

武漢水利學院
學報

2

1957

目 錄

重力壩內部應力的圖解分析.....	王鴻儒 (1)
重力壩內部應力分析的幾種方法	李新民 (9)
下荆江河道過度彎曲原因的初步探討.....	姚琢之 (25)
論挾沙水流的能量平衡問題.....	謝鑑衡 (35)
灌溉渠道的滲漏及其對灌區地下水動態的影響.....	張蔚榛 (69)
由暴雨推算洪水流量過程線.....	胡榮軒 (91)
予應力竹纜混凝土受彎構件的試探性試驗 報告.....	
.....	俞富耕 賀采旭 黃蒲三 何少溪 (127)
法方程式的逐漸接近解算法.....	呂惟安 (139)
拱在豎向荷重作用下內力圖的校核.....	黃克中 (159)
差分方程式求圓拱臨介壓力近似解.....	王 磊 (165)

重力壩內部應力的圖解分析

王 鴻 儒

重力壩內部應力的分析有許多方法，但一般計算工作量都很大，其中有些方法也還不夠精確。爲了克服這種困難，作者現擬提出下述的圖解方法。不妥之處，尙望讀者指正。

力學圖解是工程上廣泛應用的、既簡便而且足夠精確的方法之一，圖解與計算配合運用也往往達到最好的效果。重力壩壩內壓力線的圖解方法由來已久，但用圖解進一步分析其內部應力則至今尙未有人倡議。爲了系統地說明這一問題，故仍將現有的幾個有關的圖解方法按應用的先後次序插入本文，以供參考，但不加詳細說明。

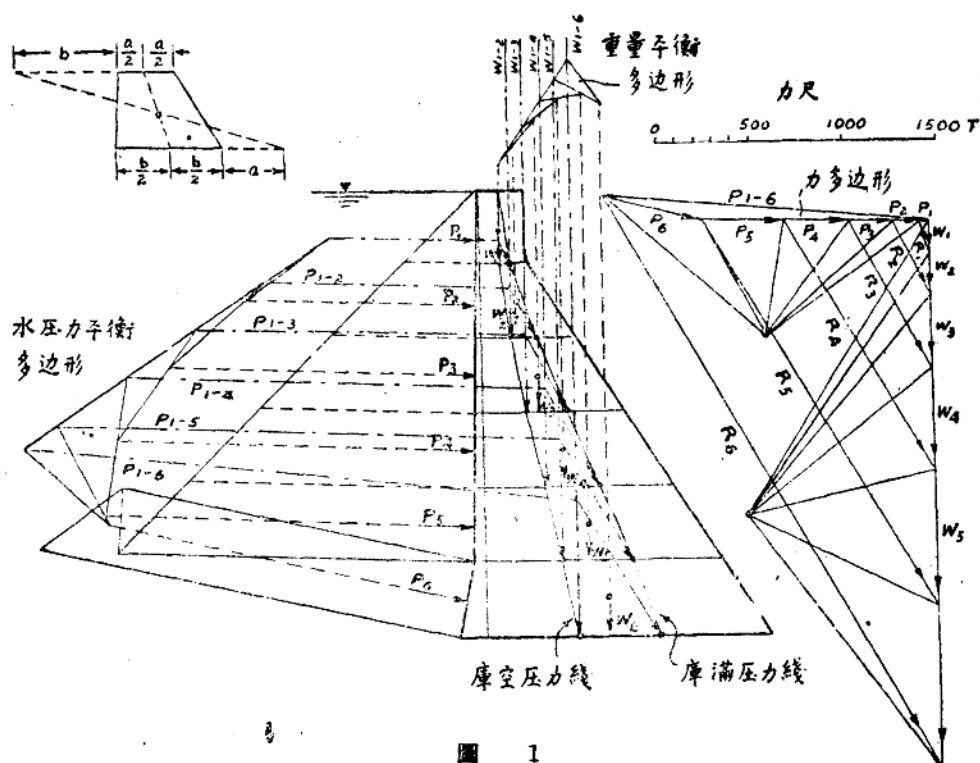


圖 1

重力壩內部應力的分析，歸根結底，就在於求出壩內各點（或若干點）的 σ_y 、 σ_x 和 τ ①，以便尋找其主應力數值和主應力方向，繪出壩的主應力圖或主應力等值線和主應力方向線。壩內各點的應力可以按下列步驟予以確定。

1. 壩內壓力線

旭克列許在其所著“水利工程學”中寫道：“重力壩的靜力分析最好是採用圖解法來完成。”②圖1乃為常用的重力壩的靜力圖解方法。

2. 水平斷面上的正應力

一般假定水平斷面上的正應力按直線分佈。理論上說，這一假定只有在無限高的三角形剖面的重力壩內，當庫空或庫滿而僅受靜水壓力作用時，才是正確的。在實際情況下，在靠近壩的輪廓變化的地方，或接近地基的部分，或負載情況與此不同，都可以引起局部的或範圍較大的應力分佈上的相應變化。一般說來，這一假定雖不完全正確，但它可使計算大為簡化，而其所引起的誤差對於低的以及中等高度的重力壩是可以允許的，③對於高壩則可以作為其他精確方法的校核計算。

壩內壓力線確定以後，各水平斷面上正應力的圖解方法如圖2。

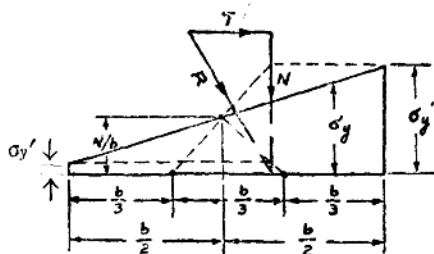


圖 2

3. 邊緣應力

圖3，a表示為了求邊緣應力 σ_x' 、 τ' 及 σ_x'' 、 τ'' 所取的元素三角形；圖3，b則表示為了求邊緣主應力 N_2' 及 N_1'' 所取的元素三角形（其餘的邊緣主應力為

① σ_y 為水平斷面上的正應力 σ_x 為垂直斷面上的正應力， τ 為水平斷面（或垂直斷面）上的剪應力；壩的上游面的應力附以“'”，下游面的應力附以“''”；又正應力以壓應力為正，剪應力則以使割體順時針方向轉動者為正，參看圖3，a。

② A. Schoklitsch, Hydraulic Structures, N.-Y., 1937. P.520.

③ П.И.戈爾劍科：水工結構，高教出版社，上冊，93頁。

$N_1' = p'$, $N_2' = p''$, 即是垂直於上、下游壩面的水及泥沙壓力)。容易得出, 對於壩的上游面, 計算邊緣應力的公式是:

$$\sigma_x' = p' - (p' - \sigma_y') \tan^2 \phi_1; \quad (1)$$

$$\tau' = (p' - \sigma_y') \tan \phi_1; \quad (2)$$

$$N_2' = \sigma_x' - (p' - \sigma_y'). \quad (3)$$

對於壩的下游面, 則為:

$$\sigma_x'' = p'' + (\sigma_y'' - p'') \tan^2 \phi_2; \quad (4)$$

$$\tau'' = (\sigma_y'' - p'') \tan \phi_2; \quad (5)$$

$$N_1'' = \sigma_x'' + (\sigma_y'' - p''). \quad (6)$$

由這些公式可擬出下列的應力圖解法:

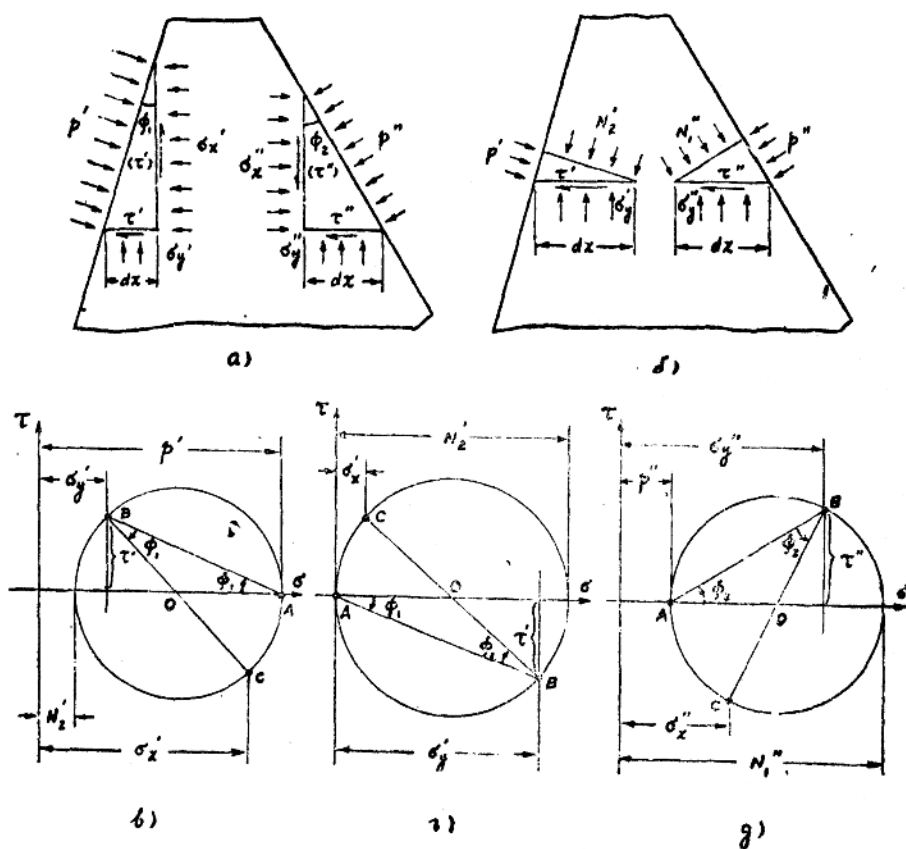


圖 3

圖 3, B 為庫滿時壩的上游面某點的應力圖。這時 p' 、 σ_y' 及 ϕ_1 為已知, 求 σ_x' 、 τ' 及 N_2' 。作圖步驟見圖可知。

圖 3, r 為庫空時 ($p'=0$) 壩的上游面某點的應力圖。這時 ϕ_1 應從水平軸向下量。

圖 3, π 為壩的下游面某點的應力圖; 若該點在下游水位以上, 則 $p''=0$, 但作圖圖形不改。

利用應力圓以圖解邊緣應力, 一次可以求得幾個未知量, 可能比較省事。

4. 水平斷面上的剪應力

如已假定水平斷面上的正應力按直線分佈, 則水平斷面上的剪應力就一定作拋物線分佈。通常的方法是由已知數值 τ' 、 τ'' 及 T 求出代數方程式 $\tau = A + Bx + Cx^2$ 的係數, 然後根據方程式逐點計算剪應力數值。④

由於這一拋物線的對稱軸線是鉛直的, 如果所取 τ 座標軸與對稱軸線相重合, 則該拋物線的方程式可寫為

$$\tau = \tau_0 + kx^2. \quad (7)$$

根據這些條件, 即: 當 $x = -m$, $\tau = \tau'$; 當 $x = n$, $\tau = \tau''$; 又 $\int_{-m}^n \tau dx = T$; 並 $m+n=b$, 便可確定拋物線頂點的位置:

$$m = \frac{bu}{3v}; \quad (8)$$

$$\tau_0 = \tau' - \frac{u^2}{3v}. \quad (9)$$

$$\text{式中} \quad u = 2\tau' + \tau'' - 3T/b; \quad (10)$$

$$v = \tau' + \tau'' - 2T/b. \quad (11)$$

$$\text{又} \quad k = \frac{3v}{b^2}. \quad (12)$$

既已求得該拋物線的頂點 $c(m, \tau_0)$, 用通常的作圖法就可以繪出拋物線, 如圖 4。當頂點一側的曲線已繪出後, 他側曲線亦可根據對稱性繪製。

④ Creager W.P., Jucin J.D. and Hinds J., Engineering for dams, N.-Y.

1945. P. 411-412

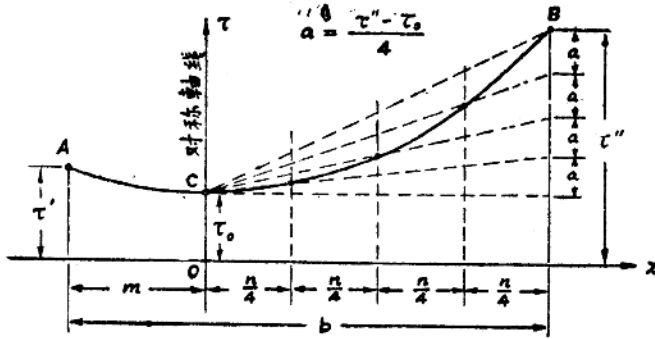


圖 4

5. 垂直斷面上的正應力

在現有的各種方法中，除羅占諾夫假定 σ_x 沿水平線亦作直線變化以致失之過簡而外，其餘的計算方法都很麻煩。作者現根據彈性理論的基本關係式提出一種圖解方法，計算工作量便十分微小。按彈性理論，在平面應力狀態下，當單位體積力為常數時， σ_x 與 σ_y 之和應滿足拉氏方程式^⑤，即

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = 0, \quad (13)$$

$$\Theta = \sigma_x + \sigma_y. \quad (14)$$

如所週知，在既知的邊界條件下，拉氏方程式之解是可以圖解來進行的。不論邊界條件如何複雜，圖解都比較便捷，並可以根據實際要求選擇圖解的精密度。

既知的邊界條件是：a) 在壩頂，取 $\Theta = 0$ ；b) 在壩的上、下游面，按各點已知的邊緣應力，以 σ_x 加 σ_y ，求出 Θ ，寫在壩面該點上；B) 在壩與地基的接觸線上，可選擇其他計算方法求出 σ_x 的分佈，從而求出 Θ 的分佈（ σ_y 的分佈仍假定是直線的）。

由於地基的影響，緊靠地基部分的壩身應力計算每不易準確，設假定 Θ 沿壩底按直線而變化（在這裏，與羅占諾夫的假定相當）也未必較某些繁雜的計算方法引起更大的誤差。而且，這一誤差僅限於壩底附近，距壩底稍遠，影響即逐漸消滅。

圖 5 表示根據從上、下游壩面的邊緣應力所算得的 Θ 值，以及假定壩底 Θ 值按

⑤ Филоненко-бородич М. М., Теория упругости, Техтеоретиздат, 1947, стр.

直線變化時所繪成的正方格子的 Θ 等值線網。

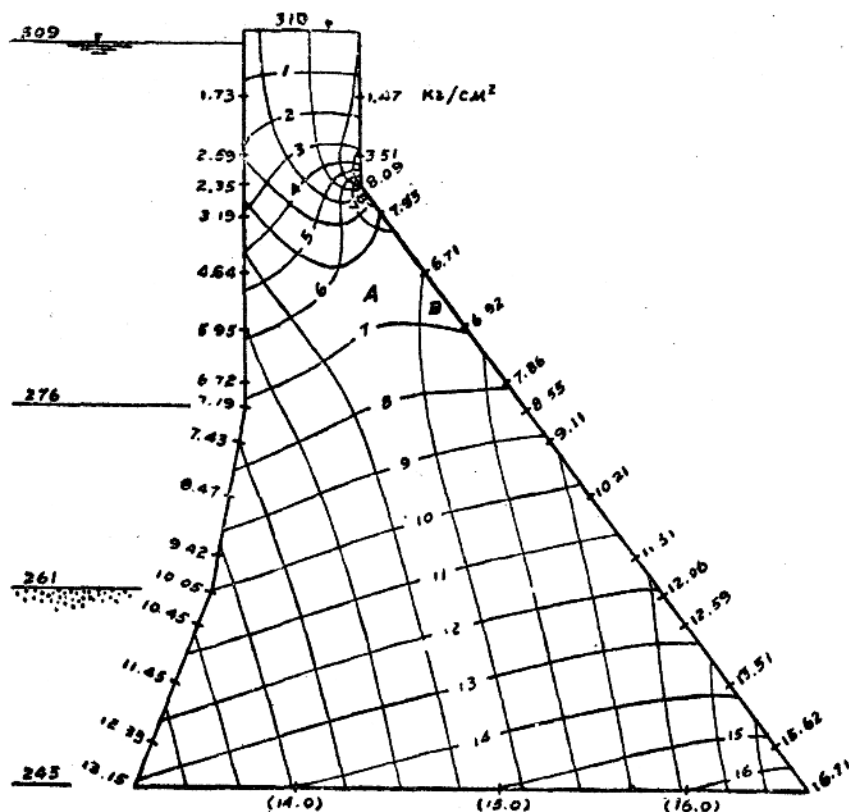


圖 5

繪製 Θ 等值線網的方法和繪製滲透流網相同，但由於 Θ 等值線與邊界斜交增加了圖解的困難。這時還應考慮到等值線網在壩斷面範圍以外的聯系，即如將各線適當向外伸延時仍應能交織為方格網狀。在這種等值線網中可能出現六邊的格子（如圖5中之A），並在數值相同的兩等值線間的一列格子（如圖5中之B及自此向右伸延時所構成的格子）通常不成方形而為相似的長方形。

理論上說，不論邊界條件如何，一個既滿足拉氏方程式又符合一定邊界條件的 Θ 等值線網都是存在着的。實際上，邊緣應力計算的錯誤可能使邊界數據失去基本規律，造成圖解上的困難，有時甚至是難以克服的困難，即雖其中一點有錯誤也能

造成相當大的範圍內格子的變形。也正因為這樣，這些錯誤就可能在圖解中被察覺出來。圖 5 的 Θ 等值線網是根據武漢水利學院李子毅同志的畢業設計的計算數據繪製的。這些數據雖未經校核，但所繪 Θ 等值線網，除一、二點外，與邊界數據密切符合。

由於邊緣應力的計算是以水平斷面上正應力按直線分佈的假定為根據的，因此根據它們所作出的 Θ 等值線網也應當認為是近似的。

在任何一點，從等值線網中讀出 Θ ，減去 σ_y ，即得 σ_x 。這一計算也可就各水平斷面用圖解來進行。

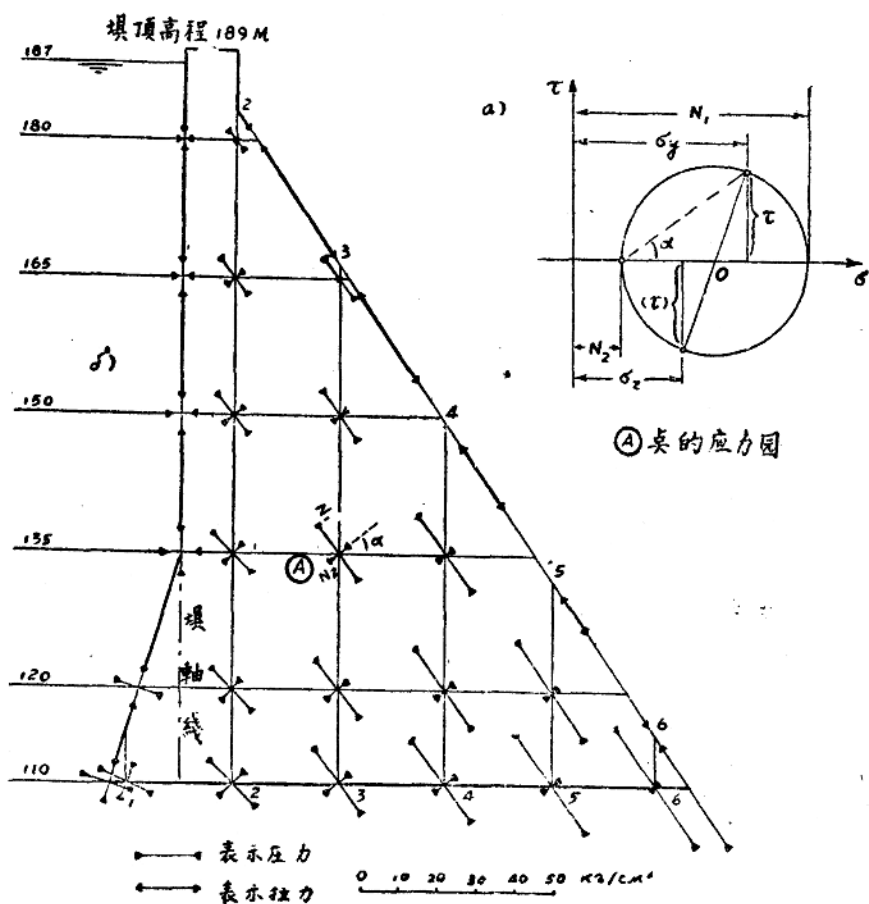


圖 6

從繪成的 Θ 等值線網可見在很大範圍內 Θ 等值線趨向於平行，這一事實說明：在這些地方， σ_x 沿水平斷面亦作直線分佈的假定是接近正確的；但同樣也可以看到：在另外某些地方就可能相差較大。

6. 壩內主應力

壩內各點的 σ_y 、 σ_x 和 τ 之值既已求得，便可以計算主應力。如所週知，利用應力圓來求主應力遠較用公式計算為省事，圖6,a表示壩內A點（高程135公尺的水平斷面和第3號垂直斷面的交點）的應力圓。圖中指出第一主應力面的方向，第二主應力面則與之相垂直。

各點主應力求得以後，將其大小及方向記入圖中，便成為主應力圖（圖6,b為某壩無地震力作用時的主應力圖）。也很容易根據它繪出主應力等值線和主應力方向線。主應力方向線常與壩的一面垂直，而以另一面為其漸近線。

在以上一系列的圖解中，應分別選定適當的距離、力和應力的比例尺以滿足一定精密度的要求。各圖應按水平斷面高程和垂直斷面號碼分別標明，免於混亂，也便於檢查。

結 語

本文推薦用一系列的圖解方法分析重力壩內部的應力，並創擬 τ 拋物線和 $\Theta(\Theta=\sigma_x+\sigma_y)$ 等值線網的簡便解法。應用這些圖解方法可以節省大量的計算時間，錯誤的機會也比較少。圖解的精密度雖然受到可能採用的比例尺及其他條件的限制，但認為可以滿足一般壩工設計的要求，而圖解與計算配合運用也往往達到最好的效果。

重力壩內部應力分析的幾種方法

李 新 民

爲了設計穿過壩身的水管，設計廊道，設計縱向伸縮縫，繪製主應力軌跡線等，壩身內部應力的分析是必要的。自從1898年列維⁽¹⁾ 提出分析楔內應力的方法後，各國陸續提出了許多分析重力壩內部應力分析的方法。迄今還沒有看見一篇文章對這些方法進行綜合性的討論，加以分類比較，介紹各法的優缺點或提供有關工程應用方面的意見。作者試圖進行這項工作，提出主要的分類及其討論。不妥之處，尚祈批評指正。

重力壩內部應力分析法可以分成多類。根據不同的特點，可作不同的分類。按照力學的觀點，可分三類：彈性力學法，指分析時須應用平衡方程與相容方程者；材料力學法，指只應用一般材料力學方法者；混合法，指部分用彈性力學而另一部份用材料力學法者。這樣的分類法似嫌籠統，因分析方法很多，仍須再細爲分類，（例如彈性力學法又可細分爲幾類方法），嫌太麻煩了。作者建議，按照這些方法所採用的假定或方法的突出的特點分類。有些分類名稱是前人所未提出者，由作者擅爲擬定，是否妥當，提供討論。下面將扼要介紹所分各類方法的內容及可歸入同類的方法，並從工程應用的觀點酌予討論。

(1) 簡化應力分佈法

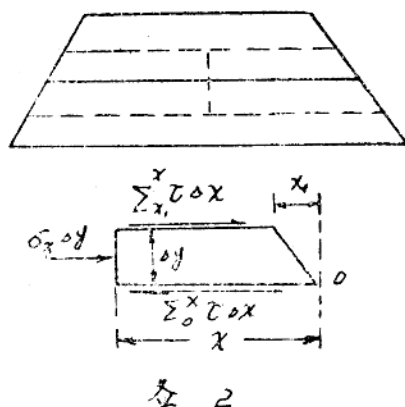
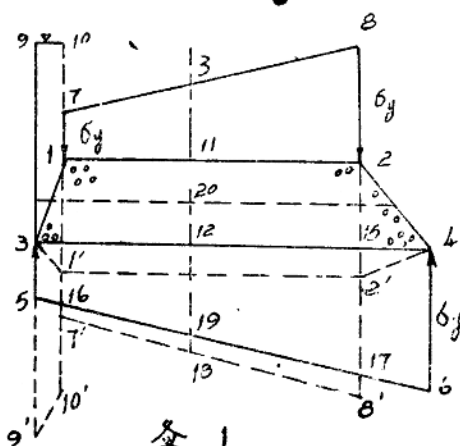
這一類方法採用應力分佈是直線的假定。因此，可用偏心受壓公式計算任一水平剖面上的正應力 σ_y 。又因壩的上游面與下游面都是主應力面，即可求得壩面任意點的應力 σ_y ， σ_x 與 τ_{xy} 。按照任一水平剖面上各種應力的分佈都是直線的假定，可以迅速地求得壩身內部任意點的 σ_y ， σ_x 與 τ_{xy} ，從而求出在該點主應力及主應力方向。這個方法是簡單的，也是對內部應力分析不了解時會採用的。旭克列許⁽²⁾ 在其名著中說：內應力之實在分佈無法確悉，但可假定其分佈約略爲直線狀。

簡化應力分佈法的最大優點是方法最簡單，而且在某些情況計算結果還可認爲是可靠的。如所週知，在擋水的無限高的三角形壩體內，各種應力的分佈均是直線

的⁽¹⁾⁽³⁾。但壩的剖面不可能真是三角形的。壩的剖面與三角形愈不相同時，按此法計算所得結果將愈不準確。在壩工設計，此項應力分析法是粗糙的，一般不宜採用。

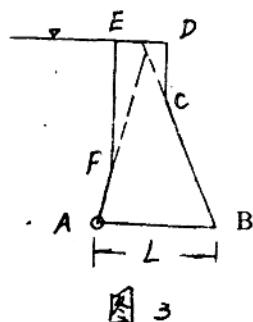
(2) 幾何法

在1903年，開因⁽⁴⁾⁽⁵⁾建議，除豎直正應力仍用偏心受壓公式計算外，剪應力與水平正應力均可用幾何法求得。例如，取單位高度壩身，計算其頂及底所承受的豎直正應力，如圖1所示。此單位高度壩身必在平衡狀態。在壩身切取任意剖面11-12，如豎向力不能平衡，必在面11-12上產生剪應力。當所取高度很小，可認為如此求得的就是在點20的水平剪應力。爲了求水平正向應力 σ_x ，可取脫離體如圖2。在此脫離體頂與底的水平剪應力 τ 均已求得後，即可應用平衡條件求得 σ_x 。因此壩身內部任意點的任何應力均可求得。



此法的優點是所代表的物理觀念簡單明瞭。可以看出，雖然在圖1中 σ_y 是按直線分佈，只有當頂面與底面 σ_y 分佈線的坡度相同時，剪應力 τ 的分佈才是直線的。在實際壩身內，各不同高程水平剖面上 σ_y 分佈線的坡度是不相同的，因此通常認為剪應力是按拋物線分佈的。在圖2中，應用平衡條件求 σ_x 時須計入水平剪應力沿水平面(x)的累積，因此 σ_x 應按三次方拋物線分佈。這說明了，在一般壩工設計上，簡化應力分佈法是不正確的。例如，在圖3中，壩頂等厚部份任一水平

剖面上剪應力分佈是對稱的拋物線⁽⁶⁾，在 C 點以下的水
平剖面，剪應力的分佈變成不對稱的拋物線，最大的剪
應力逐漸接近下游壩面。這種變化是由壩身的幾何形態
及受外力情形共同決定的。幾何法的缺點是計算工作
量很大。爲了求得可靠的結果，所謂單位高度壩身的高
度必須很小，例如須小於 1 呎⁽⁵⁾，而爲了求得 σ_y 的差，
所用有效數字必須多於 6 位。因此，曾爲過去工程設計
所採用的幾何法，今後不宜再用。



(3) 代 數 法

本法是以前法爲基礎而提出的。前面已指出，當沿水平面上 σ_y 是按直線分佈
時，剪應力 τ 的分佈通常是拋物線，其一般方程式可寫做

$$\tau = A + BX + CX^2$$

利用邊界條件，（例如，圖 3 中在 A 點及 B 點的水平剪應力均爲已知）。又因總
水平外力 = 總剪應力，即

$$\Sigma P = \int_0^L \tau dx$$

解聯立方程式可求係數 A B 及 C。同樣，前面已指出，當剪應力分佈是按二次拋
物線時，水平應力 σ_x 的分佈將是三次拋物線，其一般方程式可寫做

$$\sigma_x = D + EX + FX^2 + GX^3$$

任一水平剖面的上游端與下游端的 σ_x 均是已知值。必須再利用兩個條件方能解得
上式的四個未知數。可以採用(2)節的方法（參閱圖 2）求得 σ_x ，與(2)節稍不同
的是可用剪應力的積分式而不必用總和法，但計算工作仍嫌太繁。在最近全蘇水利
科學院出版的水工手冊中⁽⁷⁾，羅占若夫認爲可以假定水平應力 σ_x 的分佈按直線計
算，以簡化計算工作。即令 $F=G=0$ ，利用壩面 σ_x 是已知值的條件，可求係數
D 與 E。

用代數法求剪應力比用幾何法方便多了，求水平應力也可方便些。依照羅占若
夫的意見，可用簡化應力分佈法計算水平應力 σ_x ，計算得到簡化，但引起一些誤
差。作者建議，對不太高的重力壩進行初步設計時，似可允許採用代數法求內部應

力，但仍以採用(4)節或(5)節提出的方法更為相宜(因精確度較高)。

(4) 簡化相容條件法

用彈性力學方法分析壩身應力時，因邊界條件複雜(例如圖4所示得聶布爾壩)，求解相容方程找應力函數常感困難。根據一般實驗，壩身內豎向應力 σ_y 沿水平剖面的分佈常是與直線相接近的。工程設計常採用簡化相容條件法，即假定與應力 σ_y 沿水平面作直線分佈相應的變形作為壩身變形的相容條件。因此，可不用相容方程，而直接用偏心受壓公式計算 σ_y ，再用平衡方程計算 σ_x 與 τ 。當然這不是一個精確的方法，但一般認為除了特殊重要的工程外，這個方法是夠滿意的。目前我國有一些工程(如501工程及佛子嶺工程)採用美國壩務局製定的方法，



圖 4

那是根據該局多年實際工作經驗，由克恩⁽⁸⁾總結出來的。在計算剪應力時，仍然先假定 τ 的分佈是拋物線，再用代數法列出 τ 的方程式。計算水水平應力 σ_x ，則利用平衡方程，用數學展開法，推得任意形態壩身內的水平應力 σ_x 的式子，原式極長，包括一系列偏微分方程形式的式子。克恩在結論⁽⁸⁾中指出，雖然這些式子長得可怕，但分析却只需任何其他近似解法所需時間的四分之一，(註：可能指的是幾何法)。在1951年作者提出一個方法，可不必先假定剪應力分佈是拋物線，所得水平應力的式子比克恩式子縮短很多，計算所需時間可節省一半。茲作簡短說明。先寫下平衡方程，

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} - \gamma_1 = 0 \quad (4-1)$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \quad (4-2)$$

又採用簡化相容條件，可寫在任一水平剖面上任一點的豎直應力為，

$$\sigma_y = \sigma_{yu} + \frac{\sigma_{yd} - \sigma_{yu}}{L} X \quad (4-3)$$

進行微分得(x 係自上游壩面量起，如上游壩面是傾斜

的， x 應視作 y 的函數， $\frac{dx}{dy} = -\tan \varphi_u$)，

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \frac{\partial \sigma_{yu}}{\partial y} + \left(\frac{\partial \sigma_{yd}}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_{yu}}{\partial y} \right) \frac{X}{L} - (\sigma_{yd} - \sigma_{yu}) \frac{X}{L^2} \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\sigma_{yd} - \sigma_{yu}}{L} \tan \varphi_u$$

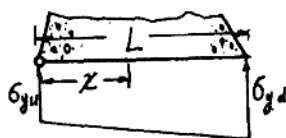


圖 5

代入式(4-1)並沿水平面積分得,

$$\tau = A + \left(\gamma_1 - \frac{\partial \sigma_{yu}}{\partial y} + \frac{\sigma_{yd} - \sigma_{yu}}{L} \tan \varphi_u \right) X - \left[\left(\frac{\partial \sigma_{yd}}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_{yu}}{\partial y} \right) - (\sigma_{yd} - \sigma_{yu}) \frac{\partial L}{L \partial y} \right] \frac{X^2}{2L} = A + BX + CX^2 \quad (4-4)$$

顯然, 剪應力分佈是拋物線而無須假定。利用邊界條件及平衡條件, 可求出積分常

數 A 及 $\frac{\partial \sigma_{yu}}{\partial y}$ 與 $\frac{\partial \sigma_{yd}}{\partial y}$ 二未知值, 從而求得係數 B 與 C 如下:

$$A = \tau_u; B = \frac{2}{L} \left(\frac{3 \Sigma P}{L} - \tau_d - 2 \tau_u \right); C = \frac{3}{L^2} \left(\tau_u + \tau_d - \frac{2 \Sigma P}{L} \right) \quad (4-5)$$

在上式中, τ_u , τ_d 與 ΣP 分別代表已知的在上游壩面, 下游壩面的水平剪應力與全部水平外力。這個答案與克思所得者相同。從式(4-4)可得出兩個計算水平應力 σ_x 有用而形式很簡單的式子如下 ..

$$\frac{\partial \sigma_{yu}}{\partial y} = \gamma_1 - B + \frac{\sigma_{yd} - \sigma_{yu}}{L} \tan \varphi_u \quad (4-6)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yd}}{\partial y} = \gamma_1 - B - 2CL + (\sigma_{yd} - \sigma_{yu}) \frac{\tan \varphi_d}{L} \quad (4-7)$$

根據式(4-2)與式(4-4)可寫,

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = - \frac{\partial \tau}{\partial y} = E + 2FX + 3GX^2 \quad (4-8)$$

$$\sigma_x = D + EX + FX^2 + GX^3 \quad (4-9)$$

當 $x=0$ 及 $x=L$ 時, σ_{xu} 與 σ_{xd} 是已知值, $\left(\frac{\partial \tau}{\partial y} \right)_u$ 與 $\left(\frac{\partial \tau}{\partial y} \right)_d$ 亦可求得, 因此 D ... G 四個係數均可解出。因

$$\tau_u = (\sigma_{yu} - P_u) \tan \varphi_u$$

式中 σ_{yu} 為在上游壩面處豎直應力, P_u 為上游壩面所受單位外力(即水壓力, 如有其他壓力亦應計入), φ_u 為上游壩面與豎直線所成角度。將此式微分得

$$\frac{\partial \tau_u}{\partial y} = \left(\frac{\partial \sigma_{yu}}{\partial y} - \frac{\partial p_u}{\partial y} \right) \tan \varphi_u - (\sigma_{yu} - p_u) \frac{\partial \tan \varphi_u}{\partial y}$$

水壓力 $p_u = \gamma y$, 則 $\frac{\partial p_u}{\partial y} = \gamma$ 。又 $\frac{\partial \tan \varphi_u}{\partial y}$ 在曲線上有值, 在壩面是直線段則

$\frac{\partial \tan \varphi_u}{\partial y} = 0$, 在壩面折線交點處可酌取近似值。再將式(4-6)代入上式得,

$$\frac{\partial \tau_u}{\partial y} = \left(\gamma_1 - B + \frac{\sigma_{yd} - \sigma_{yu}}{L} \tan \varphi_u - \gamma \right) \tan \varphi_u + (\sigma_{yu} - p_u) \frac{\Delta \tan \varphi_u}{\Delta y} \quad (4-10)$$

同樣, 可得

$$\frac{\partial \tau_d}{\partial y} = \left[(\gamma_1 - B - 2CL) + (\sigma_{yd} - \sigma_{yu}) \frac{\tan \varphi_d}{L} \right] \tan \varphi_d + \sigma_{yd} \frac{\Delta \tan \varphi_d}{\Delta y} \quad (4-11)$$

從而得到,

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \tau}{\partial y} \right)_u &= \left(\gamma_1 + \frac{\sigma_{yd} - \sigma_{yu}}{L} \tan \varphi_u - \gamma \right) \tan \varphi_u + (\sigma_{yu} - p_u) \frac{\Delta \tan \varphi_u}{\Delta y} \\ \left(\frac{\partial \tau}{\partial y} \right)_d &= \left(\gamma_1 + \frac{\sigma_{yd} - \sigma_{yu}}{L} \tan \varphi_d \right) \tan \varphi_d + \sigma_{yd} \frac{\Delta \tan \varphi_d}{\Delta y} \end{aligned} \right\} \quad (4-12)$$

如所取水平剖面位於下游尾水位下, 則上式當改成,

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial y} \right)_d = \left(\gamma_1 + \frac{\sigma_{yd} - \sigma_{yu}}{L} \tan \varphi_d - \gamma \right) \tan \varphi_d + (\sigma_{yd} - p_d) \frac{\Delta \tan \varphi_d}{\Delta y}$$

分別將已知邊界值代入式(4-8)與(4-9)解聯立方程式得係數如下:

$$\left. \begin{aligned} D &= \sigma_{xu} \\ E &= - \left(\frac{\partial \tau}{\partial y} \right)_u \\ F &= \frac{3(\sigma_{xd} - \sigma_{xu})}{L^2} + \frac{1}{L} \left[2 \left(\frac{\partial \tau}{\partial y} \right)_u + \left(\frac{\partial \tau}{\partial y} \right)_d \right] \\ G &= -2 \frac{(\sigma_{xd} - \sigma_{xu})}{L^3} - \frac{1}{L^2} \left[\left(\frac{\partial \tau}{\partial y} \right)_u + \left(\frac{\partial \tau}{\partial y} \right)_d \right] \end{aligned} \right\} \quad (4-13)$$

利用式(4-12)與(4-13)解得係數 $D \cdots \cdots G$ 後, 即可用式(4-9)計算任意點的 σ_x 。克恩之推演長達 18 頁, 所得求 σ_x 式子亦極長, 彼自認為長得“可怕”。作者之推演簡單明瞭, 所得求 σ_x 式子亦簡短, 計算 σ_x 並不太費事。既然目前一些工程(如 501)仍在採用克恩所擬之美國壑務局分析方法, 茲建議採用作者所提出之方法。是否妥當? 提請批評指正。

簡化相容條件法比前述各法都精確，計算亦屬簡便，此法可廣泛用於分析各種形象重力壩內的應力，如多邊形剖面的蓄水壩，弧形滾水壩等。除特殊重要的工程外，此法可廣泛用於初步設計與技術設計。稍經修正，亦可用來分析支墩壩的支墩，（參閱支墩壩 128 面）。

• 除上述數解法外，最近王鴻儒教授提出了圖解法（詳見本學報王教授文）。仍假定豎向應力 σ_y 沿水平剖面作直線分佈。再用代數法列出計算剪應力的式子，先算最大的剪應力，然後用圖解法繪拋物線狀的剪應力分佈圖。主要特點在求水平應力 σ_x 的圖解法。因用應力成份表示的相容方程是拉卜拉斯方程，可繪 $(\sigma_x + \sigma_y)$ 等值線網，從而求得 σ_x 。為設計穿過壩身的水管或廊道，以採用上述數解法較為簡便且精確度較高；為繪製主應力軌跡線或等強度線則以此項圖解法較為簡便，惟精確度稍差（在這樣的情況下，精確度稍差是沒有甚麼關係的）。

沿水平剖面 σ_y 的分佈是直線的假定是不精確的，壩的剖面與三角形愈不相同時誤差愈顯著，但一般認為些許誤差是可以允許的。只是在接近壩底的水平剖面上，誤差可能很大。壩身由於自重和水壓發生變形，而基礎在壩和水的作用下也發生變形，壩底變形與基礎變形不一致必產生應力重新分配，從而破壞了水平面上豎直應力直線分佈的定律。葛立興指出，應力重新分配只是局部的，一般受影響的壩底部份不超過壩高的 $\frac{1}{3} \sim \frac{1}{4}$ ⁽⁹⁾。尼基法洛夫指出，計算壩上面部份（相當於壩高的 $\frac{2}{3} \sim \frac{3}{4}$ ）的應力時，可不考慮基礎的影響 ⁽³⁾。採用簡化相容條件法來算壩身上面 $\frac{2}{3}$ 高度部份的應力，應認為是夠滿意的。

附帶指出，嚴格地精確地計算壩身內應力是不可能的。壩是三向的。而一般只按二向求解。混凝土不是均質的，不是各向同性的，實際觀察指出，在壩內不同部位在不同時期除有不同的彈性模數，不同的溫度，不同的強度等 ⁽⁹⁾。壩身砼不見得是連續體（例如砼收縮常有裂縫）。壩身材料不一定是彈性的，在應力集中處常有塑性變形。同時地基也不是均質的，不是連續的。壩身與地基的連接面也常常是複雜的。例如，在壩踵處有齒，則齒處產生應力集中，使整個壩底應力重行分佈，（見圖 6a）。壩底常是嵌入地基內，如圖 6b，在尖角處應力集中亦大。因此，如必須在接近壩底部份設置廊道，應參照經驗多放一些鋼筋，以保證在許多因素不明確的情況下工程仍是安全的。

（5）簡化壩身邊界法（或疊加法）

嚴格地講，只有無限高的三角形的壩在壩頂受集中力或自壩頂以下受分佈的