这是因为将基本解代入方程时，每个 $\frac{\partial}{\partial t}$ 将产生一个因子 $-i\omega$ ，而 $\frac{\partial}{\partial x}$ 产生一个因子 ik ，导数的阶次换成 $-i\omega$ 或 ik 的幂次。如对方程

$$\psi_t + \psi_{xxx} = 0 \quad (1.1.12)$$

可直接写出其弥散关系 $G(\omega, k) = \omega + k^3 = 0$ 或 $\omega = -k^3$ 。

顺便指出，对单一频率的波来说，在弥散和非弥散系统中传播，本质上没有什么差别。然而，对于复杂的扰动，两种系统却表现出明显的差异。在弥散系统中往往更关心的是具有分布波数的波的整体，即波包和波群的传播行为，因为它表征着系统能量的传播。因此，除了式(1.1.9)定义的相速度 c 外，根据弥散关系，由下式定义的群速度 c_g

$$c_g = d\omega/dk = \frac{d(kc)}{dk} = c + k \frac{dc}{dk} = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda} \quad (1.1.13)$$

对弥散系统是重要的，式中 $\lambda = 2\pi/k$ 为谐波波长。一般情况下 $dc/d\lambda$ 是正值，从而 $c_g < c$ 称为正常弥散。若 $dc/d\lambda$ 为负值，则有 $c_g > c$ ，将发生反常弥散。

1.2 非线性波的基本特征

对应于最简单的双曲波模型(1.1.1)的非线性波方程是

$$\psi_t + c(\psi)\psi_x = 0 \quad (1.2.1)$$

这是个拟线性方程，它对 ψ_t 、 ψ_x 来说是线性的，可是对 ψ 来说却是非线性的。这个看来十分简单的方程事实上能够描述许多领域的波动现象。例如，交通流中的运动波，长河中的涌波以及化学中的某些反应现象都可归结到方程(1.2.1)的研究。因此，方程(1.2.1)是许多波动现象的一个数学模型，更重要的是，对它的研究中几乎可以提供非线性双曲波的全部重要概念。其中主要的非线性特征是波的破坏而变成激波，数学上对应的是特征线理论与激波的特别处理。

为了寻找方程(1.2.1)的解，我们注意到在斜率为

$$\frac{dx}{dt} = c(\psi) \quad (1.2.2)$$

的曲线上，方程(1.2.1)的左边将变为全微商，即

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{dt} = 0 \quad (1.2.3)$$

曲线(1.2.2)不能事先确定，因为在它的定义中含有未知数 ψ ，但是它可以与解 ψ 同时一起来确定。首先我们由方程(1.2.3)看到在该曲线上 ψ 保持不变，故在方程(1.2.2)中 $c(\psi)$ 为常量，所以该曲线是在 (x, t) 平面上一条斜率为 $c(\rho)$ 的直线，每条斜率为 $c(\psi)$ 的直线上对

应着其上的一个 ψ 值, 因此方程(1.2.1)的通解是有赖于 (x, t) 平面上的直线族结构。曲线(1.2.2)称为解 ψ 的特征线, 在特征线上的解对应波所携带的信息, 它在双曲型波动方程所有问题中起着重要作用。对应于我们讨论的方程(1.2.1), 特征线族为直线, 在更为一般的情况下沿特征线上的解不一定保持常数, 从而特征线不一定是直线。

考虑如下初值问题

$$\left. \begin{aligned} \psi_t + c(\psi)\psi_x &= 0 & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ \psi(x, 0) &= f(x) & -\infty < x < \infty \end{aligned} \right\} \quad (1.2.4)$$

如果特征线交 x 轴上($t=0$)的 $x=\xi$ 处, 则整条特征线上都有解 $\psi=f(\xi)$, 对应于该特征线上的斜率就是 $c(\psi)=c[f(\xi)]\equiv F(\xi)$ 。由方程中的已知函数 $c(\psi)$ 及初始条件 $f(\xi)$ 可知 $F(\xi)$ 是一个已知函数。特征线族的方程可以写为

$$x = \xi + F(\xi)t \quad \xi \text{ 为参数 } \xi(x, t) \quad (1.2.5)$$

在其上方程(1.2.4)的解为

$$\psi = f(\xi) = f[\xi(x, t)] \equiv \psi(x, t) \quad (1.2.6)$$

式(1.2.5)和式(1.2.6)给出了了解的解析表达式。其中由式(1.2.5)可以解出 $\xi=\xi(x, t)$, 代入式(1.2.6)可得 $\psi=\psi(x, t)$ 。我们可以验证这个解, 由式(1.2.6)有

$$\psi_t = f'(\xi)\xi_t, \quad \psi_x = f'(\xi)\xi_x \quad (1.2.7)$$

为了确定 ξ_t , ξ_x , 我们对式(1.2.5)分别关于 t 和 x 求偏导, 得

$$\left. \begin{aligned} 0 &= F(\xi) + [1 + F'(\xi)t]\xi_t \\ 1 &= [1 + F'(\xi)t]\xi_x \end{aligned} \right\} \quad (1.2.8)$$

从以上两式解得 ξ_t 和 ξ_x 后代入式(1.2.7), 便得到

$$\psi_t = \frac{-F(\xi)f'(\xi)}{1 + F'(\xi)t}, \quad \psi_x = \frac{f'(\xi)}{1 + F'(\xi)t} \quad (1.2.9)$$

注意到 $F(\xi)=c(\psi)$, 显然方程(1.2.9)满足方程(1.2.4)的支配方程, 而且, 在 $t=0$ 时, 由方程(1.2.5)有 $x=\xi$, 所以方程(1.2.6)给出 $f(x)$, 于是解也满足初值。故方程(1.2.5)和方程(1.2.6)是方程(1.2.4)的解。

以下我们对得到的解进行分析讨论, 看看非线性会出现什么新的现象。从方程(1.2.2)可以看出, 不同的 ψ 以不同的速度 $c(\psi)$ 传播。显然在 t 时刻的解可以用初值曲线 $\psi=f(x)$ 上每一点向右移动距离 $c(\psi)t$ 来构成, 不同的 ψ 值移动了不同的距离。对于 $c'(\psi)>0$ 的情形, 大值的 ψ 传播得快, 小值的 ψ 传播得慢, 将会出现波的追赶现象, 因而随着时间的推移 $t_0 < t_1 < t_B < t_3$, ψ 的分布如图 1.2 所示。

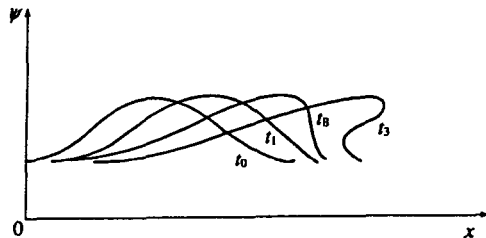


图 1.2 波的破坏, t_0, t_1, t_B, t_3 时刻波的剖面

当 $t = t_B$ 时, 在某 x 处将出现 ψ 的多值解, 这称为波的破坏。波第一次破坏的时刻 $t = t_B$, 对应于 ψ_t, ψ_x 为无限大的情况, 由式(1.2.9)可以确定

$$t_B = -\frac{1}{F'(\xi_B)} \quad (1.2.10)$$

其中 $F'(\xi_B)$ 是 $F'(\xi) < 0$ 且 $|F'(\xi)|$ 取极大值时特征线 $\xi = \xi_B$ 处的值。 $t \geq t_B$ 以后, 特征线相交, 初值问题式(1.2.4)就不存在唯一连续解, 即使初值 ψ 的分布是非常光滑的, 也会出现这种解终究要破坏的现象。这是非线性波的基本特征。

当波发生破坏时, 式(1.2.1)的正确性将失效, 这说明在建立式(1.2.1)时所采用的某些假设或近似将不再成立, 需要回到物理问题本身去寻找原因, 并构造一个修正模型(如在本构方程中引进黏性等)。不过, 可以加入一个间断来补救以上的理论, 则以激波结构去代替连续的多值解, 这就要求方程(1.2.1)的解作某些数学上的开拓。

1.3 孤波及其研究进展

从上节讨论看到, 对于非线性波动, 其相速度一般与波的幅值相关, 因此不同幅值的扰动在其传播过程中将会发生追赶现象, 随着时间的发展将会出现波形的突陡, 最后导致波形破坏, 这是线性波中所见不到的特征。而从 1.1 节的讨论看出, 系统的弥散效应和耗散效应都有使波形平缓的作用, 它们都能抑制由于非线性效应引起的波形突陡, 从而可以保持突陡而光滑的波形稳定地传播下去。孤波就是由于非线性效应和弥散效应或耗散效应相互抑制而形成的一种稳定传播的行波。这种波在形成过程中伴随有能量的局部集聚, 且在其传播过程中有波形和速度不改变、波幅不衰减等特征。若一孤波在行进过程中与其他孤波相遇发生碰撞作用, 碰撞前后波形、速度、幅值均保持不变, 呈现出犹如微观物理学中粒子的行为, 则称为孤子。孤波的发现已有 172 年的历史, 它已在流体力学、非线性光学、光纤通讯以及等离子体和生物学等学科获得重要应用。同时, 孤波的研究也大大推动了应用数学的发展, 逆散射法就是近代应用数学的一大进展。孤波的研究大致经历了三个阶段。

1834 -1955 年称为孤波发展史上的第一阶段, 在这一阶段, 主要的工作有 Russell 发现孤立波现象(1834); KdV 方程及其孤立波解的提出(1895); Sine-Gordon 方程的 Bäcklund 变换的发现(1885); Cole-Hopf 变换(1950 ~ 1951)。

1834 年, 英国科学家、造船工程师 John Scott Russell 最先发现了孤波现象, 他在 1844 年 9 月英国皇家科学促进会第 14 次会议上发表的《论波动》一文中, 对此现象做了生动的描述:

“我相信最好还是用我第一次亲自与之相识的情况来介绍这一现象。当时, 我正在观看由两匹马牵引的, 沿着不宽的河道迅速向前运动的一只小船, 当小船突然停止时, 河道里由船推动的一大堆水并不停止, 而是聚集在船头周围激烈地摇动着, 随后呈现出一个很大的、孤立的隆起, 那是一个滚圆的、平滑的、而且轮廓分明的巨大孤立波峰, 它以巨大的速度向前滚动着, 急速地离开船头, 在行进中它的形状和速度并没有明显的改变。我骑在马上紧跟着观察。它以每小时约八九英里的速度滚滚向前, 并保持长约 30 英尺、高约 1 ~ 1.5 英尺的原始形状。后来, 渐渐它的高度下降了。当我跟踪一两英里后, 它终于消失在逶迤的河道之中。这就是我在 1834 年 8 月第一次偶尔发现这奇异而美妙的现象的经过。这现象我称之为平移波, 这是一个现在已被普遍接受的名字。自从我发现这一现象以来, 在所有的流体

阻力中，它都是一个重要的组成部分。同时，我也弄清楚了还有海洋中巨大的、移动着的升举属于这种现象。它和行星的节律一起，使我们的河流升涨，并沿着我们的海岸滚动。”

以后，Russell 又用水槽进行实验，证实了他的上述结果，他又称此水波为大孤波，这就是人们现在所说的孤波。1865 年 H. Bazin 报道了他在法国第戎附近的运河上的实验观察，也证实了孤波的存在。

在 Russell 提出平移波之后，G. B. Airy 爵士和 George Stokes 爵士对此提出了怀疑。在当时，这两位爵士对波动的研究都颇有造诣。他们怀疑的问题是：一个完整的波动为什么会全部在水面上，而不是一部分在水面上，一部分在水面下；波在传播的过程中，为什么波幅不会衰减；波的运动速度和他们的研究结果不符。这一争论延续到 19 世纪 70 年代才初步得到解决。Lord Rayleigh 在经过仔细的研究之后指出，Stokes 所研究的波，水深与波长之比接近于 1，而对 Russell 所发现的孤波，这一比值接近于零，他们二人研究的具体对象是有差别的，因此，他们各自得到的波的传播速度也就不同。

1872 年，J. Boussinesq 在研究长波的运动时得到一个方程，它的解是双曲正割的平方 (sech^2)。此外，他还引入一些重要概念，例如守恒密度，非线性与色散之间的平衡等。

Russell 同 Airy, Stokes 的争论最终由 D. J. Korteweg 教授和他的学生 G. de Vries 于 1895 年解决。他们二人显然不知道 Boussinesq 和 Rayleigh 的工作。为了回答 Airy 和 Stokes 提出的反对意见，他们从流体动力学的研究得到浅水波方程(后人称它为 KdV 方程)。同时，还得到这一方程的行波解，它属于周期性椭圆函数，所以称为椭圆余弦波 (cnoidal wave)，在波长趋于无限的情况下，它描述 Russell 所发现的孤波的运动，而且波形是 sech^2 。从 Russell 的发现到 KdV 方程提出，大约经历了六十年，至此，孤波才为学术界所接受。

19 世纪 80 年代，瑞典的数学家 Bäcklund 在研究负常曲率面时，得到方程的一个有趣性质，即从一个方程的已知解，经过一个变换，可以求得另一个新解，这变换称为 Bäcklund 变换，成为后来发展孤立子理论的重要基础。在此以后的五六十年中没有什么大的进展，有人称为半个世纪的寂静。

孤立子理论发展的第二阶段大致可划在 1955 ~ 1975 年。主要成就有：提出了著名的 FPU 问题(1955)；孤立子的命名(1965)；逆散射方法的创立(1967)；Miura 变换(1968)；Lax 对(1968)。

经过六十年的平静之后，直到 1955 年，Fermi, Pasta, Ulam(FPU)用计算机进行了一维非线性晶格(lattice)在各个振动模之间的实验研究，发现在时间足够长以后，能量似乎又回到了开始的分布。这与以往流行的 P. Debye 等人认为能量是在各振动模扩散(能量均分)理论相矛盾。由于 FPU 问题是在频域内考察的，因此未能发现孤波解。后来，Toda 研究了这种模式的非线性振动，得到了孤波解，从而表明了流体力学以外的物理领域也出现孤立波，同时也使 FPU 问题得到了正确的解答。这就使 KdV 方程和孤波在沉睡了几十年之后重新又激发起人们对孤立波的研究兴趣。1962 年，Perring 和 Skyrme 将 Sine-Gordon 方程用于基本粒子研究。1965 年，Zabusky 和 Kruskal 把 KdV 方程用于等离子体波的研究，用数值方法对 KdV 方程进行了仔细的研究，发现 KdV 方程确实存在一些脉冲式的孤波解，这些孤波的振幅、宽度和传播速度各不相同，不同孤波可以相互碰撞，碰撞后它们各自维持原来的形状和速度前进。Zabusky 和 Kruskal 正式将这种波包形状的孤波命名为孤立子。1967 年 Gard-

ner, Greene, Kruskal 和 Miura(GGKM)提出逆散射方法,成功地解决了 KdV 方程的求解问题。同年, McCall 和 Hahm 作出了激光自感应透明的孤子实验。随后 P. D. Lax 于 1968 年通过引入 Lax 对,将孤子演化方程的求解问题和求 Lax 对的问题联系起来,从而使逆散射方法的数学形式表述得更为简洁。1972 年, V. E. Zakharov 和 A. B. Shabat 找到了非线性薛定谔方程的 Lax 对,首次求出该方程的孤子解。同年, M. Wadati 求得 MKdV 方程的精确解。而 M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell 和 H. Segur(以下简称 AKNS)于 1973 年将逆散射方法用于 Sine-Gordon 方程,求得其精确解。逆散射方法的提出和推广,解决了一大批重要的孤子演化方程的求解问题,从而极大地推动了孤子理论的研究。由 A. C. Scott, F. Y. F. Chu 和 D. W. Mclaughlin 于 1973 年发表综述文章,在电子、光学界普及了孤子知识;同年 Hasegawa 和 Tappert 预言光纤孤子的存在。1975 年, Krumhansl 和 Schieffer 开始研究孤波的统计力学。

另一方面, Miura 于 1968 年发现了 KdV 方程和 MKdV 方程之间存在一个变换——Miura 变换。每一个 MKdV 方程的解通过 Miura 变换可以变成 KdV 方程的解。反之不成立。Miura 变换的另一个重要应用是证明了 KdV 方程有无穷多守恒律。1971 年 Hirota 引入了双线性方法,用于构造很多方程的多孤子解和变换。

第三个阶段是从 1975 年至今,把孤子概念及理论广泛应用于物理学、生物学、天文学等各个领域。已经发现了许多孤立子存在的实例,并开始了一些重要应用。如天上涡旋星云中的密度波、木星大气中巨红斑的活动、海洋中冲击海岸和石油平台的冲击波,特别是在凝聚态和高分子材料中,如³He 中的超流、光学材料的自聚现象和光纤脉冲波的传播、等离子体和晶体及液晶(高度非线性介质)中机械波传播和热传导,以及高分子(如聚乙炔)导电材料中的光电性质、生物系统、磁学、结构相变、流体力学以及基本粒子等,都与孤立子有关。孤立子的应用研究已不仅是实验室的工作,利用孤子理论,已经成功地解释了在激光打靶中多年来用经典理论未能解释的密度坑问题以及红外线外移问题。由于孤子在传输中具有不损失波形,不改变速度和保密性好等优点,已在实验室实现了使用孤子来改进信号传输系统,提高传输效率的目的。在许多生命体中,孤波和孤子很可能就是神经脉冲传播和能量在大分子之间传递的载体。生物物理学中的孤立子理论包括两个体系,其一为关于 α 螺旋蛋白质分子的孤立子理论,其二是关于生物遗传信息载体——DNA 分子的孤立子理论。因此,孤立子的研究对生命科学的发展有着重要的意义。

孤子理论与数学的许多分支都有关系,经典分析和泛函分析,李群李代数,近代微分几何,拓扑学,动力系统以及计算数学都对孤立子的研究有重要作用。在数学领域内,孤立子理论提供了一个新的求解非线性偏微分方程的途径,发现有这么一类方程,它们的某一特解都具有孤立子的特性,称这类方程为孤子方程,它们的孤波解称为孤立子解。虽然孤立子一词在广泛的范围内被引用,但目前还没有一个确切的定义,因为它还在发展中,给它下严格的定义比较困难,且为时过早。李政道指出:“在一个场论系统中,若有一个经典解,它在任何时间都束缚于空间的一个有限区域内,那么,这样的解叫做经典孤子解。”很显然这只是给出一个描述性定义,为了更清楚地理解孤波和孤立子的特征,以下按文献 [13] 提供的工作定义可能更为直观。

一个孤立波,如 Russell 实验观察到的那样,是一个不变化其形状且仅沿一个空间方向传播的局部化的波。一个孤立子,如 Zabusky 和 Kruskal 数值实验所发现的那样,是一个大

幅值的相干脉冲或非常稳定的孤波当与其他孤波碰撞后其形状和速度保持不变。

由于波的基本特征是能量在介质中的传递，因此孤波或孤立子具有能量局域化的特征，这种局域化的形成机制是来源于系统的非线性效应与弥散效应或耗散效应相互制约达到的动态平衡。

随着孤立子问题研究的深入，人们不断发现大量非线性发展方程具有孤波解，出现了各种各样的孤波和孤子，对孤波也出现了不同的分类，根据其形状最典型的孤波有以下几种：

(1) 钟型孤波和反钟型孤波(KdV型孤波)

钟型孤波和反钟型孤波，统称为 KdV 型孤波，是指由 KdV 方程所描述的孤波。KdV 方程起源于对浅水波的描述，但目前发现它在弹性杆中的纵向色散波的传播、等离子磁流体波、非线性晶格等领域起重要作用。KdV(Korteweg-de Vries)方程的标准形式为

$$\frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (1.3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (1.3.2)$$

它们的孤波解为

$$u(x, t) = -\frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct) \right] \quad (1.3.3)$$

和

$$u(x, t) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct) \right] \quad (1.3.4)$$

解式(1.3.4)和式(1.3.3)分别具有图 1.3 和图 1.4 所示的形状，所以称为钟型孤波和反钟型孤波。钟型孤波对应于负色散，又叫做压缩型孤波(compressive solitary wave)；反钟型孤波对应于正色散，又叫稀疏型孤波(rarefied solitary wave)，或称为腔子(caviton)。

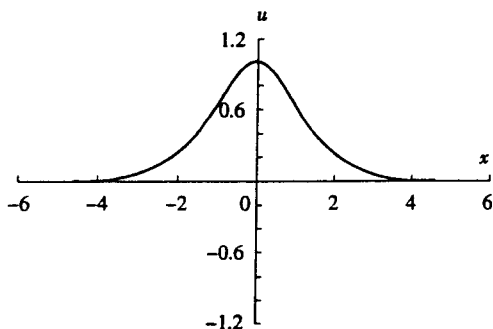


图 1.3 钟型孤波

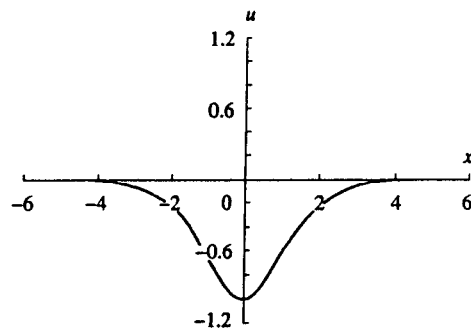


图 1.4 反钟型孤波

(2) 包络(envelop)孤波(NLS孤波)

包络孤波又称为 NLS 孤波，它是由非线性 Schrödinger 方程(简记 NLS)所描述的孤波。非线性 Schrödinger 方程也来源于浅水波的描述，后来在非线性光学、电磁学、超导超流、生物物理、高分子物理、等离子体理论中均发现了它对应的模型。其一般形式为

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta |u|^2 u = 0 \quad (i^2 = -1) \quad (1.3.5)$$

其中 α 为色散项系数, β 为非色散项系数。如果 $\alpha > 0, \beta > 0$, NLS 的孤波解为

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2\gamma}{\beta}} \operatorname{sech} \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}} (x - c_g t) \exp[i(kx - \omega t)] \quad (1.3.6)$$

其中 c_g 为群速度, $\omega - \alpha k^2 = -\gamma (\gamma > 0)$ 。NLS 解的包络形状不发生变化, 具有孤波特征, 如图 1.5 所示, 所以称为包络孤波。

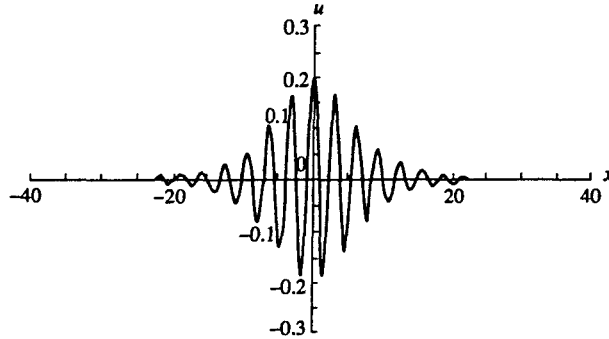


图 1.5 非线性 Schrödinger 方程的包络孤波

(3) 扭结型(kink)孤波和反扭结型(anti-kink)孤波

Sine-Gordon 方程(简称为 SGE)可从外场中的一维原子链模型导出, 在生物物理(Englander DNA 的孤立子理论)以及与非线性晶格、非均匀介质相关的诸多物理现象中, 均可导出此方程, 其标准形式如下

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f_0^2 \sin u = 0 \quad (1.3.7)$$

它的孤波解为

$$u(x, t) = 4 \arctan [e^{\pm k(x - ct)}] \quad (1.3.8)$$

其中 c_0, f_0, c 均为常数, $k = f_0 / \sqrt{c_0^2 - c^2}$ 。解如图 1.6 和图 1.7 所示, 其形状如扭结状, 故将这种类型的孤波称为扭结型孤波和反扭结型孤波。

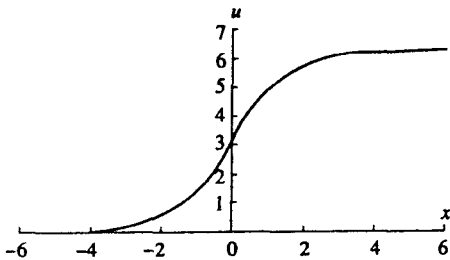


图 1.6 扭结型孤波

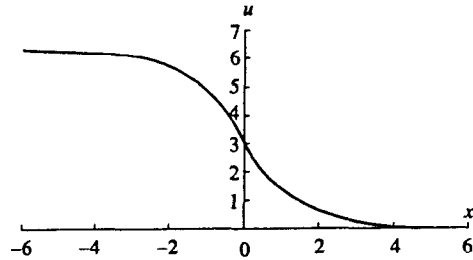


图 1.7 反扭结型孤波

(4) 呼吸(breather)孤波

Sine-Gordon 方程在非线性的条件下可求得如下形式的解

$$u(x, t) = 4 \arctan \left[\pm \sqrt{\frac{1-\beta}{\beta}} \frac{\sin \sqrt{\beta} f_0 t}{\cosh \sqrt{1-\beta} \lambda_0 x} \right] \quad (0 < \beta < 1) \quad (1.3.9)$$