数学 3

全日制十年制学校高中课本·第三册

SHUXUE

SHUXUE

人民教育出版社

全日制十年制学校高中课本
（试 用 本）
数 学
第 三 册
中小学通用教材数学编写组编
*
人民教育出版社出版
山西人民出版社重印
山西省新华书店发行
晋 源 印 刷 厂 印 刷
*
开本 787×1092 1/32 印张 7.125 字数 120,000
1979年4月第1版 1980年11月第2次印刷
印数 246,001—296,000册
书号 K7012.0127 定价 0.42元

目　录

第一章　线性方程组

1.1　二元线性方程组和二阶行列式

一次方程又叫做**线性方程**，一次方程组又叫做**线性方程组**.

含两个未知数、两个一次方程的二元线性方程组，它的一般形式是：

$$\text{(I)}\qquad \begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, & (1)\\ a_2x+b_2y=c_2. & (2)\end{cases}$$

用加减消元法解这个方程组：

$(1)\times b_2-(2)\times b_1$，得$(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1$，(3)

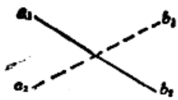
$(2)\times a_1-(1)\times a_2$，得$(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1$. (4)

如果 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$，就得到

$$\begin{cases} x=\dfrac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1},\\[2ex] y=\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}.\end{cases}\qquad(5)$$

这就是二元线性方程组（I）的求解公式. 将任何一个二元线性方程组化为一般形式后，只要 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$，就可以利用公式(5)求出它的解.

在公式(5)中，两个分母都是 $a_1b_2-a_2b_1$，并且只含有未知数的系数. 把未知数的系数按照它们在方程组中原来的位置排列起来就是



我们可以看出，这四个数排成一个正方形，$a_1b_2-a_2b_1$ 就是这个正方形中用实线表示的对角线（叫做主对角线）上两个数的积，减去用虚线表示的对角线上两个数的积所得的差．在这四个数的两旁各加一条竖线，用符号

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \tag{6}$$

来表示 $a_1b_2-a_2b_1$，即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1.$$

符号(6)叫做二阶行列式，a_1，a_2，b_1，b_2 叫做行列式(6)的元素．这四个元素排成二行二列（横排叫行，竖排叫列）．$a_1b_2-a_2b_1$ 叫做二阶行列式的展开式．

同样地，如果用行列式表示公式(5)中的两个分子，就有

$$c_1b_2-c_2b_1=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix},\quad a_1c_2-a_2c_1=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

这样，公式(5)就可写成

$$\left\{\begin{aligned} & \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \\ y= & \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \end{aligned}\right. \quad \left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0\right) \tag{7}$$

为了简便起见，通常用 D, D_x, D_y 分别表示(7)式中作为分母与分子的行列式：

$$D=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix},\quad D_x=\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix},\quad D_y=\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix},$$

那么方程组(I)的解可以表示成

$$\begin{cases}x=\dfrac{D_x}{D},\\ y=\dfrac{D_y}{D}.\end{cases}\qquad (D\neq 0)\qquad (3)$$

行列式 D 是由方程组(I)中未知数 x, y 的系数组成的，叫做这个方程组的系数行列式. D 中 x 的系数 a_1，a_2 换成方程组(I)的常数项 c_1, c_2，就得到行列式 D_x; D 中 y 的系数 b_1，b_2 换成常数项 c_1, c_2，就得到行列式 D_y.

上面研究了 $D=a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ 的情况，现在再来讨论 $D=0$ 的情况.

1. $D=0$，但 D_x，D_y 中至少有一个不等于零. 不妨设 $D_x\neq 0$，即 $c_1b_2-c_2b_1\neq 0$，这时，无论 x 取什么值，

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1\qquad (3)$$

都不成立，即方程(3)无解，因此方程组(I)也无解。

2. $D=D_x=D_y=0$，即 $a_1b_2-a_2b_1$，$c_1b_2-c_2b_1$，$a_1c_2-a_2c_1$ 都等于零. 因为(1)，(2)中未知数的系数不能都等于零，不妨设 $a_1\neq 0$，则由 $a_1b_2-a_2b_1=0$，$a_1c_2-a_2c_1=0$，可得 $b_2=\dfrac{a_2b_1}{a_1}$，$c_2=\dfrac{a_2c_1}{a_1}$，因此方程(2)成为 $a_2x+\dfrac{a_2b_1}{a_1}y=\dfrac{a_2c_1}{a_1}$，即 $a_2(a_1x+b_1y)=a_2c_1$，所以方程(1)的解就是方程(2)的解。因为方程(1)有无穷多解，所以方程组(I)有无穷多解.

归纳以上讨论，我们得出：

二元线性方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$$

当 $D\neq0$ 时有唯一解

$$\begin{cases}x=\dfrac{D_x}{D},\\[2ex]y=\dfrac{D_y}{D};\end{cases}$$

当 $D=0$，但 D_x,D_y 中至少有一个不等于零时，无解；当 $D=D_x=D_y=0$ 时，有无穷多解.

例 1 用行列式解方程组

$$\begin{cases}3x-2y+1=0,\\2x+5y-12=0.\end{cases}$$

解：先把方程组化为一般形式

$$\begin{cases}3x-2y=-1,\\2x+5y=12.\end{cases}$$

计算：

$$D=\begin{vmatrix}3&-2\\2&5\end{vmatrix}=3\times5-2\times(-2)=15+4=19\neq0,$$

$$D_x=\begin{vmatrix}-1&-2\\12&5\end{vmatrix}=(-1)\times5-12\times(-2)=-5+24=19,$$

$$D_y=\begin{vmatrix}3&-1\\2&12\end{vmatrix}=3\times12-2\times(-1)=36+2=38.$$

$$\therefore\quad \frac{D_x}{D}=\frac{19}{19}=1,\quad \frac{D_y}{D}=\frac{38}{19}=2.$$

所以方程组有唯一解

$$\begin{cases}x=1,\\y=2.\end{cases}$$

例2 解关于 x,y 的方程组

$$\begin{cases}mx+y=m+1,\\x+my=2m.\end{cases}$$

解： $D=\begin{vmatrix}m & 1\\1 & m\end{vmatrix}=m^2-1=(m+1)(m-1)$,

$$D_x=\begin{vmatrix}m+1 & 1\\2m & m\end{vmatrix}=m(m+1)-2m=m^2-m=m(m-1),$$

$$D_y=\begin{vmatrix}m & m+1\\1 & 2m\end{vmatrix}=2m^2-(m+1)=2m^2-m-1$$

$$=(2m+1)(m-1).$$

(1) 当 $m\neq\pm1$ 时，$D\neq0$，方程组有唯一解

$$\begin{cases}x=\dfrac{m}{m+1},\\[2mm]y=\dfrac{2m+1}{m+1}.\end{cases}$$

(2) 当 $m=-1$ 时，$D=0$，$D_x=2\neq0$，方程组无解.

(3) 当 $m=1$ 时，$D=0$，$D_x=D_y=0$，方程组有无穷多解($x=t,y=2-t$，t 可取任意值).

练　习

1. 写出下列行列式的展开式，并化简：

(1) $\begin{vmatrix}6a-b & 2b\\3a & b\end{vmatrix}$;　(2) $\begin{vmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\\sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} \log_a x & \log_a y \\ m & n \end{vmatrix}$.

2. 用行列式解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 7x-8y=10, \\ 6x-7y=11; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 5x+11y-8=0, \\ 4x+15y+6=0. \end{cases}$

3. 不解方程组，判定下列方程组有唯一解，无解，还是有无穷多解。

(1) $\begin{cases} 2x+3y=7, \\ 5x-2y=1; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 6x+9y=7, \\ 4x+6y=2; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 4x-3y=5, \\ 8x+6y=22; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 5x-15y=10, \\ 3x-9y=6. \end{cases}$

4. 解下列关于 x,y 的方程组：

(1) $\begin{cases} x+(m-1)y=1, \\ (m-1)x+y=2; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 4x+my=m, \\ mx+y=1. \end{cases}$

1.2 三阶行列式

把九个数排成下面的形式，并在这九个数的两旁各加一条竖线，如

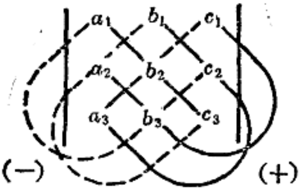
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \tag{1}$$

用它来表示

$$a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2. \tag{2}$$

(1)式叫做三阶行列式，(2)式叫做三阶行列式的展开式．三阶行列式有三行三列．

三阶行列式可以按下图展开:



实线上三个元素的积取正号，虚线上三个元素的积取负号，得出

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2$$

$$-a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2.$$

这种展开三阶行列式的方法叫做对角线法则。

例 用对角线法则计算行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

解: $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

$$= 3\times1\times(-2) + (-2)\times0\times1 + 2\times(-2)\times3$$

$$-2\times1\times1 - (-2)\times(-2)\times(-2) - 3\times0\times3$$

$$= -6 + 0 - 12 - 2 + 8 - 0 = -12.$$

练　习

1. 用对角线法则计算下列行列式的值:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 7 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$.

2. 用对角线法则展开下列行列式,并化简:

(1) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ m & n & l \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} 1 & -a & -b \\ a & 1 & -c \\ b & c & 1 \end{vmatrix}$.

1.3　三阶行列式的性质

定理 1　把行列式的各行变为相应各列（就是第 i 行变为第 i 列, $i=1,2,3$），行列式的值不变. 即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

证明: 按对角线法则分别把上式两边的行列式展开, 它们都等于

$$a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2,$$

所以定理成立.

由定理 1 可知, 对于行列式的行成立的定理对于列也一定成立; 反过来也对.

定理 2 把行列式的两行(或两列)对调，所得行列式与原行列式的绝对值相等，符号相反. 例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

这个定理也可用对角线法则展开证明.

定理 3 如果行列式某两行(或两列)的对应元素相同，那么这个行列式的值等于零.

证明：假设行列式 D 有两行(或两列)的对应元素相同，将这两行(或两列)进行对调，根据定理 2，对调后的行列式应等于 $-D$. 但实际上对调后的行列式与原行列式相同，所以有 $D=-D$，移项得 $2D=0$，即 $D=0$.

定理 4 把行列式的某一行(或一列)的所有元素同乘以某个数 k，等于用数 k 乘原行列式. 例如

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

证明：将上式左边的行列式展开后，所得各项都含有因子 k，将公因子 k 提出，作为另一个因式的多项式与右边行列式的展开式相同.

推论 1 行列式的某一行(或一列)有公因子时，可以把公因子提到行列式外面.

推论 2 如果行列式某一行(或一列)的所有元素都是零，那么行列式的值等于零.

定理 5 如果行列式某两行(或两列)的对应元素成比

例，那么行列式的值等于零.

例如，根据定理 4 和定理 3，可以得出

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

定理 6　如果行列式的某一行（或一列）的元素都是二项式，那么这个行列式等于把这些二项式各取一项作成相应行(或列)，而其余行（或列）不变的两个行列式的和. 例如

$$\begin{vmatrix} a_1+a_1' & b_1+b_1' & c_1+c_1' \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' & b_1' & c_1' \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

这个定理用对角线法则展开就可证明.

定理 7　把行列式某一行(或一列)的所有元素同乘以一个数 k，加到另一行(或另一列)的对应元素上，行列式的值不变. 例如

$$\begin{vmatrix} a_1+ka_2 & b_1+kb_2 & c_1+kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

证明: $\begin{vmatrix} a_1+ka_2 & b_1+kb_2 & c_1+kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

容易证明，三阶行列式的上述性质，对于二阶行列式同样成立.

例 1 利用行列式的性质，计算下面行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 8 & 5 & 9 \\ 6 & -1 & 21 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 6 & 4.2 & 3 \\ 8 & -2.8 & 4 \\ 20 & 3.5 & 15 \end{vmatrix}$.

解：

(1) $$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 8 & 5 & 9 \\ 6 & -1 & 21 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 8 & 5 & 3 \\ 6 & -1 & 7 \end{vmatrix} \quad \text{(定理 4 推论 1)}$$

$$=3\begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 8 & 8 & 3 \\ 6 & 6 & 7 \end{vmatrix} \quad \text{(定理 7)}$$

$$=0; \quad \text{(定理 3)}$$

(2) $$\begin{vmatrix} 6 & 4.2 & 3 \\ 8 & -2.8 & 4 \\ 20 & 3.5 & 15 \end{vmatrix}=\frac{1}{10}\begin{vmatrix} 6 & 42 & 3 \\ 8 & -28 & 4 \\ 20 & 35 & 15 \end{vmatrix} \quad \text{(定理 4 推论 1)}$$

$$=\frac{1}{10}\times 2\times 7\begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 4 & -4 & 4 \\ 10 & 5 & 15 \end{vmatrix} \quad \text{(同上)}$$

$$=\frac{14}{10}\times3\times4\times5\begin{vmatrix}1&2&1\\1&-1&1\\2&1&3\end{vmatrix}\quad(\text{同上})$$

$$=84\begin{vmatrix}1&2&0\\1&-1&0\\2&1&1\end{vmatrix}\quad(\text{定理 7})$$

$$=84\times(-1-2)=-252.$$

例 2 利用行列式的性质，证明：

(1) $\begin{vmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{vmatrix}=0$; (2) $\begin{vmatrix}a+b&c&-a\\a+c&b&-c\\b+c&a&-b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b&a&c\\a&c&b\\c&b&a\end{vmatrix}$.

证明:

(1) $D=\begin{vmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-a&-b\\a&0&-c\\b&c&0\end{vmatrix}$ (定理 1)

$$=-\begin{vmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{vmatrix}\quad(\text{定理 4 推论 1})$$

$$=-D,$$

即

$$2D=0,$$

所以

$$D=0;$$

(2) $\begin{vmatrix}a+b&c&-a\\a+c&b&-c\\b+c&a&-b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b&c&-a\\a&b&-c\\c&a&-b\end{vmatrix}$ (定理 7)

$$=-\begin{vmatrix} b & c & a \\ a & b & c \\ c & a & b \end{vmatrix} \qquad \text{(定理 4 推论 1)}$$

$$=\begin{vmatrix} b & a & c \\ a & c & b \\ c & b & a \end{vmatrix}. \qquad \text{(定理 2)}$$

练　习

1. 利用行列式的性质，计算下列行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 10 & 1 & 11 \\ 7 & 1 & 8 \end{vmatrix}$; $=-19$　　(2) $\begin{vmatrix} 3 & 49 & 4 \\ 2 & 28 & 2 \\ 4 & 35 & 8 \end{vmatrix}$; $=-98$

(3) $\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 3 \\ 7 & 5 & 14 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{4}{15} \end{vmatrix}$; = [illegible]　　(4) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$. $=-7$

2. 利用行列式的性质，计算：

(1) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$; $=2(a+a^2x)$　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$; $=0$

(3) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}$. $=0$

$=ab-ac-bc$

3. 不展开行列式，证明下列等式：

$$(1)\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & q & p+q \\ q & p & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(2)\quad \begin{vmatrix} -a+b+c & a & -b \\ a-b+c & b & -c \\ a+b-c & c & -a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a & c \\ c & b & a \\ a & c & b \end{vmatrix}.$$

1.4 按一行(或一列)展开三阶行列式

在三阶行列式的展开式中，如果把含 a_1, a_2, a_3 的项分别合并，并提出公因子，就得

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2$$

$$\begin{aligned} &-a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2 \\ &= a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2 (b_3 c_1 - b_1 c_3) \\ &\quad + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1) \\ &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}. \quad (1) \end{aligned}$$

我们引进两个新的概念.

把行列式中某一元素所在的行与列划去后，剩下的元素组成的行列式叫做对应于这个元素的余子式. 例如在行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

中，对应于元素 a_2 的余子式为