数学分析选讲

SHUXUE FENXI XUANJIANG

元　鲁　卢若飞◇著

广西民族出版社
GUANGXI MINZU CHUBANSHE

数学分析选讲

元　鲁　卢若飞　编著

广西民族出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析选讲/元鲁,卢若飞编著.一南宁:广西民族出版社,2006.8

ISBN 7-5363-5140-2

Ⅰ.数… Ⅱ.①元… ②卢… Ⅲ.数学分析 Ⅳ.O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 104254 号

数学分析选讲

元 鲁 卢若飞 编著

出版发行	广西民族出版社 (地址:南宁市桂春路 3 号 邮政编码:530021)
发行电话	(0771)5523216 5523226 5523246(传真)
E-mail	CR@gxmzbook.cn
责任编辑	黄玉群
特邀编辑	马 辉
封面设计	玉荣奖
责任校对	苏兰清
责任印制	余秀玲
印 刷	广西地质印刷厂
开 本	890×1240 1/32
印 张	8
字 数	200 千
版 次	2006 年 8 月第 1 版
印 次	2006 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 7-5363-5140-2/G·2043 定价:12.00 元

前　言

本书是为报考数学类专业硕士研究生的本科学生编写的.按照数学分析的教学大纲要求,强调学生的综合能力.这个综合能力表现在两个方面:一是对一个具体学科的数学理论的归纳能力,即明确基本问题是什么,基本思想是什么,基本方法有哪些.二是灵活运用相关理论和方法解决某一个具体的数学问题,熟练地运用数学工具.本书分为六章:一元函数的极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数与广义积分.其内容顺序与通常教材的顺序基本一致.每节附有一定的练习题,以便读者自己检验学习的效果.

本书作为一门选修课的教材,可用60个学时讲完.作者的愿望是:既要覆盖主要的考研知识点,又要精简浓缩相应的基本内容,使学生在教师的引导下,通过精读与讨论的方式,对数学分析课程的基本概念、理论、方法能有较为完整系统的认识.关于学习方法,建议读者尽可能按内容提要复习相应的定理;对每道例题尽可能先自己独立思考,想出解题方法并解答,再看书上的解法;关于练习题,附有提示,供参考;不附答案,是希望读者把注意力放在审视解题过程是否正确,而不要满足于对答案。

编者

2006年8月

目 录

第一章　一元函数的极限与连续

极限理论是数学分析的基础，也是难点. 极限理论的基本问题有两个：一是确定变量在某个变化过程中是否有极限；二是设法求出这个极限. 在很多场合下，往往是必须先解决第一个问题才能着手解决第二个问题或求出近似解. 连续是一种特别有用的极限情形.

§1　极　限

一、证明极限的存在性(与不存在性)

证明极限存在常用到的基本内容：极限的定义，Cauchy 准则，Heine 定理，收敛公理以及 Stolz 法则(有的教材不作介绍)，上、下极限等. 为了使用方便，下面给出有关知识.

1. 极限的定义

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N, \forall n>N$，有 $|a_n-a|<\varepsilon$.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

2. Cauchy 准则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N, \forall n,m>N$，有 $|a_n-a_m|<\varepsilon$.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x_1,x_2$，使得当 $0<|x_1-x_0|<\delta, 0<|x_2-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

3. Heine 定理

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\ \exists U^0(x_0),\forall\{x_n\}\subset U^0(x_0)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在$\Leftrightarrow\exists U^0(x_0),\forall\{x_n\}\subset U^0(x_0)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，有$\{f(x_n)\}$收敛于同一数值.

4. 收敛公理

(1)若数列$\{a_n\}$单调有界，则必有极限.

(2)若函数 $f(x)$在某区间内单调有界，则 $f(x)$在该区间内任一点处存在左、右极限(定理).

5. Stolz 法则

定理 1 $\left(\frac{*}{\infty}\text{型}\right)$　设数列$\{a_n\}$严格递增，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$，若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=\begin{cases}A,\\+\infty,\\-\infty,\end{cases}\text{则}\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\begin{cases}A,\\+\infty,\\-\infty.\end{cases}$$

定理 2 $\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)$　设数列$\{a_n\}$严格递减，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$，若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=\begin{cases}A,\\+\infty,\\-\infty,\end{cases}\text{则}\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\begin{cases}A,\\+\infty,\\-\infty.\end{cases}$$

6. 上、下极限

定义　设$\{a_n\}$为有界数列，则$\{a_n\}$的所有收敛子列的极限的上、下确界分别称为$\{a_n\}$的上、下极限，记作 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n$，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n$.

定理　有界数列$\{a_n\}$收敛$\Leftrightarrow\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n$，这时，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n$.

例 1　设 $f(x)$在$[a,b]$上连续且 $f(x)>0$，M 为 $f(x)$在$[a,b]$上的最大值，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b[f(x)]^n\mathrm{d}x}=M$.

分析　证明的思路：

①用极限的定义，考虑 $\left|\sqrt[n]{\int_a^b [f(x)]^n \mathrm{d}x}-N\right|$.

②用上、下极限证明极限存在，再确定极限值为 M. 在此采用思路②较为简捷.

证明　因为 M 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值，

所以 $\sqrt[n]{\int_a^b [f(x)]^n \mathrm{d}x} \leqslant \sqrt[n]{\int_a^b M^n \mathrm{d}x} = M\sqrt[n]{b-a}$,

由此可知 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\int_a^b [f(x)]^n \mathrm{d}x} \leqslant M$.　　(1)

又因为　$\forall \varepsilon>0(\varepsilon<M)$，$\exists [c,d]\subset[a,b]$，使在 $[c,d]$ 上，$f(x)>M-\varepsilon$，从而

$$\sqrt[n]{\int_a^b [f(x)]^n \mathrm{d}x} \geqslant \sqrt[n]{\int_c^d (M-\varepsilon)^n \mathrm{d}x} = (M-\varepsilon)\sqrt[n]{d-c},$$

故 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\int_a^b [f(x)]^n \mathrm{d}x} \geqslant M-\varepsilon$.　　(2)

由 ε 的任意性，得

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\int_a^b [f(x)]^n \mathrm{d}x} \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\int_a^b [f(x)]^n \mathrm{d}x},$$

所以，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b [f(x)]^n \mathrm{d}x}$ 存在，记为 A.

由式(1)、(2)可知　$M\geqslant A\geqslant M-\varepsilon$，

再由 ε 的任意性，可知　$A=M$.

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b [f(x)]^n \mathrm{d}x}=M$.

注：此例给出一个求正值连续函数在闭区间上的最大值的一般方法，值得注意.

例 2　设 $a_n\geqslant 0$，且 $a_{m+n}\leqslant a_m a_n$，证明：数列 $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ 收敛.

分析 若某个 $a_k=0$，则 $\forall n>k$，由题设，有 $a_n=0$，这时 $\sqrt[n]{a_n}\equiv 0$ $(n>k)$. 下面假设所有 $a_n>0$，并采用上、下极限的方法.

证明 由 $a_{m+n}\leqslant a_n a_m$，可知 $\sqrt[n]{a_n}\leqslant a_1$，

所以 $\{\sqrt[n]{a_n}\}$的上、下极限都存在.

令 $b_n=\sqrt[n]{a_n}$，$\varliminf\limits_{n\to\infty}b_n=B$，则易知 $\exists$ 子列$\{b_{n_k}\}$，使 $\lim\limits_{k\to\infty}b_{n_k}=B$，故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists k_0$，$\forall k\geqslant k_0$，有 $|b_{n_k}-B|<\varepsilon$. 于是，当 $n>n_{k_0}$ 时，设 $n=mn_{k_0}+t$，$0\leqslant t<n_{k_0}$，令 $A=\max\{a_0,a_1,\cdots,a_{n_{k_0}}\}$，$a_0=1$，则有

$$\begin{aligned}
b_n&=\sqrt[n]{a_{mn_{k_0}+t}}\\
&\leqslant\sqrt[n]{a_{mn_{k_0}}a_t}\\
&\leqslant a_{n_{k_0}}^{\frac{m}{n}}A^{\frac{1}{n}}\\
&=a_{n_{k_0}}^{\frac{1}{n_{k_0}}\cdot\frac{m\cdot n_{k_0}}{n}}A^{\frac{1}{n}}\\
&=b_{n_{k_0}}^{\frac{n-t}{n}}A^{\frac{1}{n}}.
\end{aligned}$$

当 $n>n_{k_0}$ 时，有

$$b_n\leqslant(B+\varepsilon)^{\frac{n-t}{n}}\cdot A^{\frac{1}{n}},$$

故 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}b_n\leqslant B+\varepsilon=\varliminf\limits_{n\to\infty}b_n+\varepsilon.$

由 ε 的任意性，有

$$\varlimsup_{n\to\infty}b_n\leqslant\varliminf_{n\to\infty}b_n,$$

所以$\{b_n\}$收敛.

即数列$\{\sqrt[n]{a_n}\}$收敛.

例 3 设 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$a_1=\sin x$，$a_{n+1}=\sin a_n$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n^2}{\frac{1}{n}}=3.$

分析 若直接考虑$\dfrac{a_n^2}{\frac{1}{n}}=\dfrac{\sin^2 a_{n-1}}{\frac{1}{n}}$，式中有两个变量，讨论不方

便. 于是考虑用 Stolz 法则将问题转化为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_n^2}}$.

$$\text{因为}\quad \frac{(n+1)-n}{\dfrac{1}{a_{n+1}^2}-\dfrac{1}{a_n^2}}$$

$$=\frac{a_n^2a_{n+1}^2}{a_n^2-a_{n+1}^2}$$

$$=\frac{a_n^2\sin^2 a_n}{a_n^2-\sin^2 a_n},$$

而最后一个式子只有一个变量 a_n，弄清楚 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$，就可以找到解决问题的办法了.

证明 由于 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，知 $\sin x\in(0,1)$，即 $a_1\in(0,1)$.

又由 $\sin a_1<a_1$，可知 $\{a_n\}$ 单调递减且大于零，

所以 $\{a_n\}$ 收敛.

再令 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，由题设的递推公式 $a_{n+1}=\sin a_n$，可得 $a=\sin a$，于是 $a=0$，运用 Heine 定理，考虑 $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t^2\sin^2 t}{t^2-\sin^2 t}$，由极限运算法则，有

$$\lim_{t\to0}\frac{t^2\sin^2 t}{t^2-\sin^2 t}=\lim_{t\to0}\frac{t^4}{t^2-\sin^2 t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{4t^3}{2t-2\sin t\cos t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{4t^3}{2t-\sin 2t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{12t^2}{2-2\cos 2t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{24t}{4\sin 2t}$$

$$=3.$$

因此，由 Heine 定理，可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n^2\sin^2 a_n}{a_n^2-\sin^2 a_n}=3.$

由 Stolz 法则，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_n^2}}=3,$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n^2}{\dfrac{1}{n}}=3.$

例 4 设 $\lim\limits_{n\to\infty}n(a_n-a_{n-1})=0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a.$

分析 由题设条件和目标，容易看出问题可转化为

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)=0,$$

在考虑后一极限时，设法用上条件 $\lim\limits_{n\to\infty}n(a_n-a_{n-1})=0.$

证明 令 $b_n=a_n-a_{n-1}$，则 $a_n=b_n+b_{n-1}+\cdots+b_1+a_0$，

故
$$\begin{aligned}
&a_n-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\\
&=b_n+b_{n-1}+\cdots+b_1+a_0-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\\
&=\frac{1}{n}[nb_n+nb_{n-1}+\cdots+nb_1+na_0\\
&\quad-(a_1+a_2+\cdots+a_n)]\\
&=\frac{1}{n}[nb_n+nb_{n-1}+\cdots+nb_1+na_0\\
&\quad-(na_0+nb_1+(n-1)b_2+\cdots+2b_{n-1}+b_n)]\\
&=\frac{1}{n}[(n-1)b_n+(n-2)b_{n-1}+\cdots+b_2].
\end{aligned}$$

令 $B_n=(n-1)b_n+(n-2)b_{n-1}+\cdots+b_2$

则 $B_{n+1}-B_n=nb_{n+1}$，

故 $$\lim_{n\to\infty}\frac{B_{n+1}-B_n}{(n+1)-n}=\lim_{n\to\infty}nb_{n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)b_{n+1}}{n+1}\cdot n$$

$$=0.$$

由 Stolz 法则，可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{B_n}{n}=0$，

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)=0$，

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

例 5 设函数 $f(x)$在$(a,+\infty)$内有定义且内闭有界，若 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=A$，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=A$.

分析 比较理想的证明思路是，考虑当 x 充分大时，$\left|\frac{f(x)}{x}-A\right|$能否转化(或变型)为形如$|f(t+1)-f(t)-A|$的式子，而证明的关键是将充分大的 x 考虑为$t+n$，t 是有限的值.

证明 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=A$，可知$\forall\varepsilon>0$，$\exists M>a$(且 $a>0$)，使得当 $x\geqslant M$ 时，$|f(x+1)-f(x)-A|<\varepsilon$.

特别地，当 $t\in[M,M+1]$时，$\forall n$，有

$$|f(t+n)-f(t+n-1)-A|<\varepsilon.$$

设在$[M,M+2]$上，$|f(x)|<C$，则$\forall t\in[M,M+1]$，有

$$\left|\frac{f(t+n)}{t+n}-A\right|$$

$$=\frac{1}{t+n}|f(t+n)-(t+n)A|$$

$$=\frac{1}{t+n}|f(t+n)-f(t+n-1)+f(t+n-1)$$

$$-f(t+n-2)+\cdots+f(t+2)-f(t+1)+f(t+1)$$

$$-f(t)-(t+n)A+f(t)|$$

$$\leqslant\frac{1}{t+n}[|f(t+n)-f(t+n-1)-A|+\cdots$$

$$+|f(t+1)-f(t)-A|+|f(t)|+t|A|)]$$

$$<\frac{1}{t+n}[n\varepsilon+C+(M+1)|A|]$$

$$<\varepsilon+\frac{1}{n}[C+(M+1)|A|],$$

由 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}[C+(M+1)|A|]=0$，可知，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，

$$\frac{1}{n}[C+(M+1)|A|]<\varepsilon;$$

从而 $\forall n>N$，$\forall t\in[M,M+1]$，有 $\left|\frac{f(t+n)}{t+n}-A\right|<2\varepsilon.$

这样，当 $x>M+N+1$ 时，$\exists n>N, t\in[M,M+1]$，使 $x=t+n$，

故 $\left|\frac{f(x)}{x}-A\right|<2\varepsilon.$

这就证明了 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=A.$

例 6 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 内恒正且内闭有界，若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}=A>0$，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]^{\frac{1}{x}}=A.$

分析 $[f(x)]^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln f(x)}$，于是应考虑 $\frac{\ln f(x)}{x}$ 的极限，而例 5 启发我们，可以考虑函数的差 $\ln f(x+1)-\ln f(x)$ 的极限.

证明 令 $g(x)=\ln f(x)$，则 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 内有定义且内闭有界，由题设，知

$$\lim_{x\to+\infty}[g(x+1)-g(x)]=\ln A,$$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\ln A,$

从而　$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]^{\frac{1}{x}}=e^{\ln A}=A.$

注：此例中的 A 是否等于 0，是一个悬而未决的问题.

例 7　设 $a_1>0,a>1,a_{n+1}=\dfrac{a(1+a_n)}{a+a_n}$，证明：$\{a_n\}$收敛.

分析　数列用递推形式给出，较为可行的证明思路是：①考虑用收敛公理证明；②Cauchy 准则.

证法 1　用收敛公理证明.

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=\frac{1}{a+a_n}(a+aa_n-aa_n-a_n{}^2)\\&=\frac{a-a_n^2}{a+a_n}.\end{aligned}$$

若 $a_1=\sqrt{a}$，则 $a_2=a_1,a_3=a_2,\cdots,a_{n+1}=a_n=\sqrt{a}$，当然$\{a_n\}$收敛.

若 $a_1>\sqrt{a}$，则 $a_2<a_1$，且

$$\begin{aligned}a_2&=\frac{a+aa_1}{a+a_1}\\&=\frac{a(a+a_1)+a-a^2}{a+a_1}\\&=a+\frac{a-a^2}{a+a_1}\\&<a+\frac{a-a^2}{a+\sqrt{a}}\\&=\sqrt{a}.\end{aligned}$$

于是又可推出　$a_3<a_2,a_3>\sqrt{a},\cdots$

即$\{a_n\}$单调递减且有下界$\sqrt{a}$，

故$\{a_n\}$收敛.

若 $a_1<\sqrt{a}$，则 $a_2>a_1$，且

$$a_2=a+\frac{a-a^2}{a+a_1}>a+\frac{a-a^2}{a+\sqrt{a}}=\sqrt{a}.$$