五年制高等职业教育
教材

第二版

数学

第三册

凤凰出版传媒集团
江苏科学技术出版社

五年制高等职业教育教材

数 学（第三册）

（第二版）

编著 《数学》编写组

凤凰出版传媒集团
江苏科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学. 第3册 /《数学》编写组编. —2版. —南京：江苏科学技术出版社，2006.8
五年制高等职业教育教材
ISBN 7-5345-4955-8

Ⅰ.数...　Ⅱ.数...　Ⅲ.数学-高等学校：技术学校-教材　Ⅳ.01

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第092194号

五年制高等职业教育教材
数学(第三册)(第二版)

编　　著　《数学》编写组
责任编辑　孙广能
特约编辑　左玉梅
责任校对　苏　科
责任监制　曹叶平

出版发行　江苏科学技术出版社(南京市湖南路47号，邮编：210009)
网　　址　http://www.jskjpub.com
集团地址　凤凰出版传媒集团(南京市中央路165号，邮编：210009)
集团网址　凤凰出版传媒网 http://www.ppm.cn
经　　销　江苏省新华发行集团有限公司
照　　排　南京展望文化发展有限公司
印　　刷　通州市印刷总厂有限公司

开　　本　718mm×1000mm　1/16
印　　张　9.5
字　　数　161 000
版　　次　2006年8月第1版
印　　次　2006年8月第1次印刷

标准书号　ISBN 7—5345—4955—8/G·1265
定　　价　16.00元

出 版 说 明

五年制高等职业教育是我国高等职业教育的重要组成部分，其目的是培养拥护党的基本路线，适应社会生产、建设、管理、服务第一线需要的，德、智、体、美等方面全面发展的高等技术应用型专门人才.

广播电视大学自举办以来，始终把培养造就劳动和生产一线的应用型人才作为最基本的培养目标，并主要采用远程教育的形式为广大求学者提供了多种规格、多种层次的教学支持服务. 为适应国家经济建设和社会发展对教育的多方位需求和国家劳动就业准入制度的逐步全面实施，广播电视大学系统从 1999 年起开始试办五年制高等职业教育，目前已形成了一定的规模.

为了推进在现代远程教育环境下高等职业教育的发展，我们组织了部分具有丰富的教学经验、学术造诣比较高的专家学者编制了一批具有远程高等职业教育特色的五年制高等职业教育的系列教材，供广大师生使用.

编写具有远程职业教育特色的五年制高等职业教育教材是一种新的探索和尝试，尽管我们作了很大努力，但限于经验和水平，教材中肯定会存在不足之处，敬请广大师生同仁给予批评指正.

全国广播电视大学
职业教育教材建设委员会

前　　言(第二版)

《数学》是广播电视大学五年制高职教育各专业的一门公共基础课程.为了适应广播电视大学远程职业教育的需要,在全国广播电视大学职业教育教材建设委员会领导下,根据《数学》课程教学大纲,我们编写了这套数学教材.

全书共五册,其中第一、二、三册供各专业使用,第四、五册供各专业选用.这套数学教材的编写遵循"深入浅出,精简实用;加强基础,注重能力;渗透实践,强化应用"的原则,内容的选择注意了基础性、实用性和拓展性.内容的处理方法主要体现在以下几个方面:

1. 注意数学自身的系统性、逻辑性,不拘泥于对某些基础理论的严格论证和推导,而尽量采用从实例、现实问题背景或实验引入新知识.

2. 例题的编排由易到难,注重层次性,部分例题提供了分析、解答过程和解题方法小结.

3. 练习的编排采用了三级控制:课内练习(分插在各节正文中)、习题(安排在每节后)、复习题(安排在每章后).为使教材更适合学生的实际,习题和复习题分为A类和B类两个层次.其中A类题以基础题为主,B类题在难度、深度和题型的广度上略有拓展.少量有一定的灵活性和难度的题标有*号,供学有余力的学生选用.

4. 每章均安排了专题应用和阅读材料.专题应用安排在各章最后一节,主要是各章数学知识的应用专题.阅读材料选择了趣味数学、数学小故事、数学发展简史、知识点的拓展应用、数学模型介绍等内容,还安排了部分数学实践活动、实习作业等.

教材由吴进、叶惠英任总主编,南京师范大学李君华教授任主审.第三册主编李明远、薛秋、徐守云.参加本册集体统稿的有吴进、叶惠英、芮永华、丛日明、李明远.

本书在编写过程中,得到了江苏广播电视大学、江苏无锡广播电视大学、江苏南通广播电视大学和江苏宜兴学院的大力支持,在此表示衷心感谢.

对于教材存在的不足之处,恳请专家、读者批评指正.

《数学》编写组

2006年5月

目　录

第8章 平面解析几何

采用数形结合的思想方法，在坐标平面里用代数的方法来研究几何问题的学科称为**平面解析几何**. 本章将介绍直线、二次曲线以及参数方程与极坐标的基本内容. 它们不仅是数学中最基础的知识，而且在工程技术中的应用十分广泛.

8.1 直线的方程

8.1.1 直线方程的概念

我们知道，在平面直角坐标系中，一次函数 $y = kx + b$ 的图像是一条直线，由于函数 $y = kx + b$ 也可以看作关于 x，y 的二元一次方程 $kx - y + b = 0$，所以这个方程的图像也是一条直线.

一般地，方程 $kx - y + b = 0$ 与直线 l 之间具有以下的对应关系：

(1) 以方程 $kx - y + b = 0$ 的解为坐标的点 (x, y) 都在直线 l 上；

(2) 直线 l 上点的坐标 (x, y) 都是方程 $kx - y + b = 0$ 的解.

这时，方程 $kx - y + b = 0$ 就叫做**直线 l 的方程**，直线 l 叫做**方程 $kx - y + b = 0$ 的直线.**

在平面直角坐标系中研究直线时，就是利用直线和方程的这种关系，建立直线的方程，并通过方程来研究直线的有关问题.

例 1 已知直线 l 的方程为 $2x + y + 1 = 0$.

(1) 求直线 l 与坐标轴交点的坐标；

(2) 判断点 $M_1(-1, 1)$ 和 $M_2(1, -1)$ 是否在直线 l 上.

解 (1) 把 $y = 0$ 代入方程 $2x + y + 1 = 0$，得

$$x = -\frac{1}{2},$$

即直线 l 与 x 轴的交点坐标为 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

把 $x=0$ 代入方程 $2x+y+1=0$，得

$$y=-1,$$

即直线 l 与 y 轴的交点坐标为 $(0,-1)$.

(2) 把点 $M_1(-1,1)$ 代入方程 $2x+y+1=0$ 的左边，得

$$2(-1)+1+1=0,$$

所以点 $M_1(-1,1)$ 在直线 l 上.

把点 $M_2(1,-1)$ 代入方程 $2x+y+1=0$ 的左边，得

$$2-1+1=2\neq 0,$$

所以点 $M_2(1,-1)$ 不在直线 l 上.

练习 8.1.1

1. 求下列直线与坐标轴交点的坐标：

(1) $3x+2y+6=0$； (2) $3x-2y+6=0$； (3) $3x+2y-6=0$.

2. 已知直线 l 的方程为 $3x-4y+11=0$，判断下列各点是否在直线 l 上：

(1) $A(3,5)$； (2) $B(2,0)$； (3) $C(-1,2)$； (4) $D\left(\frac{1}{2},-1\right)$.

8.1.2 直线的倾斜角和斜率

1. 直线的倾斜角

在平面直角坐标系中，对于一条与 x 轴相交的直线 l，如果把 x 轴绕着交点按逆时针方向旋转到和直线重合时所转的最小正角记为 α，那么 α 就叫做直线 l 的**倾斜角**. 如图 8.1 中的 α 就是直线 l 的倾斜角.

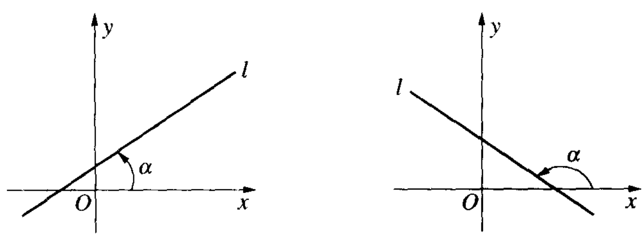

图 8.1

当直线 l 与 x 轴平行或重合时，规定它的倾斜角为 $0°$，因而倾斜角 α 的取值范围是 $0° \leqslant \alpha < 180°$(或 $0 \leqslant \alpha < \pi$).

2. 直线的斜率

直线的倾斜角 α ($\alpha \neq 90°$) 的正切叫做这条直线的**斜率**，通常用 k 表示. 即

$$k = \tan\alpha \ (0° \leqslant \alpha < 180°,\ \alpha \neq 90°).$$

根据直线的倾斜角的取值范围，直线的斜率可分为以下四种情形：

(1) 当 $\alpha = 0°$ 时，$k = 0$；

(2) 当 $0° < \alpha < 90°$ 时，$k > 0$；

(3) 当 $\alpha = 90°$ 时，k 不存在；

(4) 当 $90° < \alpha < 180°$ 时，$k < 0$.

在坐标平面上，如果已知两点 $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$，那么直线 P_1P_2 就确定了. 当直线 P_1P_2 的倾斜角 α 不等于 $90°$(即 $x_1 \neq x_2$) 时，这条直线的斜率也确定了. 下面就用 P_1，P_2 的坐标来表示直线的斜率 k.

如图 8.2 所示，从 P_1，P_2 分别向 x 轴作垂线 P_1M_1，P_2M_2，再作 $P_1Q \perp P_2M_2$，则有

$$\begin{aligned} k &= \tan\alpha = \tan\angle P_2P_1Q \\ &= \frac{|QP_2|}{|P_1Q|} = \frac{|M_2P_2| - |M_2Q|}{|OM_2| - |OM_1|} \\ &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \end{aligned}$$

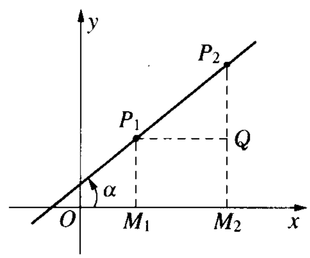

图 8.2

可以证明，当 α 为钝角时，以上结论也成立.

所以，经过两点 $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$的直线的**斜率公式**为

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (x_1 \neq x_2).$$

若 $x_1 = x_2$，则直线垂直于 x 轴，这时直线的斜率不存在.

例 2　求经过 $A(3,\ 2)$和 $B(0,\ 5)$两点的直线的斜率和倾斜角.

解　$k = \dfrac{5-2}{0-3} = -1$，就是 $\tan\alpha = -1$.

由 $0° \leqslant \alpha < 180°$，得

$$\alpha = 135°.$$

因此，这条直线的斜率是-1，倾斜角是 $135°$.

例 3　直线 l_1 的倾斜角 $\alpha = 30°$，直线 $l_2 \perp l_1$，求 l_1，l_2 的斜率.

解 直线 l_1 的斜率为

$$k_1 = \tan\alpha_1 = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

由于直线 l_2 的倾斜角 $\alpha_2 = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$，得直线 l_2 的斜率为

$$k_2 = \tan\alpha_2 = \tan 120^\circ = -\sqrt{3}.$$

练习 8.1.2

1. 已知直线的倾斜角 α，求直线的斜率：

(1) 0°； (2) 30°； (3) 90°； (4) $\frac{5\pi}{6}$.

2. 求经过以下两点的直线的斜率和倾斜角：

(1) $A(2, 0)$，$B(4, 2)$； (2) $A(0, -4)$，$B(-\sqrt{3}, -5)$；

(3) $O(0, 0)$，$P(-1, \sqrt{3})$； (4) $A(1, 1)$，$B(1, -1)$.

8.1.3 直线的方程

1. 点斜式方程

已知直线 l 经过定点 $P_0(x_0, y_0)$，斜率为 k，求直线 l 的方程.

设 $P(x, y)$ 为直线 l 上不与 P_0 重合的任意点(如图 8.3). 由经过两点的直线的斜率公式，得

$$k = \frac{y - y_0}{x - x_0} \quad (x \neq x_0),$$

可化为

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

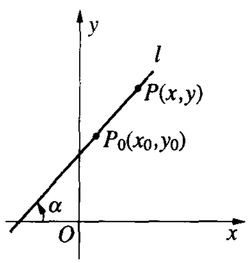

图 8.3

上式是由直线上一个定点和直线的斜率确定的，所以称为直线的**点斜式方程**.

当直线 l 的倾斜角 $\alpha = 0^\circ$ 时，$k = \tan 0^\circ = 0$，直线 l 平行于 x 轴，此时直线

l 的方程为 $y = y_0$. 特殊地，x 轴的方程为 $y = 0$.

当直线 l 的倾斜角 $\alpha = 90^\circ$ 时，斜率 k 不存在，直线 l 平行于 y 轴，此时直线 l 的方程不能用点斜式表示，但因为 l 上每一点的横坐标都等于 x_0，所以它的方程为 $x = x_0$. 特殊地，y 轴的方程为 $x = 0$.

例 4　求经过点(1，−2)，倾斜角为 45°的直线的方程.

解　由已知条件，得

$$x_0 = 1,\ y_0 = -2,\ k = \tan 45^\circ = 1.$$

代入点斜式方程，得

$$y - (-2) = x - 1,$$

整理得所求直线的方程为

$$x - y - 3 = 0.$$

2. 斜截式方程

如图 8.4 所示，直线 l 与 x 轴交于点 $A(a, 0)$，与 y 轴交于点 $B(0, b)$，则 a 叫做直线 l 的**横截距**，b 叫做直线 l 的**纵截距**.

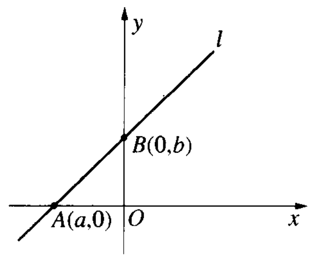

图 8.4

已知直线 l 的斜率为 k，纵截距为 b. 由点斜式方程，得

$$y - b = k(x - 0),$$

即　$$y = kx + b.$$

上式是由直线 l 的斜率和它的纵截距确定的，所以称为直线 l 的**斜截式方程**.

从上可知，在初中学习的一次函数 $y = kx + b$ 中，常数 k 就是直线的斜率，常数 b 就是直线的纵截距(b 可以大于 0，也可以等于或小于 0).

例 5　求与 y 轴交于点 $B(0, -4)$，且倾斜角为 $\frac{2\pi}{3}$ 的直线方程.

解　由已知条件，得

$$b = -4,\ k = \tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}.$$

代入斜截式方程，得

$$y = -\sqrt{3}x - 4,$$

整理得所求直线的方程为

$$\sqrt{3}x+y+4=0.$$

3. 两点式方程

已知直线 l 经过两点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)(x_1 \neq x_2)$，求直线 l 的方程.

直线 l 的斜率 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，代入点斜式方程，得

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

当 $y_1 \neq y_2$ 时，方程可以写成

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

上式是由直线上两点确定的，所以称为直线的**两点式方程**.

例 6 求通过点(1, 2)及点(−3, 5)的直线方程.

解 将这两点的坐标代入两点式方程，得

$$\frac{y-2}{5-2}=\frac{x-1}{-3-1},$$

整理得所求直线的方程为

$$3x+4y-11=0.$$

例 7 直线 l 的横截距为 a，纵截距为 b $(a \neq 0, b \neq 0)$，求直线 l 的方程.

解 因为直线 l 经过 $A(a, 0)$ 和 $B(0, b)$ 两点，由两点式方程，得

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a},$$

整理得直线 l 的方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

上式是由直线的横截距和纵截距确定的，所以称为直线的**截距式方程**.

4. 直线的一般式方程

前面我们学习了直线方程的几种特殊形式，它们都是关于 x, y 的二元一次方程，通过变形，都可以化为 $Ax+By+C=0$ 的形式；反之，关于 x, y 的二元一次方程 $Ax+By+C=0$（其中 A, B, C 为常数，且 A, B 不同时为零）在平面内都表示一条直线. 即平面内的直线与二元一次方程 $Ax+By+C=0$ 是一一对应关系.

我们把方程

$$Ax+By+C=0\ (A,\ B\text{不同时为零})$$

称为直线的**一般式方程**.

由上式可得：直线的斜率 $k=-\dfrac{A}{B}$，横截距 $a=-\dfrac{C}{A}$，纵截距 $b=-\dfrac{C}{B}$.

例 8　将直线 $3x+2y-6=0$ 化为斜截式方程，求出直线的斜率、横截距和纵截距，并画出图形.

解　把原方程变形，得

$$y=-\frac{3}{2}x+3.$$

因此，直线的斜率 $k=-\dfrac{3}{2}$，纵截距 $b=3$.

令 $y=0$，得

$$x=2,$$

即直线的横截距 $a=2$.

过点 $A(2,\ 0)$，$B(0,\ 3)$画所求直线，如图 8.5 所示.

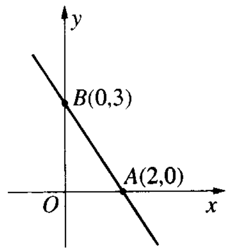

图 8.5

练习 8.1.3

1. 求满足下列条件的直线方程，并化为一般式：

(1) 经过点$(2,\ 5)$，斜率为$-\dfrac{1}{2}$；

(2) 倾斜角为 $120°$，经过点$(0,\ 5)$；

(3) 经过点$(-4,\ -5)$和$(0,\ 5)$；

(4) 经过点$(-4,\ 0)$和$(0,\ 3)$.

2. 求下列直线的斜率、横截距和纵截距，并作图：

(1) $x+y-3=0$；

(2) $2x-2y+1=0$.

习题 8.1

A　组

1. 已知直线 l 的方程为 $3x-4y+12=0$. 求：

(1) 直线 l 与坐标轴交点的坐标；

(2) 判断点 $A\left(2,\ \dfrac{9}{2}\right)$ 和 $B(-1,\ 1)$ 是否在直线 l 上？

2. 已知直线的倾斜角 α，求其斜率：

(1) $\dfrac{\pi}{3}$；　(2) 150°.

3. 求经过以下每两个点的直线的斜率和倾斜角：

(1) $A(2,\ -1)$，$B(4,\ 1)$；

(2) $A(2,\ -2)$，$B(2,\ -1)$.

4. 根据下列条件求出直线的方程，并化为一般式：

(1) 倾斜角为 60°，且与 y 轴交于点 $(0,\ 3)$；

(2) 经过点 $(-2,\ 5)$，斜率为 -1；

(3) 经过点 $(-4,\ -5)$，平行于 y 轴；

(4) 在 x 轴和 y 轴上的截距分别是 2，-1.

5. 求下列直线的斜率和纵截距，并作图：

(1) $x+y=0$；

(2) $2x+1=0$；

(3) $3x-2y+6=0$；

(4) $y-4=0$.

B　组

1. 一条直线经过点 $(-2,\ 4)$，它的倾斜角等于直线 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x-1$ 的倾斜角的 2 倍，求这条直线的方程.

2. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点为 $A(-5,\ 0)$，$B(3,\ -3)$ 和 $C(0,\ 2)$，求三条中线所在的直线方程.

3. 设直线 $y=kx+b$ 经过 $P_1(1,\ 2)$ 和 $P_2(2,\ 3)$ 两点，求 k 和 b 的值.

4. 菱形的两条对角线长分别为 4 和 6，并且分别对应放置在 x 轴和 y 轴上，求菱形各边所在直线的方程.

8.2 平面内两条直线的位置关系

8.2.1 两直线平行和垂直

1. 两直线平行

设两条直线 l_1 和 l_2 都不平行于 y 轴，它们的倾斜角分别是 α_1 和 α_2，斜率分别为 k_1 和 k_2. 如果 $l_1 // l_2$（如图 8.6），那么 $\alpha_1 = \alpha_2$，得 $\tan\alpha_1 = \tan\alpha_2$，即

$$k_1 = k_2.$$

反之，如果 $k_1 = k_2$，即 $\tan\alpha_1 = \tan\alpha_2$，根据倾斜角的取值范围 $0° \leqslant \alpha < 180°$，得 $\alpha_1 = \alpha_2$，即

$$l_1 // l_2.$$

由上可知

$$l_1 // l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2.$$

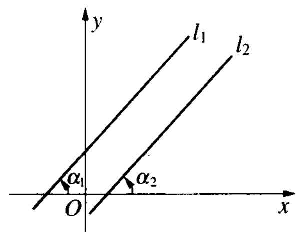

图 8.6

例 1　求过点(2，−3)且平行于直线 $3x - 2y + 2 = 0$ 的直线的方程.

解　已知直线的斜率为 $\frac{3}{2}$，又由所求直线与已知直线平行，得所求直线的斜率也为 $\frac{3}{2}$，代入点斜式方程，得

$$y + 3 = \frac{3}{2}(x - 2),$$

整理得所求直线的方程为

$$3x - 2y - 12 = 0.$$

2. 两直线垂直

设直线 l_1 和 l_2 的斜率分别为 k_1 和 k_2，则直线 l_1 的方向向量 $\boldsymbol{a} = (1,\ k_1)$，直线 l_2 的方向向量 $\boldsymbol{b} = (1,\ k_2)$. 根据平面向量的有关知识，

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \Leftrightarrow 1 \times 1 + k_1 \times k_2 = 0,$$

即

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2=-1.$$

例2 求经过点 $P(5,3)$且与直线 $7x+9y+1=0$ 垂直的直线的方程.

解 已知直线的斜率为$-\frac{7}{9}$,又由所求直线与已知直线垂直,得所求直线的斜率为

$$k=-\frac{1}{-\frac{7}{9}}=\frac{9}{7}.$$

代入点斜式方程,得

$$y-3=\frac{9}{7}(x-5),$$

整理得所求直线的方程为

$$9x-7y-24=0.$$

练习 8.2.1

1. 判定下列各对直线是否平行或垂直:

(1) $3x+y+4=0$ 与 $6x+2y+3=0$;

(2) $y=-x$ 与 $2y-2x-3=0$;

(3) $3x+2y=4$ 与 $6x-4y=5$;

(4) $\sqrt{3}x-y-1=0$ 与$\sqrt{3}x+3y+6=0$.

2. 求过点 $A(2,3)$且分别适合下列条件的直线的方程:

(1) 平行于直线 $2x+y-5=0$;(2) 垂直于直线 $x-y-2=0$.

8.2.2 两条直线的夹角

两条直线 l_1 和 l_2 相交构成四个角,我们把其中不大于直角的角 θ 叫做**两条直线的夹角**.

当直线 $l_1 /\!/ l_2$ 时,$\theta=0°$;当直线 $l_1 \perp l_2$ 时,$\theta=90°$. 则两直线的夹角 θ 的取值范围为 $0°\leqslant\theta\leqslant 90°$.