厦门一中课程资源书系007

精妙的初等数学模型

张远南 任勇 著

鹭江出版社
LUJIANG PUBLISHING HOUSE

厦门一中课程资源书系007

精妙的初等数学模型

张远南 任勇 著

鹭江出版社
LUJIANG PUBLISHING HOUSE

精妙的初等数学模型

张远南　任　勇　著

*

鹭江出版社出版、发行

（厦门市湖明路 22 号　邮编：361004）

人民日报社福州印务中心印刷

（福州市鼓屏路 33 号　邮编：350001　电话：87556835）

开本 787×1092　1/16　16 印张　369 千字

2006 年 3 月第 1 版

2006 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 7—80610—995—1

G・496　定价：22.00 元

序

开发新时代的学校课程（代序）

任　勇

中国教育进入新的时期，其中最为引人注目的是面向21世纪的课程改革。

打开教育类杂志，常会看到一些新名词：校本管理、校本培训、校本教研、校本科研、校本课程、校本评估等等。

学校被历史地推到了教育改革的最前沿。课程的重心下移了，要“以校为本”。

上海晋元高级中学提出了“学会选择、主动学习、卓越发展”的办学理念，以课程改革为突破口，掀起了一场教与学的革命，实行“套餐式课程”、“走班制运作”和“学分制管理”的互为配套的运行机制。

上海华东师大二附中提出了“构建以提升中学生国际竞争能力为目标的学校课程”和“给每个学生以特权的学校课程”，开设了“大文化类系列课程”47门，“STS系列课程”42门，“学生社团活动课程”26门，“荣誉课程”10门，四大系列共125门课程。

厦门一中也要“让课程适应每一个学生的发展”，开发系列的学校课程，实现课程的多样化，满足学生个性全面发展的需要。

课程改革浪潮滚滚而来，课程改革正在轰轰烈烈地进行，学校课程的开发是本次课程改革的亮点之一。

新课程“新”在哪里？

从课程管理角度看，“新”在从原来的两级管理走向三级管理，即国家课程管理、省级课程管理和学校课程管理，使得学校这个真正发生教育的地方有了一定的课程权力，并承担相应责任。基于这种变化，学校应该十分珍惜这份课程权力，为学校的课程创新创设一个发展的平台。

学校课程开发的实质与要义，表现为课程权利的再分配，课程决策的民主化，课程开发主体的多元化。重视课程开发的过程，有利于学生个性的养成与教师的专业发展，有利于学校特色的形成。

学校课程开发既是挑战，也是机遇。

这种挑战来自心理认知与参与意愿的挑战，来自知识与能力的挑战，来自时间与经费的挑战，来自制度与模式的挑战，来自家长与社区的挑战，等等。

现实的机遇是课程关注学校生活，有利于推进素质教育，有利于教师的专业化成长，为学生发展、教师发展、学校发展提供创新平台，有利于师生参与决策，等等。

就目前情况而言，不得不承认，对大多数教师来说，可能是“挑战”的成分多于“机遇”的成分。

厦门一中是一所历史名校，时代赋予名校新的庄严使命。构建学校课程，传承名校文化，培养时代新人，发展先进文化，这是名校的历史使命。历史名校唯有在深厚的积淀中把握未来、跨越发展，唯有在当今蔚为壮观的改革大潮中继续领航、乘势而上，才能不断地做强做大，才能不断地创造更多的“第一”的事业。

于是，学校十分重视课程资源的科学开发和合理利用。我们深知，没有课程资源的广泛支持，再好的课程改革设想也很难变成学校的实际教育效果。因此，我们从课程思想资源、课程知识资源、课程经验资源、课程财务资源、课程人力资源、网络课程资源等方面进行开发，其中编写系列的学校课程书籍供师生使用，是十分重要的课程资源。

在全校教职员工的努力下，在鹭江出版社的支持下，“厦门一中课程资源书系”将隆重推出，首批开发 82 本。

学校课程资源的开发是课程改革的新亮点，对教师的教育和学生的学习都提出了全新的挑战。

对教师而言，开发学校课程，是对教师观念、素质的检验，教师可以在开发学校课程中得到进一步发展。

对学生而言，学校提供各类课程，就是为学生的个性发展提供一片自由的天地，让学生在选择课程中不断成长。

《精妙的初等数学模型》一书，是张远南老师与我合著的一本书。张远南老师是著名的数学科普专家、特级教师，也是厦门一中“名师工作室”特聘的第一位名师。去年，我邀请张老师作为特聘名师时，顺便提出能否写点给学生看的东西。几个月过后，当张老师把一摞整齐的书稿放在我面前时，我的确惊呆了。惊其速度之快，惊其内容之广，惊其质量之高。张老师希望我能写数学建模概论部分和近年与高考有关的数学建模问题。基于张老师的热忱，基于积极推进厦门一中校本课程建设的心愿，基于迎接挑战的冲动，我接受了任务，于是就有了这本书，这本特聘名师为厦门一中课程资源书系做贡献的书。

前　言

长期以来，有两方面的思考萦回在我的脑海中：

其一是数学本身，它从朦胧中起源，几经周折，以至天衣无缝。这中间走过了漫漫数千年。今天，这种由数和图形垒砌的知识城堡，已经构筑得如此博大精深，而且在抽象方面已经走得很远，面目远非昔比！然而，对数学的探索和研究，却始终追求以客观现实为原型，并为解决客观实际的问题提供强有力的支撑。

其二是周围世界，它是如此地丰富多变，人类对它的认识，又是如此地细致深刻。然而，尽管我们已经有着许许多多的发现和发明，但客观的现实仍无尽地暴露出问题，挑战着人类的智慧！无论自然科学、社会科学，或是工程技术，无不呼唤着数学能为其提供更为强有力的手段和工具，以帮助它们战胜自然，完善自我。科学数学化的浪潮，正席卷着几乎所有的领域。

上述两种思考的交织，便自然地集中于“数学模型”。数学模型它既是客观现实的简缩，又是数学方法的载体，从而为数学教育和数学研究所倚重。

基于上述原因，在上个世纪末，我便萌生了写一本有关“数学、模型和现实”的书，并因此开始了漫漫的资料积累和研究的过程。2005 年，我有幸来到了美丽的厦门。出于对厦门一中这所百年名校的倾慕，和对任勇校长在教育教学理论上造诣的敬佩，我欣然受聘为该校名师工作室一员。工作之余，偶与任勇校长论及“数学建模”，两人所见略同，遂共求合作，由任勇同志在建模理论及高考建模方面予以开拓，我操笔具体模型的构建。二人同心，不敢懈怠，历历数月，终成是卷。

这本书作为厦门一中的校本课程资源之一，内容基于高中数学知识体系，部分章节虽然略有所超出，但只要悉心钻研，也绝非不可攀及！我们曾尝试就其中的若干篇章，演变成讲稿，为高中学生开设讲座。学生反响强烈，兴味尤浓。

本书除对数学建模理论作精辟论述外，还着重介绍了 50 个精彩的数学模型，大多是古今中外的经典力作。其内容涵盖数学、物理、生物、军事、经济、社会，以及生产、生活等诸多方面。着重介绍深刻的背景、建模的技法、条件的剖析、解法的技巧，以及应用的局限等。这对于开拓高中学生的视野，学会如何把实际问题转化为数学问题，又运用数学的方法去解决实际问题等，都将有所裨益。考虑到近年高考在数学建模方面有所要求，本书专设一章论及高考中的数学建模问题，供中学生借鉴、参考。

由于作者水平有限，书中的疏漏在所难免，敬请读者批评指正！

张远南

2006年1月1日

目 录

第三章 数学建模与数学高考

主要参考文献

第一章 数学模型

1.1 数学模型概述

1. 模型

大多数同学都见过城市发展规划模型，见过人造地球卫星模型，见过售楼处的楼盘模型，也见过反映学校校史的照片、数字与图表. 同学们要研究某个问题，常常要用到某个公式；同学们要进行“机器人足球赛”，都要进行程序设计. 以上我们提到的这些实物模型、照片、图表、公式、程序等，它们统称为“模型”.

“模型”是人们用以认识世界的重要手段之一，这里的模型是针对原型而言的.

所谓原型，是指人们所关心和研究的实际对象. 而模型是人们为一定的目的对原型进行的一个抽象.

例如，同学们熟知的航空模型就是对飞机的一个抽象. 除了机翼与机身的形状及其相对位置关系外的一切因素，包括飞机的实际大小都在抽象的过程中被忽略掉了. 虽然它与作为原型的实际飞机已经相距甚远，但是在飞行过程中机翼的位置与形状如何影响飞机在空中平稳地滑翔可以给人们以启迪.

城市的交通图是这个城市的一个模型. 在这个模型中，城市的人口、车辆、树木、建筑物的形状等都不重要；但图中所展示的街道和公共交通线路却都一目了然.

由此可见，模型来源于原型，但它不是对原型简单的模仿，它是人们为了深刻地认识和理解原型而对它所作的一个抽象、升华. 有了它就可以使我们通过对模型的分析、研究，加深对原型的理解和认识.

2. 模型的分类

根据实物、构想或设计图，按照比例、形态、大小或其他特征制成的看上去与客观实体相似的模型，例如，数学上用的几何模型、原子结构模型、收音机实验板模型、地球仪模型、人体模型、玩具模型、飞机模型、航海模型、照片等，统称为形象模型.

借助图形和符号来代表实物特征的模型，如规划图、地图、交通图、建筑工程图、电路图等等，统称为模拟模型.

用字母、数字和与之相关的数学符号建立起来的公式（如等式、不等式或包含式等），以及图表、图象、框图等描述客观事物的特征及其内在联系的模型，统称为数学模型. 模拟模型与数学模型统称为抽象模型.

3. 数学模型

所谓数学模型，是指通过抽象和简化，使用数学语言对实际对象的一个近似的刻画，以便于

人们更深刻地认识所研究的对象.

数学模型不是对现实系统的简单的模拟，它是人们对现实对象进行分析、提炼、归纳、升华的结果，是以数学的语言来精确地描述现实对象的内在特征，以便于通过数学上的演绎推理和分析求解来深化对所研究的实际现象的认识.

例如，力学中著名的牛顿第二定律使用公式 $F=m\frac{d^2x}{dt^2}$ 来描述受力物体的运动规律就是一个成功的数学模型，其中 $x(t)$ 表示运动的物体在时刻 t 的位置，m 为物体的质量，而 F 表示运动期间物体所受的外力. 模型忽略了物体的质地、形状、大小和运动过程中次要的干扰因素. 由于它抓住了物体受力运动的主要因素，这一定律的出现大大深化了力与物体运动规律的研究工作.

一般说来，中学课本中出现的方程、不等式、函数等概念均是从一些客观事物的某种数量关系或空间形式中抽象出来的数学模型，而我们所要研究的有关数学模型问题，是指能反映特定问题或特定具体事物、具体系统内部的数学关系式结构，它或能解释特定抽象的现实状态，或能预测对象的未来状态，或能提供处理对象的最优决策或控制. 例如：

将某一物体放在室温为20℃的空气中，在时间 $t=0$ 时，该物体的温度为 $u_0=150$℃，经过10分钟后物体温度变为 $u_1=100$℃，试求出物体温度 u 随时间 t 的变化规律.

我们应用数学工具和牛顿冷却定律可以求出 $u(t)=20+130e^{-0.057}$.

数学模型不但被广泛应用于几何、物理、化学、医学、生物、地理、体育、气象、天文、自动控制、航空航天、计算机等自然科学领域，而且也广泛应用于政治、军事、经济、信息管理等社会科学领域中.

4. 数学模型的特点

(1) 数学模型是从客观实际事物中高度抽象概括出来的，且是完全形式化和符号化了的模型，因而它是部分现实世界合理而恰当的简化，而且一般是对客观事物本质的描述. 它是舍弃了事物的次要因素，突出了事物的主要因素的主要结果；是事物的一种模拟，虽源于现实，但非实际原型，而又高于现实.

(2) 应用数学模型既可进行理论分析，又可进行算法设计、变量计算与逻辑演绎和推导.

(3) 数学模型是数学上的抽象，在数值上可以作为公式应用，还可推广到与原物相近的一些问题.

(4) 经若干次修改后的数学模型，所获得的结果可以再回到实际中检验，从而指导实践，为实践服务.

(5) 数学模型可以作为某事物的数学语言，可以译成算法语言，编写程序输入到计算机.

1.2 数学建模

1. 一个典型的例子

哥尼斯堡七桥问题

18 世纪，在东普鲁士有一个名叫哥尼斯堡的城市，市郊有一条河，河内有两个小岛（名叫金银岛），两岸与两岛之间架有七座桥（图 1—1）．一个散步者能否走遍七座桥，每座桥只走过一次，最后回到出发地？居民们一次又一次地尝试，都失败了．谁也无法回答是“能”还是“不能”．这就是著名的“七桥问题”．

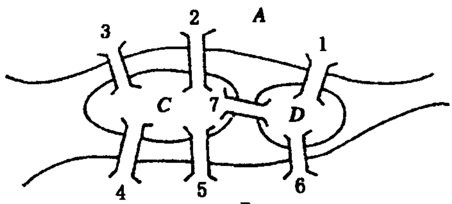

图 1—1 哥尼斯堡七桥

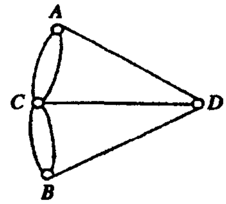

图 1—2 模拟图

欧拉在 1736 年发表了一篇关于七桥问题的论文，这是图论的第一篇论文，标志着图论的诞生．

能否从某地出发，经过每座桥一次且仅一次，最后返回到出发地？

此问题的解答可按下面步骤和方法进行：

①用符号 A、B 表示两岸，C、D 表示两个岛，1、2、3、4、5、6、7 分别表示七座桥．

②将两岸与两岛看成点，七座桥看成七条曲线．

这样就得到哥尼斯堡七桥问题的数学模型——模拟图（图 1—2）：能否一笔画出图 1—2 的图形．由于能一笔画的图形除去起点与终点外，各交点处的曲线总是一进一出，即除去起点与终点外通过交点的曲线总是偶数条．而图 1—2 中的 A、B、C、D 四点，都通过了奇数条曲线．所以，图 1—2 不是一笔能够画出的图形，从而证明了散步者走遍七桥且每座桥只过一次而最后返回到出发点是不可能的．

上面解决哥尼斯堡七桥问题的思路框图如图 1—3 所示．

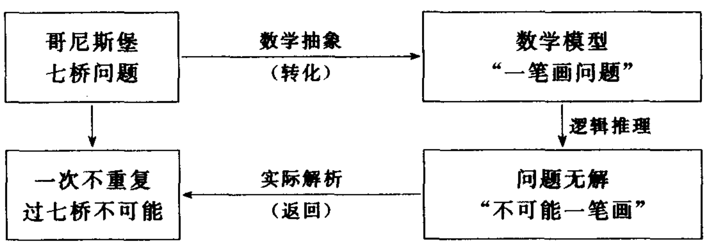

图 1—3 求解七桥问题的思路框图

对于现实事物，进行建立数学模型的具体过程称为数学建模．现实对象与数学模型之间的一

般关系如图 1—4 所示.

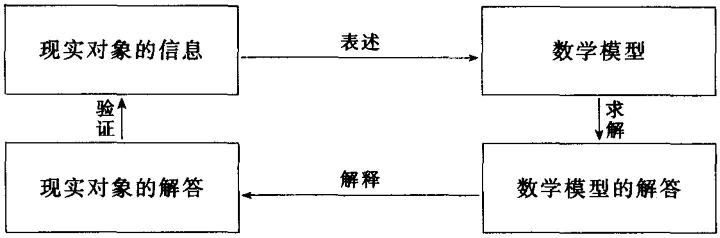

图 1—4 现实对象与数学模型的关系

2. 数学建模的一般步骤

数学建模是一种十分复杂且具有创造性的劳动. 现实世界中的事物千奇百怪，五花八门，不可能用一些条条框框规定出各种模型如何建立. 这里所说的建模步骤只是一种大体上的规范，实际操作中应对具体问题做具体分析，灵活运用，边干边创造. 结合前面的实例，大致归纳一下建立数学模型的一般步骤和原则是：

（1）模型准备：弄清实际问题的背景，明确建模的目的，掌握研究对象的各种信息（如数据、资料等），弄清对象的特征，分析原型的结构. 为做准备，有时要求建模者作深入细致的调查研究，遇到问题要虚心向有关方面的专家请教，按模型的需要有目的地合理收集所需要的数据.

（2）模型假设：分析处理数据、资料，确定现实原型的主要因素，抛弃次要因素，对问题进行必要的简化，用精确的语言找出必要的假设. 这是关键的一步.

（3）模型建立：根据主要因素及所做的假设，利用适当的数学工具刻画各有关量和元素的关系，建立相应的数学结构（如方程、不等式、表格、图形、函数、逻辑运算式、数值计算式等）. 在建模时究竟采取什么数学工具要根据问题的特征、建模的目的要求及建模者的数学特长而定. 同一实际问题可能由于采用的数学方法不同而建立的模型也不同. 但应遵循这样一条原则，尽量采用简单的数学工具，以使得到的模型被更多的人了解和使用.

（4）模型求解：根据采用的数学工具，对模型求解，包括解方程、图解、逻辑推理、定理证明、性质讨论等，从而找出数学上的结果. 要求建模者掌握相关的数学知识，尤其是计算技巧和计算机技术.

（5）模型分析：对模型求解的结果进行数学上的分析，有时是根据问题的性质分析各变量之间的依赖关系或性态；有时是根据所得结果给出数学上的预测或最优决策、控制等.

（6）模型检验：把模型分析的结果返回到实际对象中去，用实际现象、数据等检验模型的合理性和适用性，即验证模型的正确性. 通常，一个成功的模型不仅应能解释已知现象，而且还能预言一些未知现象，并能被实践所证明.

（7）模型应用：若检验结果与实际不符或部分不符，而且建模和求解过程中肯定无误，那么问题一般出在模型假设上，此时应该修改或补充假设，重新建模. 如果检验结果正确，满足问题所要求的精度，认为模型可用，便可进行最后一步“模型应用”了.

建模的七个步骤可用下面框图（图 1—5）表示.

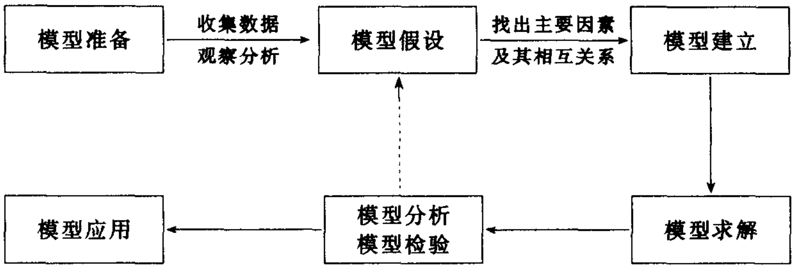

图 1—5　建模步骤框图

3. 再看一个精彩的例子

雨中行走问题

下雨天，小刚有件急事要从家中到学校去. 学校离家仅有 1km，由于事情紧急，他不准备花时间去找雨具，决定碰一下运气，顶着雨去学校. 假如刚刚出发雨就下大了，但他也不打算回家取雨具了. 一路上，他将被大雨淋湿. 一个似乎很简单的事实是他应该在雨中尽可能地快走，以减少雨淋的时间. 但若考虑到降雨方向的变化，在全部路程上尽力地快跑不一定是最好策略. 试建立一个数学模型来探讨如何在雨中行走才能减少淋雨的程度.

对于这一实际问题，其背景是简单明确的，人人皆知不必再去论述. 问题是要在给定的降雨条件下设计一个雨中行走的策略，使得他被雨水淋湿的程度最低. 显而易见，这可按数学模型问题进行处理.

现在，为准备建模（即模型准备）分析一下该问题的因素，主要因素有：(1) 降雨的大小；(2) 风（降雨）的方向；(3) 路程的远近与他走的快慢. 为简化问题的研究，我们作如下的模型假设：(1) 降雨速度（即雨滴下落速度）和降水强度 I(cm/h)保持不变；(2) 他以定常的速度 v(m/s)跑完全程；(3) 风速始终保持不变；(4) 把人体视为一个长方体的物体.

为进一步简化这一问题的研究，首先讨论最简单的情形，而不考虑降雨的角度的影响，也就是说，在他行走的过程中身体的前后左右及上方都将淋到雨水.

现考虑模型建立：在上述假设下，可以给出参与该模型的所有参数和变量.

雨中行走的距离为 D(m)，行走的时间为 t(s)，行走的速度为 v(m/s)；小刚的身高为 h(m)、身宽为 w(m)、身厚为 d(m)；他身上被淋的雨水总量为 C(L). 关于降雨的大小，在这里可以用降水强度（单位时间内平面上降下雨水的厚度）I(cm/h)来描述.

可以认为，问题中的行走距离 D、身体尺寸 h、w、d 以及身体被雨淋的面积 $S=2wh+2dh+wd$(m^2)是不变的，为问题中的参数. 雨中行走的速度 v，行走的时间 $t=D/v$ 以及降水强度的大小 I 在问题中是可调节、可分析的，为问题中的变量.

考虑到各参量取值单位的一致性，可以得到在整个雨中行走过程中整个身体被淋的雨水的总量为：

$$C=t(I/3\,600)S\times 0.01(\mathrm{m}^3)=(D/v)(I/3\,600)S\times 10(\mathrm{L}) \quad ①$$

模型中的参数可以通过观测和日常的调查资料中得到.

模型求解：在上述问题中我们假设：$D=1\,000$m，$h=1.50$m，$w=0.50$m，$d=0.20$m. 由此可

得 $S=2.2\mathrm{m}^2$. 假设降雨的强度为 $I=200\mathrm{cm/h}$，在雨中行走的速度 v 将是模型中的变量. 模型表明，被淋在身上的雨水总量与他在雨中行走的速度成反比. 如果他在雨中以尽可能快的速度 $v=6\mathrm{m/s}$ 跑步走，那么他在雨中行走的时间 t 将为：$t=167\mathrm{s}=2$ 分 47 秒.

由此可得，他身上被雨淋的雨水的总量为

$$C=167\times(2/3\,600)\times2.2\times10(\mathrm{L})=2.041(\mathrm{L}) \qquad ②$$

模型分析与模型检验：仔细分析上述结果，这是一个荒谬的结果. 他在雨中只跑了 2 分 47 秒的时间，身上却被淋了 2 升的雨水（大约是 4 酒瓶的水量），这是不可思议的. 因此，这充分表明，我们得到的这个模型用以描述雨中行走的人被雨水淋湿的程度是不符合实际情况的，因而上述建立的模型①不能作模型应用.

建立的模型与实际不符的原因出在模型的假设上，因而需修改或补充假设使之合理适当，重新建模. 此时我们发现不考虑降雨角度的影响这个假设，把问题简化得过于简单了.

考虑到降雨角度的影响，这时降雨强度已经不能完全描述降雨的情况了. 我们给出降雨的速度（即雨滴下落的速度）$r(\mathrm{m/s})$，以及降雨的角度（雨滴下落的反方向与他前进的方向之间的夹角）θ. 显然，前面提到的降雨的强度将受到降雨的速度的影响，但它并不完全决定于降雨的速度. 它还决定于雨滴下落的密度，我们用 p 来表示雨滴的密度，称为降雨的强度系数，它表示在一定的时刻内，单位体积空间中由雨滴所占据的空间的比例数. 于是有 $I=pr$. 显然 $p\leqslant1$，因为当 $p=1$ 时意味着大雨倾盆，有如洪水向下倾泻一般.

在此情况下，为要估计他被雨水淋湿的程度，关键是考虑到他在雨中的行走方向之后，雨滴相对的下落方向. 这个方向由图 1—6 给出. 因为雨水是迎面而来落下的，由经验可以知道，此时被淋湿的部位将仅仅是他的顶部和前方.

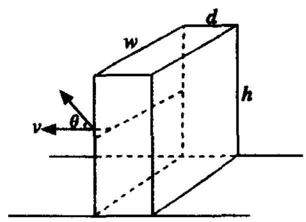

图 1—6　雨中行走模型图

因此，淋在他身上的雨水将分为两部分来计算.

(1) 首先考虑他的顶部被淋的雨水. 顶部的面积是 wd，雨滴的垂直速度分量为 $r\sin\theta$. 不难求得，在时间 $t=D/v$ 内，淋在他的顶部的雨水量是

$$C_1=(D/v)wd(pr\sin\theta) \qquad ③$$

(2) 再考虑他的前方表面淋雨的情况. 前方的面积是 wh，雨速的分量为 $r\cos\theta+v$，类似可求得，他的前方表面被淋到的雨水量为：

$$C_2=(D/v)wh\,[p(r\cos\theta+v)] \qquad ④$$

因此，他在整个行程中被淋到的雨水总量为：

$$C=C_1+C_2=\frac{pwD}{v}\,[dr\sin\theta+h(r\cos\theta+v)] \qquad ⑤$$

仍沿用前面得到的参数值，如果假设落雨的速度是 $r=4\mathrm{m/s}$，由降雨强度 $I=2\mathrm{m/h}$ 可以估算出它的强度系数 $p=1.39\times10^{-6}$. 把这些参数值代入(1.5)式可以得到

$$C=\frac{6.95\times10^{-4}}{v}(0.8\sin\theta+6\cos\theta+1.5v) \qquad ⑥$$

在这个模型里，有关的变量是 v 和 θ，因为 θ 是落雨的方向角，我们希望在模型研究过程中改变它的数值；而 v 是我们要选择的雨中行走的速度，于是我们的问题就变为：给定 θ，如何选择 v 使得 C 是最小的.

下面分各种情况对模型进行讨论：

情形 1：$\theta=90°$.

在此情形下，因为雨滴垂直下落，所以由上述模型⑥可得

$$C=6.95\times10^{-4}(1.5+0.8/v) \quad ⑦$$

模型⑦表明，C 是关于 v 的减函数，只有当速度取可能的最大值的时候 C 达到最小. 假设他以 $v=6\text{m/s}$ 的速度在雨中猛跑，由模型⑦可以得到 $C=11.3\times10^{-4}(\text{m}^3)=1.13(\text{L})$.

情形 2：$\theta=60°$.

此时，因为雨滴将迎面向他身上落下，由模型⑥可得

$$C=6.95\times10^{-4}\ [1.5+(0.4\sqrt{3}+3)/v] \quad ⑧$$

同样，C 将在 $v=6(\text{m/s})$ 时取最小：$C=14.7\times10^{-4}\text{m}^3=1.47(\text{L})$.

情形 3：$90°<\theta<180°$.

在此情形下，雨滴将从后面从他身上落下，令 $\theta=90°+\alpha$，$0°<\alpha<90°$.

$$C=6.95\times10^{-4}\ [1.5+(0.8\cos\alpha-6\sin\alpha)/v] \quad ⑨$$

对于充分大的 α，这个表达式可能取负值. 这显然是不合理的，因为雨水量是不可能为负值的. 其主要原因是这种情况超出了我们前面讨论的范围. 因此必须回到开始的分析过程对这种情况进行详细的讨论. 按照他在雨中行走的速度分成两种情况.

(1) 首先 $v\leqslant r\sin\alpha$ 的情形，也就是说他的行走速度慢于雨滴的水平运动速度. 此时雨滴将淋在他的背上，淋在背上的雨水量为 $pwDh(r\sin\alpha-v)/v$. 于是淋在全身的雨水总量为：

$$C=pwD\ [dr\cos\alpha+h(r\sin\alpha-v)]\ /v \quad ⑩$$

再代入数据，即可得到

$$C=6.95\times10^{-4}\ [(0.8\cos\alpha+6\sin\alpha])/v-1.5] \quad ⑪$$

它也是关于速度的减函数. 当他以速度 $v=r\sin\alpha=4\sin\alpha$ 在雨中行进时，淋雨量的表达式可以简化为：

$$C=6.95\times10^{-4}(0.8\cos\alpha)/(4\sin\alpha)=1.39\times10^{-4}\tan\alpha \quad ⑫$$

此表明他仅仅头顶部位被雨水淋湿了. 如果雨是以 120°的角度落下，也就是说明雨滴以 $\alpha=30°$ 从后面落在他背上，他应该以 $4\sin30°=2(\text{m/s})$ 的速度在雨中行走. 此时，他身上被淋湿的雨水总量为 $C=1.39\times10^{-4}\times\sqrt{3}/3(\text{m}^3)=0.24(\text{L})$. 实际上，这意味着他刚好跟着雨滴向前走，所以身体前后都没有淋到雨. 如果他的速度低于 2m/s，则由于雨水落在背上，而使得被淋的雨量增加.

(2) 在 $v>r\sin\alpha$ 的情形，他在雨中奔跑的速度比较快，要快于雨滴的水平运动速度 2m/s，此时他将不断地追赶雨滴，雨水将淋在他的胸前. 被淋的雨水量为 $pwhD(v-r\sin\alpha)/v$. 于是全身被淋的雨水总量为

$$C=pwD\ [rd\cos\alpha+h(v-r\sin\alpha)]\ /v \quad ⑬$$

当 $v=6\text{m/s}$ 且 $\alpha=30^\circ$ 时，我们有 $C=6.95\times10^{-4}(0.4\sqrt{3}+6)/6(\text{m}^3)=0.77(\text{L})$.

综合上面的分析，从这个模型我们得到的结论是：

(1) 如果雨是迎着他前进的方向落下的，此时的策略很简单，他应该以最大的速度向前跑.

(2) 如果雨是从他的背后落下，此时他应该控制在雨中的行走速度，让它刚好等于落雨速度的水平分量.

上述所得到的这些结果似乎是合理的，并且与我们所期望的是一致的. 我们的第二个更详细的模型⑤对前面的模型①的改进之处在于建模时考虑了落雨的方向并且更全面地考虑了各种可能发生的情况，所有的雨水量的结果比第一个模型①得到的 2L 要小. 同样所得到的结果的数量级也是我们所希望的. 真正使用实际的数值结果来验证这个模型是困难的. 当然如果他不怕全身淋湿的话，也可以尝试在雨中行走的几种情况来验证我们的模型. 即使如此，如何在雨中控制他的行走速度也并非易事.